Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 68 (1950)

Heft: 20

Artikel: Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies

Autor: Favre, Henry / Gilg, Bernhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58015

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

68. Jahrgang Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 20

Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies

DK 620.171.5

Suite et fin de la page 257

Par HENRY FAVRE, Professeur à l'E. P. F. et BERNHARD GILG, Assistant à l'E. P. F.

§ 4. Application à une plaque carrée, reposant en trois points et supportant une force appliquée au centre.

Comme application de la méthode décrite au § 3, nous avons mesuré les moments dans une plaque carrée, de 190 mm de côté, reposant en trois points G_1, G_2, G_3 et supportant au centre une force $P = 20{,}29$ kg[16]), conformément à la figure 11. Cette plaque était formée d'une couche de *verre* de 2,13 à 2,19 mm d'épaisseur et d'une couche d'*allite* de 5,65 à 5,93 mm d'épaisseur[17]). L'adhérence de ces deux couches a été obtenue en utilisant une colle de résine artificielle. La délicate opération du collage a été exécutée par l'Institut de Physique technique de l'E. P. F., comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

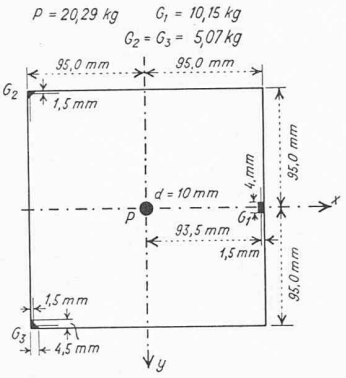


Fig. 11

Pour déterminer les coefficients A, B, C des équations (12) et (13), nous avons utilisé comme éprouvette une poutre simple de 188,0 mm de portée et de 20,0 mm de largeur, formée de deux couches aussi identiques que possible à celles de la plaque carrée[18]). Cette poutre simple a été chargée symétriquement par deux forces P égales, uniformément réparties sur la largeur (fig. 12)[19]).

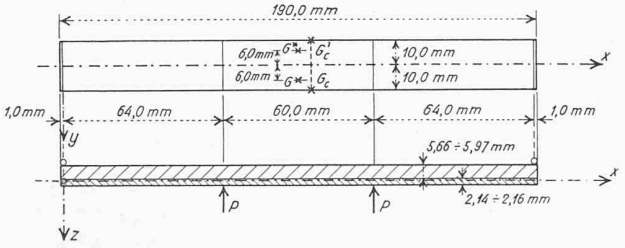


Fig. 12

Dans une telle éprouvette, les moments principaux avaient approximativement pour valeurs, dans la zone comprise entre les forces P:

$$\begin{cases} M_1 = M_x = \dfrac{P \,.\, 64{,}0 \text{ mm}}{20{,}0 \text{ mm}} = 3{,}2\, P, \\ M_2 = M_y = 0; \end{cases}$$

d'où, en introduisant ces valeurs dans les équations (12) et (13):

$$(18) \qquad A = \frac{\delta_1}{3{,}2\, P}, \quad B = \frac{\delta_2}{3{,}2\, P}, \quad C = \frac{\delta_3}{3{,}2\, P}.$$

Connaissant la grandeur commune des forces P, qui a varié de 0,729 kg à 1,638 kg et ayant mesuré les valeurs correspondantes de δ_1, δ_2 et δ_3 aux points symétriques G et G^* de l'éprouvette, nous avons déduit les valeurs approchées suivantes pour les coefficients:

$$(19) \qquad \begin{cases} A = -\,0{,}3233\, \lambda \text{ kg}^{-1}, \\ B = -\,0{,}4140\, \lambda \text{ kg}^{-1}, \end{cases} \qquad C = +\,0{,}0907\, \lambda \text{ kg}^{-1}.$$

$\lambda = 0{,}5461\, \mu$ (longueur d'onde de la lumière utilisée)

Ces valeurs étaient cependant trop inexactes pour être appliquées à l'étude de la plaque carrée, car la pièce fléchie utilisée comme éprouvette ayant un profil dont la largeur était beaucoup plus grande que la hauteur, il fallait s'attendre que M_1 ne soit pas constant dans la largeur et que M_2 n'y soit pas rigoureusement nul[20]). Des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3, faites en 9 points le long du profil $G_c G'_c$, confirmèrent ce point de vue. Elles sont résumées dans la figure 13.

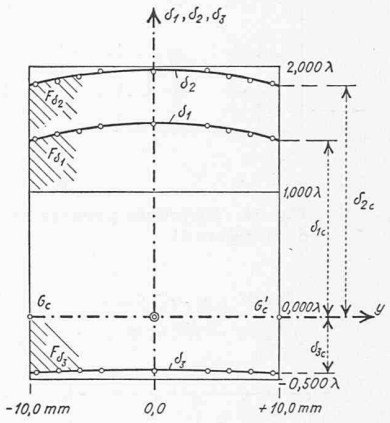


Fig. 13

Pour tirer de ces dernières mesures des valeurs plus exactes de A, B, C, nous avons procédé comme suit. Soient F_{δ_1}, F_{δ_2} et F_{δ_3} les aires des surfaces définies par les courbes représentant respectivement δ_1, δ_2 et δ_3. On a, en appliquant les relations (13):

$$F_{\delta_1} = \int \delta_1\, dy = \int A\, M_1\, dy + \int B\, M_2\, dy = A \,.\, M_{1\,\text{tot}} + B \,.\, M_{2\,\text{tot}},$$

$$(20) \qquad \underline{F_{\delta_1} = A \,.\, M_{1\,\text{tot}} + B \,.\, M_{2\,\text{tot}}},$$

et de même:

$$(21) \qquad \underline{F_{\delta_2} = B \,.\, M_{1\,\text{tot}} + A \,.\, M_{2\,\text{tot}}},$$

$M_{1\,\text{tot}}$ et $M_{2\,\text{tot}}$ désignant les intégrales $\int M_1\, dy$ et $\int M_2\, dy$ relatives à la largeur totale du profil.

D'autre part, en désignant respectivement par $\delta_{1\,c}$, $\delta_{2\,c}$ et $\delta_{3\,c}$ les variations de marche au point G_c (ou G'_c) situé sur *le contour* de l'éprouvette et par $M_{1\,c}$ ($= M_x$) et $M_{2\,c}$ ($= M_y$) les moments principaux en ces points, on a, en remarquant encore que $M_{2\,c} = 0$:

$$\delta_{1\,c} = A \,.\, M_{1\,c}, \quad \delta_{2\,c} = B \,.\, M_{1\,c},$$

d'où:

$$(22) \qquad \frac{A}{B} = \frac{\delta_{1\,c}}{\delta_{2\,c}} = k.$$

On tire des relations (20), (21) et (22), en éliminant $M_{2\,\text{tot}}$ qui est inconnu:

$$(23) \qquad \begin{cases} \underline{A = \dfrac{k\, F_{\delta_1} - F_{\delta_2}}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right) M_{1\,\text{tot}}}}, \quad \underline{B = \dfrac{F_{\delta_1} - \dfrac{1}{k}\, F_{\delta_2}}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right) M_{1\,\text{tot}}}}, \\ \text{d'où } \underline{C = A - B = \dfrac{(k-1)\, F_{\delta_1} + \left(\dfrac{1}{k} - 1\right) F_{\delta_2}}{\left(k - \dfrac{1}{k}\right) M_{1\,\text{tot}}}}. \end{cases}$$

En introduisant dans ces trois formules les valeurs connues de $M_{1\,\text{tot}} = 3{,}2\, P$ et les valeurs mesurées de $k = \dfrac{\delta_{1\,c}}{\delta_{2\,c}}$, F_{δ_1} et F_{δ_2}[21]), nous avons obtenu pour les coefficients A, B, C les valeurs beaucoup plus exactes indiquées dans le tableau suivant:

[16]) La surface de répartition de cette force était un cercle de 10 mm de diamètre.

[17]) *L'Allite CR 39* que nous avons utilisée est une résine artificielle de très bonne qualité, livrée en lames à faces planes parallèles et polies par l'*Homalite Company*, à Wilmington (Delaware, USA). L'excellente qualité des faces permet de faire de bonnes mesures à l'interféromètre. Ces lames peuvent également être utilisées en photoélasticité bidimensionnelle, comme le fait le Laboratoire du United States Bureau of Reclamation, à Denver (Colorado), qui a eu l'amabilité de nous rendre attentifs aux qualités exceptionnelles de cette matière.

[18]) L'épaisseur du verre de l'éprouvette était de 2,14 à 2,16 mm, celle de l'allite, de 5,66 à 5,97 mm.

[19]) Les réactions des appuis étaient également uniformément réparties sur la largeur.

[20]) Ces anomalies proviennent de la dilatation latérale des différentes couches élémentaires.

[21]) Pour obtenir la plus grande précision possible, nous avons amélioré, par la méthode des moindres carrés, les valeurs mesurées de $\delta_{1\,c}$, $\delta_{2\,c}$, δ_{3c} ainsi que les valeurs de F_{δ_1}, F_{δ_2}, F_{δ_3} (obtenues en planimétrant les diagrammes de δ_1, δ_2, δ_3), en s'appuyant sur les deux relations évidentes

$$\delta_{1c} - \delta_{2c} - \delta_{3c} = 0 \text{ et } F_{\delta_1} - F_{\delta_2} - F_{\delta_3} = 0.$$

	A (λ kg^{-1})	B (λ kg^{-1})	C (λ kg^{-1})
Pour $P = 1{,}191$ kg:	$-0{,}2816$	$-0{,}3678$	$+0{,}0862$
Pour $P = 1{,}647$ kg:	$-0{,}2719$	$-0{,}3569$	$+0{,}0850$
Moyennes arithm.:	$-0{,}2768$	$-0{,}3624$	$+0{,}0856$

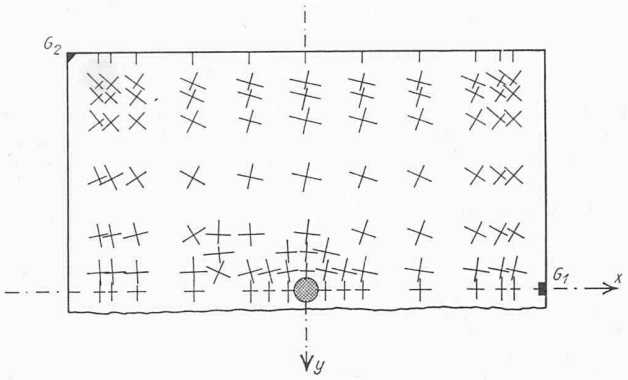


Fig. 14. Directions principales de la plaque fléchie de la figure 11

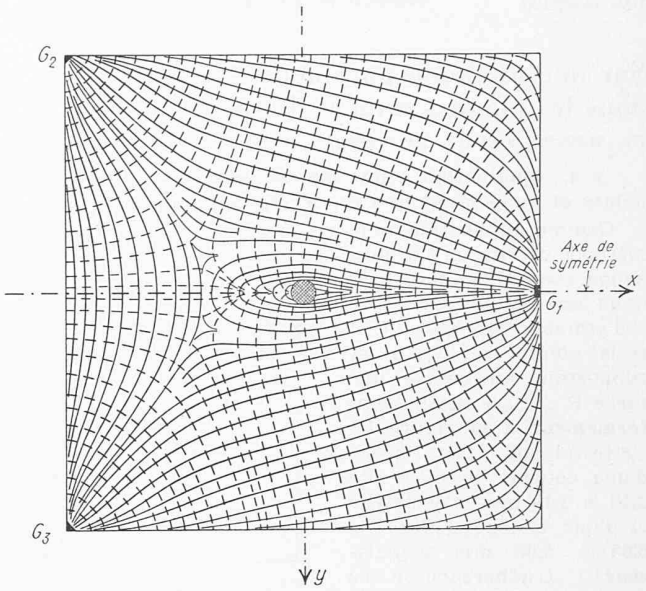


Fig. 15. Trajectoires des moments principaux de la plaque fléchie de la figure 11

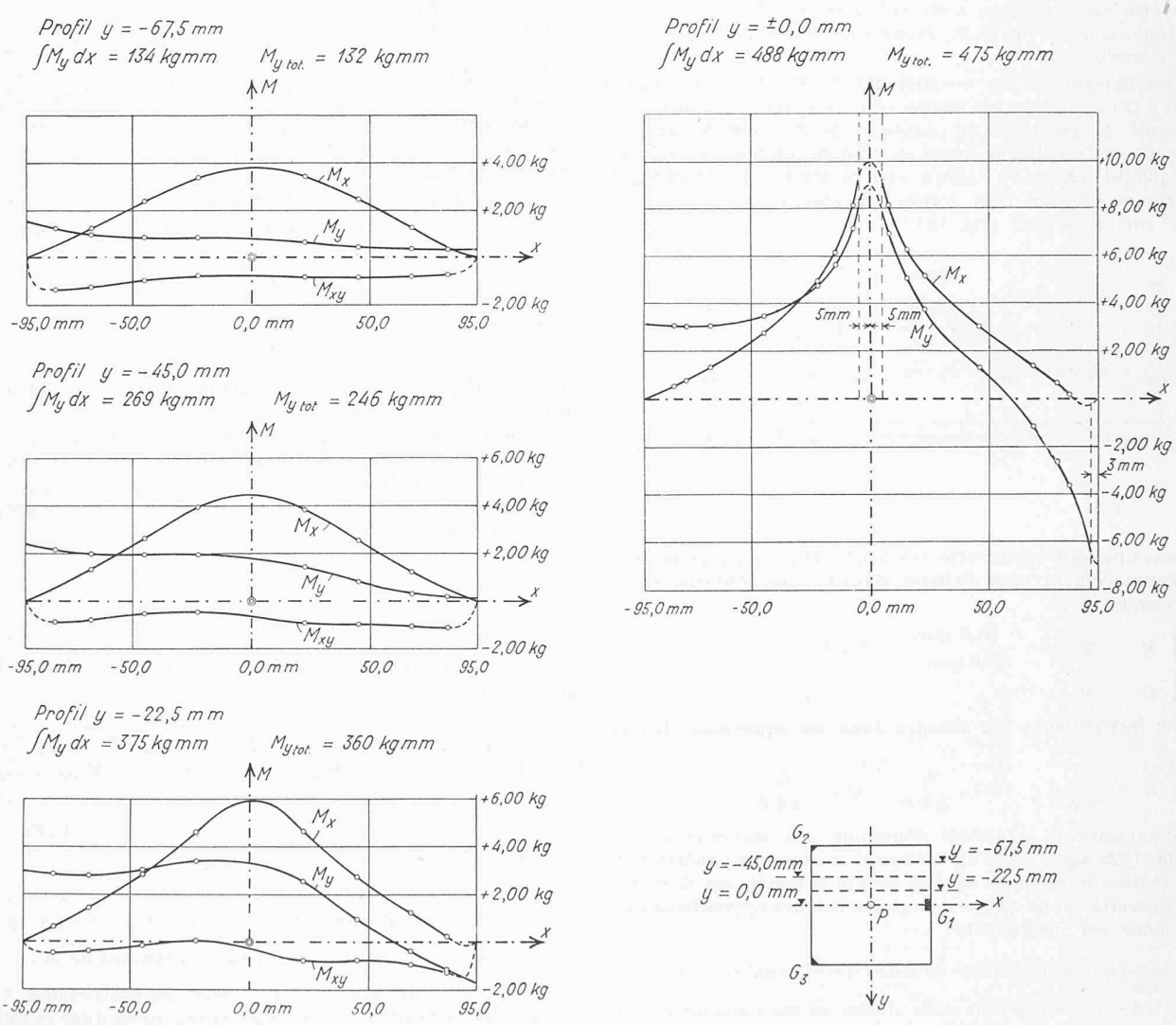
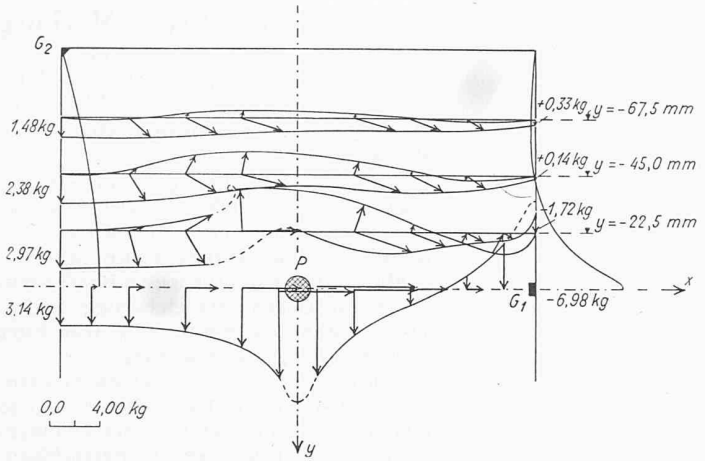


Fig. 18. Diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe x

Les mesures de α et de δ_3 dans la *plaque carrée* de la figure 11 n'ont donné lieu à aucune difficulté particulière. Elles ont été effectuées en 114 points, disposés symétriquement par rapport à l'axe x. On a ensuite pris les moyennes arithmétiques des valeurs correspondant aux points symétriques.

Les mesures des variations absolues de marche δ_1, δ_2 ont été plus délicates à exécuter à cause de l'inclinaison de la surface élastique produite par la déformation de la plaque. Cette inclinaison était en effet une cause d'erreurs pour les mesures de δ_1 et δ_2. Ces erreurs, négligeables dans la partie centrale, où la pente était faible, devenaient sensibles en de-



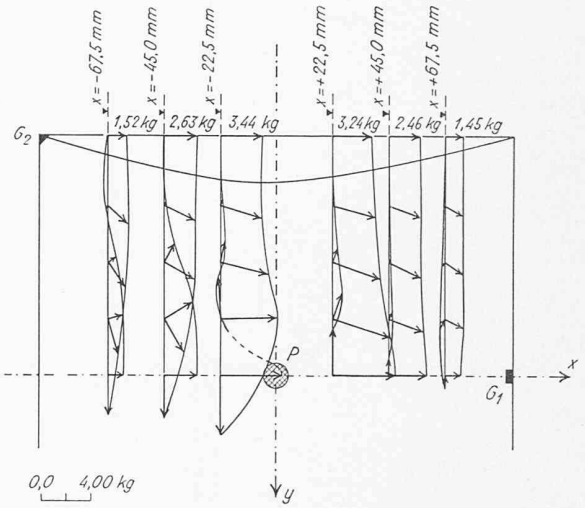


Fig. 16. Diagrammes des moments principaux pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe x

Fig. 17 (à droite) idem pour les profils parallèles à l'axe y

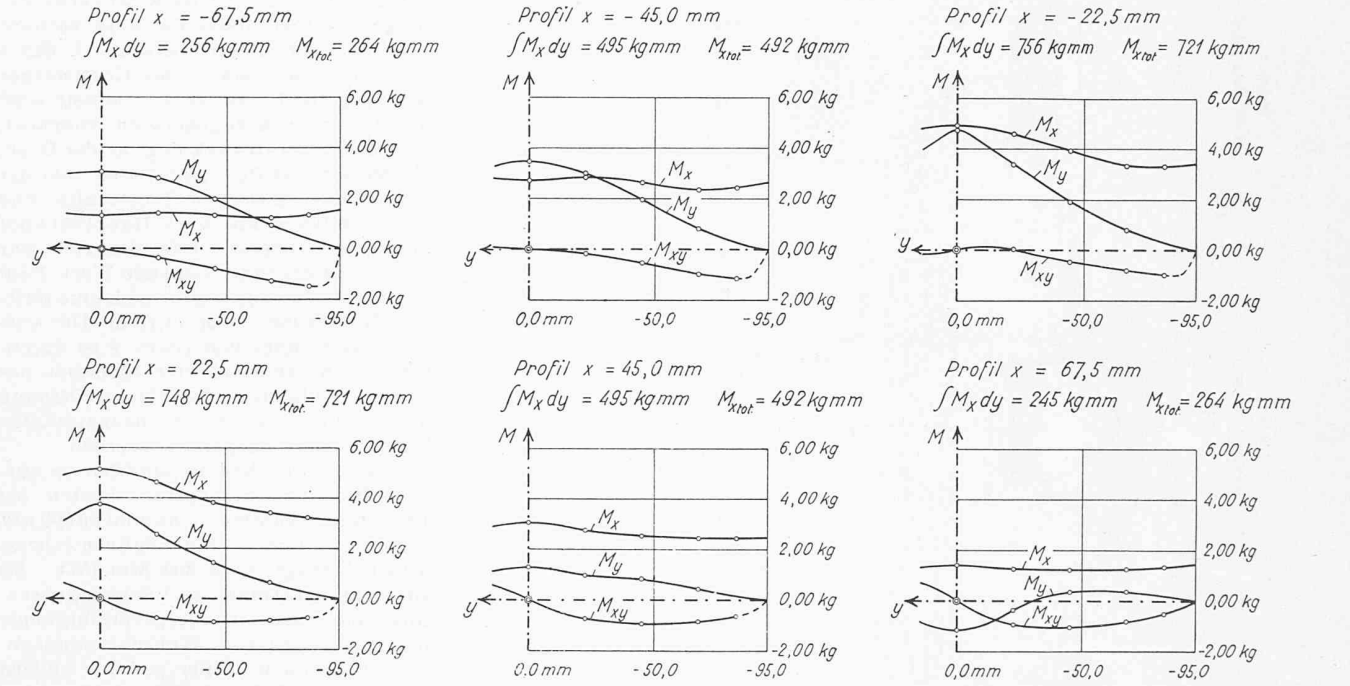
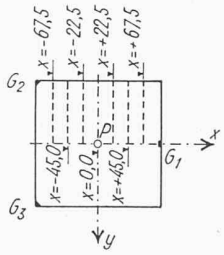


Fig. 19. Diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} pour la plaque fléchie de la figure 11. Profils parallèles à l'axe y



hors de cette zone[22]). *Pour les éliminer, nous avons répété chaque mesure à l'interféromètre, en tournant de 180° la plaque dans son plan et pris la moyenne arithmétique des deux résultats.* Ces mesures ont été effectuées en 58 points, répartis symétriquement par rapport à l'axe x. Nous avons pris ensuite les moyennes des valeurs correspondant aux points symétriques.

La figure 14 montre les *directions principales* et la figure 15, les *trajectoires des moments principaux*, qui ont été construites à l'aide de ces directions, en utilisant un papier calque.

Les figures 16 et 17 montrent les diagrammes des moments principaux, déduits des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3 en appliquant les formules (16)[23]), [24]).

Enfin, à titre de vérification, nous avons calculé à l'aide des formules (7) les moments M_x, M_y et M_{xy} pour un certain nombre de profils. Ces moments sont représentés dans les figures 18 et 19. En planimétrant les diagrammes M_y des profils parallèles à l'axe x et ceux, M_x, des profils parallèles à y, on devrait obtenir les valeurs des moments totaux $M_{y\,tot}$ et $M_{x\,tot}$ relatifs à ces profils. Or ces moments sont uniquement fonctions des forces extérieures connues et peuvent se calculer directement.

La comparaison des valeurs planimétrées $\int M_y\,dx$ et $\int M_x\,dy$, à celles calculées directement $M_{y\,tot}$ et $M_{x\,tot}$, indiquées à côté des diagrammes en question, est très satisfaisante, si l'on tient en considération qu'il s'agit d'une première série de mesures.

Nous nous proposons, dans la suite, d'étudier systématiquement les différentes causes d'erreurs de cette nouvelle méthode, d'une part en vue d'augmenter l'exactitude de ses résultats, d'autre part afin de déterminer son domaine d'application pratique.

Zurich, le 30 mars 1950.

[22]) Il a même été impossible de faire les mesures de δ_1 et δ_2 en certains points voisins du contour, où les franges données par l'interféromètre changeaient trop fortement de direction pendant la mise en charge de la plaque.

[23]) Les coefficients de ces équations avaient les valeurs

$$R_{11} = -0{,}7005\,\frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{21} = -0{,}8641\,\frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{31} = 5{,}7587\,\frac{\text{kg}}{\lambda},$$

$$R_{12} = -0{,}8641\,\frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{22} = -0{,}7005\,\frac{\text{kg}}{\lambda}, \quad R_{32} = -5{,}7587\,\frac{\text{kg}}{\lambda}.$$

[24]) Les flèches indiquées dans ces diagrammes ont des longueurs proportionnelles aux moments M_1 ou M_2. Leurs directions et leurs sens sont ceux des tensions principales σ_1 ou σ_2 aux points de la face inférieure de la plaque. Les diagrammes du moment de flexion le long du contour de la plaque ont été également dessinés dans les figures 16 et 17, en reportant la valeur de ce moment perpendiculairement au contour.