Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 101/102 (1933)
Heft: 5

Artikel: Zur Theorie der rotierenden Scheibe mit Trapez-Querschnitt
Autor: Karlson, E.G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83032

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Zur Theorie der rotierenden Scheibe mit Trapez-Querschnitt. — Die Flussbäder Aarau und Rheinfelden aus Eisenbeton-Fertigkonstruktionen. — Die Bebauung des „alten Tonhalle-Areals" in Zürich. — Mitteilungen: Ein neuer Indikator für schnellaufende Motoren. Die Etektrolyse des Wassers unter Druck. Die „Hafraba"-Fernverkehrstrasse. Vergrösserung des Ladeprofils der italienischen Bahnen. Das Tessin-Kraftwerk Piottino. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 102 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 5**

Zur Theorie der rotierenden Scheibe mit Trapez-Querschnitt.

Von Ing. K. G. KARLSON, Stockholm.

Es zeigt sich nicht selten, dass eine in geometrischer Beziehung einfache Form keineswegs auch analytisch leicht zugänglich ist. Ein Scheibenkörper, der von symmetrischen konischen Endflächen begrenzt ist (Abb. 1), hat eine besonders einfache Gestalt, gehört aber in mathematischer Hinsicht nicht zu den fügsamen.

Für durchlochte Scheiben wird bei Benutzung des von Stodola[1]) eingeführten hyperboloidischen Profiles insbesondere die Ermittlung der Randspannungen sehr einfach, wenn ein für allemal für die Einheitscheibe ($R = 1$) Interpolationskurven berechnet werden. Wird nun, aus Herstellungsgründen, das Profil durch Gerade ersetzt, werden die berechneten Spannungswerte etwas beeinflusst, das Ersatzprofil lässt sich aber dem vorausgesetzten so nahe anschliessen, dass diese Abweichungen von der berechneten Beanspruchung praktisch völlig belanglos sind.

Immerhin hat die analytische Untersuchung der Scheibe mit Trapez-Querschnitt theoretisches Interesse. Die Aufgabe wurde schon von Martin[3]) und von Pöschl[2]) (Näherungsmethode nach Ritz) behandelt. Verfasser hatte hingegen anfänglich die (ebenfalls auf hypergeometrischen Reihen fussenden) Abhandlungen von Fischer[4]) und Honegger[5]) übersehen. Da die Auswertung der bei der Anwendung zu benutzenden Grössen schon erledigt war, hat vielleicht ein Vergleich mit den von Honegger berechneten Spannungen einiges Interesse.

Die nachfolgende kleine Studie war das Ergebnis eines Versuches, *geschlossene* analytische Ausdrücke für die Dehnung und die Spannungen zu finden. „Geschlossen" bedeutet freilich nicht, dass auch genaue Zahlenwerte erhältlich sind; die Annäherung lässt sich mit Hilfe der Zahlentafeln 3 und 4 und der analytischen Prüfung der Zahlentafel 1 einigermassen beurteilen.

Zu dem genannten Zwecke wurden in die Differentialgleichung für die Dehnung ξ nach Stodola[6]),

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{d\ln y}{dx} + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{\nu}{x}\frac{d\ln y}{dx} - \frac{1}{x^2}\right)\xi = -Kx \qquad (1)$$

wo $K = \frac{1-\nu^2}{E}\,\mu\,\omega^2$,

die neuen Veränderlichen

$$z = 1 - \frac{y}{y_0} = \frac{k}{y_0}x \text{ und } \eta = \frac{\xi}{z^n} \quad . \quad . \quad (2)$$

eingeführt. Mit der Abkürzung

$$C = K\left(\frac{y_0}{k}\right)^3, \text{ wo } k = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

(Abb. 1) und somit $\frac{k}{y_0}$ eine für den Scheibentypus bezeichnende Konstante ist, schreibt sich Gl. (1):

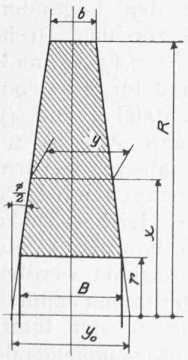

Abb. 1.

$$z^{2+n}(1-z)\frac{d^2\eta}{dz^2} + z^{1+n}\left[(1+2n)-(2+2n)z\right]\frac{d\eta}{dz}$$
$$- z^{1+n}(n^2+n-1+\nu)\eta - z^n(1-n^2)\eta = -Cz^3(1-z).$$

Die Grenzen für die unabhängige Veränderliche z sind 1 und 0; für eine Scheibe gemäss Abb. 1 ist $1 > z > 0$.

Es werde hier n so gewählt, dass das zweite η-Glied verschwindet, also $n = \pm 1$. Wird die Wurzel $n = 1$ benutzt, entsteht nach Kürzung mit z^2 die Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2\eta}{dz^2} + (3-4z)\frac{d\eta}{dz} - (1+\nu)\eta = -Cz(1-z) \qquad (3a)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\eta = \eta_0 + \eta_r,$$

wo η_0 irgend eine z-Funktion, die (3a) befriedigt, und η_r die Lösung der reduzierten Gleichung ist. Die Struktur der Gl. (3a) veranlasst, den Ansatz

$$\eta_0 = C(a + bz + cz^2)$$

zu versuchen. Man findet

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{3(3+\nu)}{(1+\nu)(5+\nu)(11+\nu)}, \quad b = \frac{3+\nu}{(5+\nu)(11+\nu)}, \quad c = -\frac{1}{11+\nu} \\ \text{und also} \quad \xi_0 &= K\left(\frac{y_0}{k}\right)^3(az + bz^2 + cz^3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{I}$$

Auf x als unabhängige Veränderliche zurückgeführt ist dieses partikuläre Integral mit dem schon von Fischer und Honegger angegebenen identisch.

Die reduzierte Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2\eta}{dz^2} + (3-4z)\frac{d\eta}{dz} - (1+\nu)\eta = 0 \quad . \qquad (3b)$$

ist eine Gauss'sche Differentialgleichung, die Lösung also unter den hypergeometrischen Reihen zu suchen.[7]) Das dritte Element ist $\gamma = 3$, die übrigen Parameter gehen aus $\alpha + \beta + 1 = 4$ und $\alpha\beta = 1 + \nu$ hervor. Mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1{,}5 + \sqrt{1{,}25 - \nu} \\ \beta &= 1{,}5 - \sqrt{1{,}25 - \nu} \\ \gamma &= 3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sind nicht-identische Lösungen

$$\eta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

und $\eta_2 = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$,

somit nach Einführung der Substitution (2), die Lösung der reduzierten Gleichung

$$\xi_r = Az\,F(\alpha,\beta,\gamma,z) + \frac{B}{z}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z) \qquad \text{II}$$

wo A und B die Integrationskonstanten sind.

Wenn in einer hypergeometrischen Reihe die Bedingung $\gamma > \beta > 0$ erfüllt ist, lässt sich ihre Summe durch ein bestimmtes Integral

$$F = H\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha}\,du$$

ausdrücken[7]); der Faktor H ist nur von den Parametern abhängig. Beide Glieder der Gl. II genügen dieser Bedingung und mit den Bezeichnungen

$$J_1 = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-\alpha}\,du \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo das Argument $= z$ ist, und

$$J_2 = \int_0^1 u^{-\beta}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\left[1-u(1-z)\right]^{\alpha-1}du \quad . \quad (6)$$

mit dem Argument $(1-z)$, kann die vollständige Lösung der Gl. (1) in geschlossener Form, mit z als unabhängige Veränderliche,

$$\xi = Az\,J_1 + \frac{B}{z}J_2 + \xi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

geschrieben werden. Hingegen ist es wohl nur ausnahmsweise möglich, den Zahlenwert von ξ *genau* zu berechnen.

Diese Lösung lässt sich auch mit Anwendung der Wurzel $n = -1$ ableiten.

[1]) Siehe Literaturverzeichnis auf Seite 53.

Zahlentafel 1
(für $\nu = 0.3$)

$z =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
J_1	1,1030	1,1551	1,2148	1,2849	1,3693	1,4743	1,6103	1,7982	2,0886	2,6056	∞
$\frac{dJ_1}{dz}$	0,4780	0,5485	0,6399	0,7615	0,9283	1,1710	1,5495	2,2091	3,6020	8,0410	∞
J_2	1,4286	1,5439	1,6764	1,8237	1,9840	2,1557	2,3378	2,5296	2,7305	2,9392	3,1516
$\frac{dJ_2}{dz}$	1,0	1,2464	1,4089	1,5439	1,6635	1,7720	1,8707	1,9656	2,0536	2,1362	2,2061

Zwischen den Spannungen und der Dehnung ξ bestehen die Beziehungen

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\xi}{x} + \nu\frac{d}{dx}\right)$$

und

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\xi}{x} + \frac{d\xi}{dx}\right)$$

Werden in Gl. III die Konstanten A und B durch

$$A = C_1 \frac{y_0}{k}\frac{1-\nu^2}{E} \quad \text{und} \quad B = C_2 \frac{k}{y_0}\frac{1-\nu^2}{E}$$

ersetzt, wo nun C_1 und C_2 aus vorgeschriebenen Randspannungen, oder Dehnungen, zu ermittelnde Integrationskonstanten sind, nehmen die Spannungsgleichungen beispielsweise folgende Form an:

$$\sigma_t = C_1\left[(1+\nu)J_1 + \nu z\frac{dJ_1}{dz}\right] + \frac{C_2}{x^2}\left[(1-\nu)J_2 + \nu z\frac{dJ_2}{dz}\right] + \\ + \mu\omega^2\left(\frac{y_0}{k}\right)^2\left[(1+\nu)a + (1+2\nu)bz + (1+3\nu)cz^2\right] \quad (7)$$

$$\sigma_r = C_1\left[(1+\nu)J_1 + z\frac{dJ_1}{dz}\right] - \frac{C_2}{x^2}\left[(1-\nu)J_2 - z\frac{dJ_2}{dz}\right] + \\ + \mu\omega^2\left(\frac{y_0}{k}\right)^2\left[(1+\nu)a + (2+\nu)bz + (3+\nu)cz^2\right] \quad (8)$$

Die Ableitungen von J_1 und J_2 sind

$$\frac{dJ_1}{dz} = \alpha\int_0^1 u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-uz)^{-(\alpha+1)}\,du \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{dJ_2}{dz} = (\alpha-1)\int_0^1 u^{1-\beta}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\left[1-u(1-z)\right]^{\alpha-2}du \quad (10)$$

Die Klammerausdrücke in (7) und (8) sind nur von z und ν abhängig. Um die Anwendung der Gleichungen für praktische Zwecke zu vereinfachen, wird man für diese Grössen Interpolationstafeln oder -kurven berechnen.

Die Zuverlässigkeit wird davon abhängen, mit welcher Genauigkeit die Zahlenwerte der Integrale bestimmt werden. Es schien somit der Mühe wert, zu untersuchen, ob die Auswertung derselben mit einer der geschlossenen Form einigermassen entsprechenden Schärfe ohne zu umständliche Rechnungen sich durchführen lässt. Bei der Berechnung der Zahlentafel 1 ist durchweg nur ein Rechenschieber mit Potenzskala von der doppelten Schieberlänge benutzt worden. Aus Gl. (4) erhält man für $\nu = 0{,}3$ mit leichter Abrundung $\alpha = 2{,}475$ und $\beta = 0{,}525$. Der betreffende Integrand wurde mit kleinen u-Intervallen berechnet und der Integralwert mit Hilfe der Simpson'schen Regel ermittelt. An einer Grenze, wo der Integrand unendlich gross wird, wurde ein Restglied für $\Delta u = 0{,}01$ näherungsweise bestimmt. Für $z = 0$ und $z = 1$ können die Integralwerte angegeben werden.[8]) Mit $\gamma = 3 = \alpha + \beta$, welcher Sonderfall nach Gl. (4) hier vorliegt, erhält man die Zahlentafel 2. Aus $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}$ ergibt sich in diesem Falle $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = (\alpha-1)(\alpha-2)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = (1-\nu)\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$. Die Auswertung liefert die Werte der Zahlentafel 1.

Die Zahlenwerte der Ableitungen $\frac{dJ_1}{dz}$ und $\frac{dJ_2}{dz}$ in Tafel 1 sind die berechneten, mit Abrundung in der vierten Stelle. Mit Hilfe der Tafel konnte nach einigem Probieren eine (hier weggelassene, weil etwas umfangreiche) Interpolationstafel für Intervalle $\Delta z = 0{,}005$ aufgestellt werden, und dabei wurden die in der Tafel aufgenommenen, von den berechneten etwas abweichenden J_1- und J_2-Werte festgestellt. Diese Ausgleichung ist ja nicht einwandfrei, denn

Zahlentafel 2

	$z = 0$	$z = 1$
J_1	$\frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$	$\Gamma(0) = \infty$
$\frac{dJ_1}{dz}$	$\frac{1+\nu}{6}\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$	$\alpha\beta\,\Gamma(-1) = \infty$
J_2	$\frac{1}{1-\nu}$	$\frac{1}{1-\nu}\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$
$\frac{dJ_2}{dz}$	1	$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$

auch die Werte der Ableitungen sind mit Fehlern behaftet, wie zu erwarten ist und auch ersichtlich wird, wenn man fortlaufend die Differenzen bildet. Nach den folgenden Beispielen zu beurteilen, dürfte aber die Tafel für praktische Zwecke hinreichend genau sein.

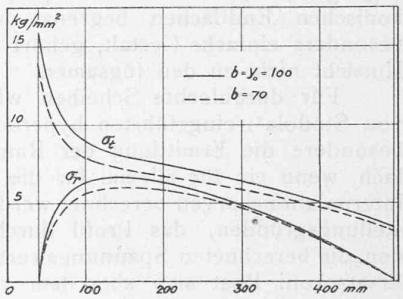

Abb. 2.

Die Lösung für die Scheibe gleicher Dicke liesse sich als Spezialfall obiger Ableitung beispielsweise dadurch nachweisen, dass die y-Glieder in Gl. (1) mit einem Koeffizienten q belegt werden. Dieser Koeffizient erscheint dann teils in den Parametern α und β, teils in a, b und c im partikularen Integral ξ_0. Für $q = 1$ erhält man die oben abgeleitete Lösung; für $q = 0$ bleiben von der η_1-Reihe nur das erste, von der η_2-Reihe die zwei ersten Glieder übrig, ferner wird $b = 0$ und $c = -\frac{1}{8}$. Das a Glied in ξ_0 lässt sich nach Einführung der Integrationskonstanten mit dem ersten Gliede in ξ_r einverleiben und die Lösung wird $\xi = k_1 x + \frac{k_2}{x} - \frac{K}{8}x^3$, wo k_1 und k_2 Integrationskonstanten sind und $K = \frac{1-\nu^2}{E}\mu\omega^2$. — In Bezug auf die Verallgemeinerung der Aufgabe sei auf die Abhandlung von Fischer verwiesen.

Um von der Grössenordnung der bei Anwendung der Zahlentafel 1 zu erwartenden Fehler einen Begriff zu bekommen, wurden die Spannungen für den folgenden Fall ermittelt: $r = 40$, $R = 494$ und $y_0 = 100$ mm, Drehzahl $= 2970$, innen $\sigma_r = 0$ und aussen $\sigma_r = 0{,}15$ kg/mm². Die Spannungen sind für einige x-Werte und für je $b = 90$, 80 und 70 mm berechnet worden (Zahlentafel 3 und 4). Durch graphische Extrapolation konnte dann (Abb. 2) auf die Spannungskurven für $b = y_0 = 100$ geschlossen werden. Zum Vergleich wurden danach diese Spannungen mit Hilfe der genauen Formeln[6]) für die Scheibe gleicher Dicke bestimmt; die Uebereinstimmung kann, wie aus den Tafeln hervorgeht, als praktisch befriedigend bezeichnet werden.

Bei diesen Berechnungen wurden Logarithmen benutzt, um zu vermeiden, dass der Einfluss der in der Interpolationstafel enthaltenen Fehler durch neu hinzukommende getrübt werde.

Die Zahlentafel 5 bezieht sich auf eine Scheibe, für die Honegger (a. a. O., Abb. 7) Spannungskurven berechnet hat. Zwar können die Spannungen nicht aus diesen Kurven so genau abgelesen werden, wie es für einen Vergleich zu wünschen wäre, die Rechnung führte aber, wie es scheint, zu Zahlenwerten, die mit den von Honegger ermittelten sehr nahe übereinstimmen.

Einen zweiten Haltepunkt bietet der Vergleich zwischen einander entsprechenden Faktoren in Gl. III und in der ξ Lösung von Honegger, $\xi = \xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_1^*$. Für den Quotienten $\frac{J_1 z}{\xi_1}$ (der bei $z = 0$ und $z = 1$ unbestimmte

Zahlentafel 3
Radialspannung σ_r

$b =$	70	80	90	100 Extrapol.	100 Genau
$x = 60$	3,80	3,995	4,16	4,31	4.34
100	5,674	5,936	6,16	6,355	6,39
250	5,397	5,556	5,66	5,74	5,78
350	3,832	3,89	3,93	3,96	3,97
430	2,00	2,005	2,01	2,015	2,017

Zahlentafel 4
Tangentialspannung σ_t

$b =$	70	80	90	100 Extrapol.	100 Genau
$x = 40$	13,85	14,57	15,24	15,88	15,87
60	9,98	10,50	10,95	11,36	11,43
100	7,956	8,35	8,70	9,03	9,06
250	6,366	6,62	6,81	6,98	7,03
350	5.368	5,54	5,68	5,81	5,83
430	4,31	4,43	4.53	4,62	4,65
494	3,27	3,37	3,45	3,52	3,55

Form annimmt) ergibt sich im Gebiete $z = 0{,}1$ bis $z = 0{,}9$ eine Schwankung zwischen 1,1039 und 1,1124; für $\frac{J_2}{z\,\eta_1^*}$ (unbestimmt bei $z = 0$) sind im Gebiete $z = 0{,}1$ bis $z = 1$ die Grenzwerte 3,1511 und 3,1565. Auf das arithmetische Mittel bezogen, beträgt somit die maximale Abweichung 5 bezw. 1 pro mille. Angesichts der oben erwähnten „Berichtigung" von J_1 und J_2 und überhaupt der Methode für ihre Auswertung sind wohl diese Abweichungen als mässig zu bezeichnen; bei erneuter, genauerer Berechnung wären in erster Linie die J_1-Werte bei $z = 0{,}8$ und 0,9 nochmals zu prüfen.

Ueberhaupt dürften, nach dem Folgenden zu beurteilen, die nach der oben angedeuteten Methode errechneten Zahlenwerte der Integrale (Tafel 1) mit einer einseitigen Ungenauigkeit behaftet sein. Die Lösungen η_1 und η_2 müssten ja die Beziehung

$$\eta_1\,\eta_2' - \eta_2\,\eta_1' = C\,e^{-\int p\,dz}$$

befriedigen[7]), wo C eine Konstante und

$$p = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,z}{z\,(1 - z)}$$

ist. (Diese Beziehung wird bekanntlich bei ganzzahligem γ benutzt, um auch für η_2 eine Lösung mit z als Argument abzuleiten). Wäre die Zahlentafel 1 genau, müsste

$$z\,(1 - z)\left(J_1\,J_2' - \frac{2\,J_1\,J_2}{z} - J_1'\,J_2\right)$$

einen konstanten Wert zeigen. Bei $z = 0$ wird aber diese „Konstante" numerisch $= 3{,}1515$; für $z = 0{,}1$ bis 0,9 schwankt der Wert zwischen 3,1554 und 3,1605, mit Ausnahme von $z = 0{,}8$, wo 3,1686 herauskommt. — Das Gebiet um $z = 0{,}8$ herum erscheint also auch hier als verdächtig.

Für die volle Scheibe ist B (bezw. C_2) $= 0$, weil $\xi = 0$ für $x = 0$ ($z = 0$), das zweite Glied in den Gl. III, (7) und (8) scheidet somit aus. Honegger hat (a. a. O., Abb. 6a) eine der soeben behandelten ähnliche Scheibe ohne Bohrung und mit der Randspannung $\sigma_R = 15$ kg/mm² untersucht und dabei für einige Punkte auf den Spannungskurven den Zahlenwert besonders angegeben. Eine zum Vergleich vorgenommene Berechnung nach Gl. (7) und (8) lieferte folgende Werte (die eingeklammerten Zahlen sind die von Honegger gefundenen): bei $r = 0 : \sigma_t = \sigma_r = 15{,}28$ (15,32); bei $r = 400 : \sigma_t = 16{,}66$ (16,70), $\sigma_r = 16{,}71$; bei $r = 700 : \sigma_r = 14{,}80$; bei $r = 800 : \sigma_t = 15{,}69$.

Nebenbei möge noch eine Lösung der Gl. (3b) erwähnt erden, die ein bestimmtes Integral anderer Art enthält.

Zahlentafel 5
(Stahlscheibe: $r = 200$, $R = 800$, $B = 48$, $b = 12$, $n = 3000$)

$r =$	200	300	400	500	600	700	800
σ_r	0	6,94	8.53	8,19	6,67	4,08	0
σ_t	29,47	20,71	17,12	14,84	12,88	10 82	8,30

Wird statt z eine Veränderliche $\zeta = 1 - z$ eingeführt, geht die Gleichung in

$$(\zeta - \zeta^2)\,\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + (1 - 4\,\zeta)\,\frac{d\eta}{d\zeta} - (1 + \nu)\,\eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

über und gehört in dieser Form zur Gattung

$$(a_2 + b_2\,\zeta + c_2\,\zeta^2)\,\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + (a_1 + b_1\,\zeta)\,\frac{d\eta}{d\zeta} + a_0\,\eta = 0 \quad . \quad (a)$$

Untersucht man zur Lösung dieser Gleichung das bestimmte Integral[9])

$$\eta = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{R\,(u + \zeta)^m}{c_2\,u^2 - b_2\,u + a_2}\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

wo R, m und die Grenzen φ und ψ aus

$$ln\,R = \frac{1}{m}\int \frac{(m\,b_1 + 2a_0)\,u + m\,(m - 1)\,b_2 + m\,a_1}{c_2\,u^2 - b_2\,u + a_2}\,du \quad . \quad (c)$$

$$m\,(m - 1)\,c_2 + m\,b_1 + a_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

und

$$\left[R\,(u + \zeta)^{m-1}\right]_{u=\varphi} = \left[R\,(u + \zeta)^{m-1}\right]_{u=\psi} \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

zu bestimmen sind, liefert Gl. (d) die Wurzeln $m_1 = -\alpha$ und $m_2 = -\beta$, mit α und β gemäss Gl. (4). Der Wurzel m_2 entspricht als Lösung in z:

$$\eta_1^* = \int_0^{\infty} u^{\beta-1}\,(1 + u)^{-\alpha}\,(1 + u - z)^{-\beta}\,du \quad . \quad (5a)$$

Bei Auswertung bei z. B. $z = 0{,}9$, 0,5 und 0,1, wobei hauptsächlich mit dem Rechenschieber und graphisch gearbeitet wurde, ergaben sich mit J_1 fast übereinstimmende Zahlenwerte. Für $z = 0$ ist[8]) $[\eta_1^*]_0 = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = [J_1]_0$; für $z = 1 : [\eta_1^*]_1 = \Gamma(0) = [J_1]_1$. — Etwaige andere Lösungen dieser Art wurden nicht gesucht.

Literatur.

1) A. Stodola: „Die Dampfturbine und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen", V. D. I., 1903, S. 51.

2) Th Pöschl: „Ueber die Berechnung der Spannungen in rotierenden Scheiben mit veränderlicher Breite". Z. f. d. ges. T.-W., 1913, H. 5—6; Le calcul des tensions dans un disque tournant de section variable", Revue de Mécanique, mai 1913, p. 449.

3) „Rotating discs of conical profile", Engineering 1923, I, S. 1 und 115 (vergl. auch S. 407 und 630).

4) A. Fischer: „Beitrag zur Berechnung der Dampfturbinenscheibenräder mit veränderlicher Dicke", Z. d. Oesterr. Arch.- und Ing.-Vereins, Jahrg. LXXIV, S. 47 und 71.

5) E. Honegger: „Festigkeitsberechnung von rotierenden konischen Scheiben", Z. f. angw. Math. u. Mech., 1927, S. 120 und 247.

6) A. Stodola: „Dampf- und Gasturbinen".

7) Riemann-Weber: „Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik"; A. R. Forsyth: „Theory of differential equations".

8) Siehe z. B.: D. Bierens de Haan: „Nouvelles Tables d'Intégrales définies"; Jahnke und Emde: „Funktionentafeln".

9) J. Dienger: „Differential- und Integralrechnung".

Die Flussbäder Aarau und Rheinfelden aus Eisenbeton-Fertigkonstruktionen.

Von Ing. M. SCHNYDER, Burgdorf.

Die grosse deutsche Literatur überBadeanstalten, besonders die Veröffentlichungen der „Deutschen Gesellschaft für Volksbäder", haben wertvolle Grundlagen für die Projektierung von Bädern gegeben. So können heute die Forderungen, die in rein technischer Beziehung an Strand- oder offene Bassinbäder gestellt werden, als bekannt vorausgesetzt werden; neuer dürfte jedoch die Aufgabe sein, Eisenbetonbassins in die fliessenden Gewässer selbst zu stellen. Als ich bei den hier beschriebenen Werken vor dieser Aufgabe stand, war ich mir wohl bewusst, dass