Näherungsweise Bestimmung von Knicklasten

Autor(en): **Everts, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **117/118 (1941)**

Heft 22

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-83563

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

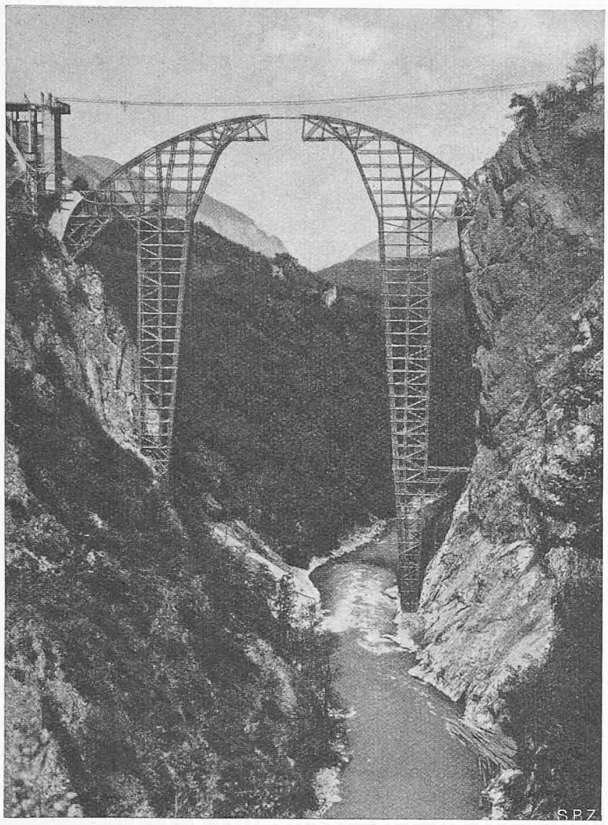

Abb. 3. Schliessen des Lehrgerüstes

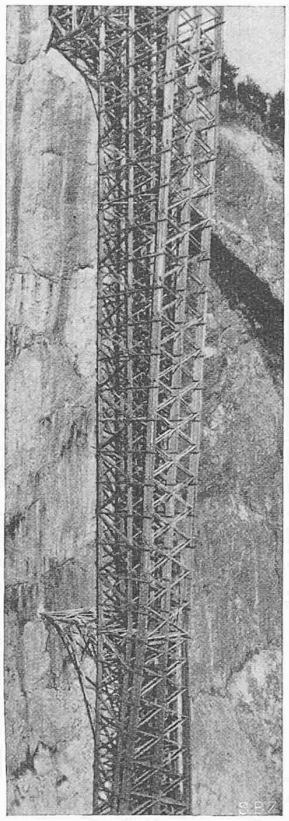

Abb. 4. Rechtsufriger Gerüstturm

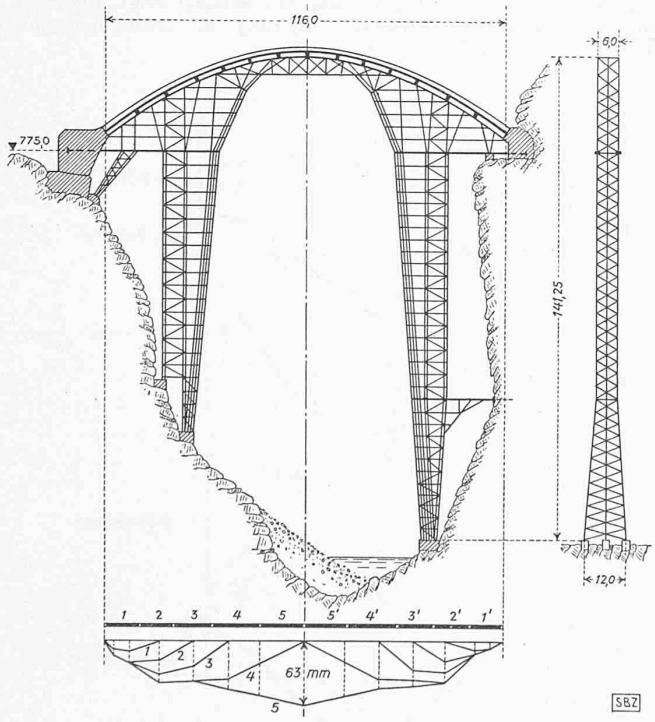

Abb. 2. Lehrgerüst 1 : 2000. Entwurf und Ausführung R. CORAY, Chur
Gemessene Einsenkungen unter der Last des ersten Gewölberinges

Ringe sehr vorteilhaft an den Kämpfern mit provisorischen Gelenken versehen werden. Es entstehen dadurch Zweigelenkbögen. Diese provisorischen Gelenke werden zusammen mit den Längsfugen nach dem Absenken des Gerüstes ausbetoniert, wodurch erst das beidseitig eingespannte Gewölbe hergestellt ist. Durch diese Massnahme wird erzielt, dass die Verkürzung des Bogens infolge Schwinden des Betons und Belastung durch sein Eigengewicht sich ohne wesentliche Spannungserhöhung auswirken kann, und dass die zusätzliche Druckspannung im ersten Ring, hervorgerufen durch die ringweise Gewölbeerstellung, wieder daraus zum Verschwinden gebracht wird, was namentlich bei Kastengewölben von grosser Spannweite von Bedeutung ist und dadurch ohne die hydraulischen Pressen erreicht werden kann. Es sei damit angedeutet, wie mit Fächer- und Turmgerüsten bei der ringweisen Erstellung von Eisenbetonbögen eine qualitative Steigerung und wohl auch Oekonomie erzielt werden kann. (Entwurf und Ausführung des Lehrgerüsts stammen vom Berichterstatter. Red.)

Die Tarabrücke wurde auf Grund eines öffentlichen Submissionswettbewerbes der auftraggebenden Behörde von der jugoslavischen Privatindustrie projektiert und ausgeführt.

Näherungsweise Bestimmung von Knicklasten

Von Dipl. Ing. G. EVERTS, Thun

Die im Folgenden angegebene Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Knicklast von Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment lehnt sich in ihren Grundzügen eng an das bekannte Verfahren von Vianello an. Durch Verwendung des Mittelwertsatzes von Barta (Ing. Archiv 1937, Bd. 8, Seite 35) wird jedoch eine Abschätzung der Fehlabweichung des gefundenen Näherungswertes von der exakten Lösung ermöglicht.

Theorie:

Die Differentialgleichung der geraden Stabaxe lautet:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2} = y_x'' = -\frac{M_x}{T_x J_x} = -\frac{P y_x}{T_x J_x} \quad . \quad . \quad (1)$$

Dabei kann der Einfluss der Querkraft $\frac{d Q}{d x} \frac{1}{G F'}$ bekanntlich vernachlässigt werden.

Mit T wird der Engesser'sche Knickmodul bezeichnet.

$$T = E_1 \frac{J_1}{J} + E_2 \frac{J_2}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zum Gleichgewicht ist erforderlich:

$$T_x J_x \frac{y_x''}{y_x} = -P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung (3) ergibt nur bei der exakten Biegelinie an jeder Stelle x immer den gleichen Wert P. Bei mehr oder weniger willkürlich angenommenen Biegelinien schwankt P bekanntlich zwischen zwei Grenzen. Nach dem Mittelwertsatz von Barta liegt nun die exakte Knicklast P_K, die bei Verwendung der genauen Biegelinie gefunden würde, stets zwischen den Grenzen

$$\left(-T_x J_x \frac{y_x''}{y_x}\right)_{\min} \leqq P_K \leqq \left(-T_x J_x \frac{y_x''}{y_x}\right)_{\max} \quad . \quad (4)$$

Die Eulersche Knickgleichung wird dabei wie üblich geschrieben:

$$P_K = \frac{\pi^2 T_c J_c}{l_K^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wobei J_c ein beliebiges, jedoch für die ganze Stablänge l konstant angenommenes Trägheitsmoment, T_c den zu J_c gehörigen Knickmodul und l_K die für J_c gültige Knicklänge darstellt. Da die Differentialgleichung (1) sowohl linear als auch homogen ist, spielt die Wahl von J_c keine Rolle.

Die Knicklänge l_K ist im allgemeinen nicht schon zum Voraus bekannt. Gleichung (5) wird daher geschrieben:

$$P_K = k \frac{\pi^2 T_c J_c}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wobei $k l^2_K = l^2$ ist.

Für J_c nimmt man meistens am besten ein mittleres Trägheitsmoment an, da andernfalls für die graphische Konstruktion ungünstige Masstabverhältnisse entstehen. Zur Bestimmung des unbekannten Koeffizienten k geht man nun wie folgt vor:

Man nimmt eine möglichst zweckmässige und einfache Biegelinie y_0 an (Kreisbogen, Parabel oder Sinuslinie, Abb. 1). Würde diese angenommene Biegelinie y_0 der exakten Biegelinie entsprechen, so wäre nach Gleichung (1)

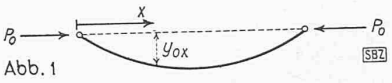

Abb. 1

$$P_0\, y_{0x} = P_K\, y_{0x} = -\, T_x\, J_x\, y''_{0x}$$

Meist wird sie jedoch von der tatsächlichen Biegelinie abweichen und mittels des Verfahrens von Vianello einer genaueren Biegelinie y_1 angenähert werden müssen. Die mit Hilfe von y_0 gefundene Knicklast P_0 weicht dadurch auch von der endgültigen Last P_K ab.

$$P_0\, y_{0x} \longrightarrow -\, T_x\, J_x\, y''_{1x}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (6) erhält man:

$$P_0\, y_{0x} = k_0\, \frac{\pi^2\, T_c\, J_c}{l^2}\, y_{0x} \longrightarrow -\, T_x\, J_x\, y_1''{}_x \quad . \quad . \quad (7)$$

Wird für die beliebige Last P in Gleichung (3) die angenäherte Knicklast P_0 eingesetzt, so ist bei Kombination mit Gleichung (6):

$$-\, T_x\, J_x\, \frac{y''_{1x}}{y_{1x}} = k_0\, \frac{\pi^2\, T_c\, J_c}{l^2}$$

Mit Gleichung (4) zusammen ergibt sich daraus:

$$\left(k_0\, \frac{\pi^2\, T_c\, J_c}{l^2}\right)_{\min} \leqq P_K \leqq \left(k_0\, \frac{\pi^2\, T_c\, J_c}{l^2}\right)_{\max}$$

$$(k_0)_{\min} \leqq k \leqq (k_0)_{\max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ferner:

$$k_0 = -\, \frac{J_x\, T_x}{J_c\, T_c}\, \frac{y''_{1x}}{y_{1x}}\, \frac{l^2}{\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Gleichung (7) und (9) ergeben:

$$k_0 = k_0\, \frac{y_{0x}}{y_{1x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Für den Fall, dass die angenommene Biegelinie y_0 gleich der Biegelinie y_1 und damit auch gleich der endgültigen Biegelinie ist, wird $k_0 = k$ und damit auch $P_0 = P_K$. Hiermit sind die für den allgemeinen Knickfall gültigen Gleichungen gegeben.

Anwendung:

Die Ordinaten y der Biegelinien werden immer von der Wirkungslinie der Knicklast P aus gemessen. Diese Wirkungslinie ist dabei festgelegt durch die Biegemomentennullpunkte, bzw. Wendepunkte des Stabes. (Bei gelenkig gelagertem Stabende geht die Wirkungslinie somit stets durch das Gelenk.)

Am nachfolgenden Beispiel eines beidseitig eingespannten Stabes im elastischen Knickbereich, $T_x = E$, soll das angegebene Verfahren kurz erläutert werden:

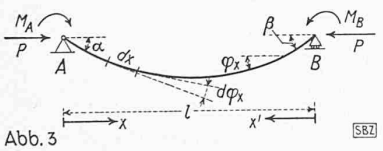

Abb. 3

Zuerst wird der Trägheitsmomenten - Verlauf des Stabes bestimmt und J_c festgelegt (s. Abb. 2, I). Dann wird eine für den Stab mögliche Biegelinie y_0 angenommen. Die Wirkungslinie der Knicklast P muss durch die Momentennullpunkte (Wendepunkte) der Biegelinie gehen (Abb. 2, II). Unter Berücksichtigung der Gleichung (7) wird nun mittels der Biegelinie y_0 die reduzierte Momentenfläche gezeichnet. Bei eingespannten Stabenden muss die Nullinie dieser Momentenfläche neu konstruiert werden. Für den Fall vollständiger Einspannung ergibt sie sich aus den Bedingungen der Abb. 3.

a) $\alpha = 0$, b) $\beta = 0$.

Aus diesen zwei Bedingungen ergibt sich

c) $\int_0^l d\varphi = 0$

Oder mit andern Worten:

a) Auf Grund der Arbeitsgleichung ist

$$\alpha = \int_0^l \frac{M\, M'\, dx}{T_x\, J_x} = \frac{1}{l\, T_c\, J_c} \int_0^l M_{\text{red}}\, x'\, dx = 0\,;\quad M_{\text{red}} = M\, \frac{T_c\, J_c}{T_x\, J_x}$$

Daraus: $\int_0^l M_{\text{red}}\, x'\, dx = 0$ wobei $\int_0^l M_{\text{red}}\, dx = F_{\text{red}}$

Das heisst: Das statische Moment von F_{red} um das Auflager B muss Null sein.

b) $$\beta = \int_0^l \frac{M\, M'\, dx}{T_x\, J_x} = \frac{1}{l\, T_c\, J_c} \int_0^l M_{\text{red}}\, x\, dx = 0$$

Daraus: $\int_0^l M_{\text{red}}\, x\, dx = 0$

Das heisst: Das statische Moment von F_{red} um das Auflager A muss Null sein.

c) $$\int_0^l d\varphi = 0 = \int_0^l \frac{M\, dx}{T_x\, J_x} = \frac{1}{T_c\, J_c} \int_0^l M_{\text{red}}\, dx = \frac{1}{T_c\, J_c}\, F_{\text{red}} = 0$$

Daraus: $F_{\text{red}} = 0$

Infolge der Umlagerung der Nullinie der reduzierten Momentenfläche verschieben sich auch die Wendepunkte der angenommenen Biegelinie y_0, deren Verlauf daher nun auch abgeändert werden muss (siehe Abb. 2, III und II). Mit der reduzierten Momentenfläche als Belastung zeichnet man nun die neue, exaktere Biegelinie y_1. Als Kontrolle, dass die Bedingungen a), b) und c) auch tatsächlich erfüllt worden sind, müssen die Tangenten der Einspannstellen A und B zusammenfallen (Abbildung 2, V).

Als Belastungskräfte werden im Kräftepolygon die um Δl von einander entfernten Ordinaten 1, 2, 3, 4, ... der reduzierten Momentenfläche aufgetragen. Der Polabstand H ergäbe sich dabei zu $H = \dfrac{l^2}{k_0\, \pi^2\, \Delta l}$

In der graphischen Konstruktion wird jedoch der um k_0 zu grosse Wert $H = \dfrac{l^2}{\pi^2\, \Delta l}$ verwendet.

Dadurch wird auch die Biegelinie y_1 um k_0 zu gross. Nach Gleichung (10) ist dann

$$k_0 = k_0\, \frac{y_{0x}}{k\, y_{1x}} \quad \text{und somit} \quad k_0 = \frac{y_{0x}}{y_{1x}}$$

An jeder Stelle x wird der k_0-Wert gerechnet, indem das Verhältnis der abgeänderten y_0-Biegelinie zur y_1-Biegelinie gebildet wird. Nach dem Mittelwertsatz von Barta, Gleichung (8), muss dann $(k_0)_{\min} < k < (k_0)_{\max}$ sein (Abb. 2, VI).

Um eine bessere Annäherung der k-Werte zu erreichen, wird das ganze Verfahren, diesmal jedoch von der genaueren Biegelinie y_1 ausgehend, wiederholt (Abb. 2, VII). Eine dritte Näherung ist wohl kaum nötig, da, wie das Beispiel zeigt, die Streuung der k-Werte der zweiten Näherung, k_1, schon innerhalb einer Toleranz von $\pm\, 5\,\%$ liegt.

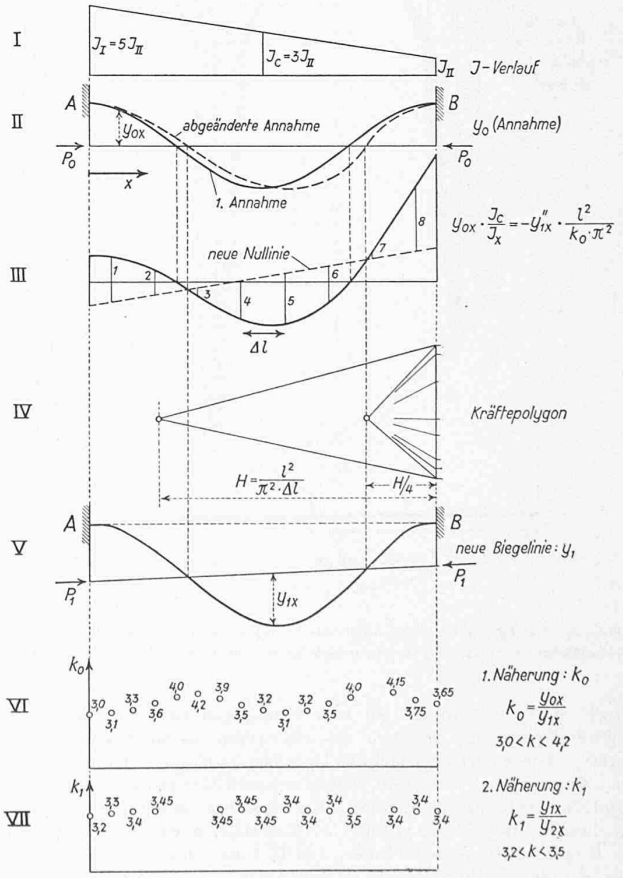

Abb. 2 Beidseitig eingespannter Stab