Berechnung von intermittierenden Schaltbetriebszuständen mittels Matrizen und Matrizenfunktionen

Autor(en): **Gerlach, H. G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **70 (1979)**

Heft 7

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-905368

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Berechnung von intermittierenden Schaltbetriebszuständen mittels Matrizen und Matrizenfunktionen

Von H. G. Gerlach

621.3.017:512.643.4;

Die thermischen Vorgänge, die sich bei unregelmässiger Belastung elektrischer Betriebsmittel (Motoren, Transformatoren, Kabelsysteme) ergeben, setzen sich abschnittsweise aus Exponentialfunktionen zusammen. Ein indirekt gekühlter, geschlossener Elektromotor bietet hierfür ein gutes Beispiel. Es werden die mathematischen Gesetzmässigkeiten über den Verlauf periodisch angeregter «Kippschwingungen» in Systemen mit definiter Matrix behandelt. Insbesondere wird auf die Zusammenhänge zwischen den Erwärmungsspitzen und möglicherweise gegebenen Systemparametern (Schaltung) sowie zwischen den ersten Erwärmungsspitzen und denjenigen im Sättigungszustand eingegangen. Sind alle Speicherstellen eines Mehrkörpersystems gleich gut geeignet für eine Messung der jeweiligen Temperaturen unter Testbedingungen, wie z.B. die einzelnen Stränge eines gemeinsam verlegten Energiekabelsystems, so bieten sich die simultanen Übergangsfunktionen als Berechnungsgrundlage an, die für beliebige Lastbedingungen und Schaltbetriebszyklen ausreichende Informationen enthalten sollten.

Les phénomènes thermiques qui résultent d'une charge irrégulière des moteurs, transformateurs et câbles se composent de fonctions exponentielles par intervalle. Un moteur électrique fermé, à refroidissement indirect, en est un bon exemple. Les règles mathématiques de l'allure d'oscillations de relaxation sont traitées dans des systèmes à matrice définie, notamment les relations entre pointes d'échauffement et paramètres connus du système (circuit), ainsi qu'entre les premières pointes d'échauffement et les pointes à l'état de saturation. Lorsque tous les éléments d'accumulation d'un système à plusieurs corps conviennent pour la mesure des températures dans des conditions de tests, par exemple les câbles d'un système souterrain, les réponses transitoires simultanées peuvent constituer une base de calcul donnant suffisamment d'informations pour des conditions de charge et des cycles de service quelconques.

1. Einleitung

Die Struktur eines irgendwie begrenzten Zustandsraumes in elektrischen oder analogen Systemen (vor allem bei thermischen Vorgängen) werde durch Diskretisierung näher erklärt, so dass sich die Systemeigenschaften in vereinfachter Form als die strukturtypischen Eigenschaften einer Schaltung definieren lassen. Ob es sich bei dem sog. Quellennetz um eine wirkliche elektrische Schaltung oder um das analoge Abbild mit elektrischen Modellgrössen anstelle der wirklichen (z.B. thermischen) handelt, ist belanglos. Im folgenden wird die elektrische Nomenklatur zur Beschreibung eines Wärmeleitungsmodells nach Fig. 1 mit Speichern (Kapazitäten C_i) an den mit Indices $i(j) \neq 0$ bezeichneten Knotenpunkten 1...4 verwendet, welche durch energieverzehrende Transportwege (Leitwerte G_{ij}) verbunden sind. Die Übertemperaturen der Speicher (Potentialdifferenzen u_i) entspannen sich auf null infolge dauernder Kühlung über die äusseren Ableitungen (G_{i0} parallel angeschlossen an die C_i) bzw. steigen oder kommen zum Gleichgewicht unter der Einwirkung zugeführter Wärmeströme (Ströme I_i).

Werden die Stromquellen (I_i oder $Q_i = \int I_i \, dt$) in einem intermittierenden Schaltbetrieb ein- und ausgeschaltet, so ergibt sich der zeitliche Verlauf als ein im wesentlichen steigender Kurvenzug mit diskontinuierlichem Anstieg, d.i. eine Sättigungslinie mit überlagerter nichtharmonischer Schwingung (vgl. z.B. Fig. 5). Nachfolgend wird die End-Spitzenerwärmung in der Wicklung eines im sog. S5-Betrieb gefahrenen Käfigläufermotors berechnet. Das Beispiel dieses Motors ist ein Grenzfall, welcher die Ansätze zu vielen ähnlichen Problemstellungen (Erwärmungszyklen von Transformatoren, von Kabelanordnungen usw.) ohne weiteres umfasst. Die Verwendung des Matrizenkalküls, insbesondere die Berechnung diskontinuierlicher «Aufschaukelvorgänge» mittels Matrizen*funktionen,* hat eine weit darüber hinausgehende Bedeutung.

2. Das 4-Knoten-Netz des indirekt gekühlten, geschlossenen Käfigläufermotors

Der Motor mit seinen 4 Speichergebieten – Wicklung 1, Statorblechpaket 2, Rotor (Käfig und Blechkörper) 3, übrige Gewichte (Totgewicht ohne Verlusteinspeisung) 4 – ist in [1] analysiert und beschrieben worden. Im Unterschied zu anderen einfacheren thermischen Anordnungen, wo die Wärmequellen weniger stark gekoppelt sind, stellt er ein allgemeines 4-Körper-System dar (Fig. 1).

Der Knotenpunktsatz *(Kirchhoff)* bei i, beispielsweise $i = 1$, erfasst die Bilanz der Wärmeströme I. Die Quellströme I_i sind die Verlustleistungen der i-ten Wärmequellen, wobei verschiedene Indizes i oder j angewendet werden, falls der betreffende Knoten gerade zum Gegenstand der Bilanzierungsrechnung genommen (i) oder als angekoppelte Senke betrachtet werden soll (j); die mit j indizierten Knoten wirken nur mit ihren Spannungen (u_j), nicht aber mit ihren Strömen (I_j) auf den bilanzierten Knoten ein. Im Zuge einer zyklischen Permutation schlüpft jeder der $n = 4$ Knoten einmal in die Rolle des i-ten Knotens hinein.

Die Temperaturen der Quellgebiete sind unbestimmten elektrischen Potentialen vergleichbar: Erst die *Über*temperaturen u_i, u_j (Erwärmungen) lassen sich in einem Wärmeleitungsmodell in Relation zur Umgebung und zum Anfangszustand der Speicher (Potential null) wie elektrische Spannungen gegenüber Erde (Knoten 0) definieren. Dann erscheinen die Wärmekapazitäten der Quellgebiete C_i als elektrische Erdkapazitäten, jeweils parallel zu schalten mit direkten Ableitungen G_{i0}. Die Ableit- und Kopplungsleitwerte (G_{i0}, G_{ij}) werden in einer Leitwertmatrix zusammengefasst, wobei jede Matrixzeile durch einen anderen Index i adressiert ist und wobei die Spalten der Matrix zusammen mit den Potentialen oder Spannungen über alle Knoten laufen ($j = 1...4$).

Insofern als es sich bei den Leitwertverbindungen zwischen zwei Knoten i und j um ungerichtete Verbindungen $G_{ij} = G_{ji}$ handelt, dürfen die Spalten und Zeilen der Leitwertmatrizen, $\boldsymbol{G}_e$ im eingeschalteten oder $\boldsymbol{G}_0$ im ausgeschalteten Zustand, vertauscht werden (Symmetrie). Die Leitwertmatrizen ($\boldsymbol{G}_e$, $\boldsymbol{G}_0$), die lediglich diagonale – somit ebenfalls symmetrische – Kapazitätsmatrix ($\boldsymbol{C}$) und der Wärmequellenvektor ($\boldsymbol{i}$) bestimmen das thermische Verhalten des Motors vollständig und ausreichend. Die charakteristischen Matrizen ($\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{G}_{e,0}$) werden definit genannt, d.h. dass die charakteristische Determinante nur reelle Wurzeln (bzw. Zeitkonstanten der Dimension C/G) haben und dass das System nur exponentiell abklingende Ausgleichsfunktionen aufweisen kann.

Es können 4 Knotenpunktgleichungen (Strombilanzen) aufgeschrieben werden, welche das System in allen Einzelheiten bestimmen. Beispielsweise lautet die Bilanz im 1. Knoten, wenn $du_1/dt = p \cdot u_1$ gesetzt ist (p Laplace-Operator):

$$\Big[\underbrace{(G_{10} + G_{12} + G_{13} + G_{14})}_{G_{11}} + C_1 \cdot p\Big]\, u_1 - G_{12}\, u_2 - G_{13}\, u_3 - G_{14}\, u_4 = I_1$$

Entsprechend im i-ten Knoten:

$$(G_{ii} + C_i \cdot p)\, u_i - \sum_{j \neq i} G_{ij}\, u_j = I_i \qquad (1)$$

Fasst man die variablen (oder gesuchten) Übertemperaturen, kurz Potentiale, zu einem Vektor

$$\boldsymbol{u} = [u_i] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

und weiter die konstanten Koeffizienten der untereinandergeschriebenen Gleichungen zu Matrizen $\boldsymbol{G}_e$, $\boldsymbol{C}$ zusammen, so lautet das vollständige Gleichungssystem für die Potentiale des *laufenden* Motors (Kennzeichen Index e bei $\boldsymbol{G}_e$):

$$(\boldsymbol{G}_e + \boldsymbol{C} \cdot p) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \qquad (2)$$

Der Lösungsvektor $\boldsymbol{u}$ in Gl. (2) setze sich aus einem stationären Anteil $\boldsymbol{w}$ und aus einem Ausgleichsvorgang $\boldsymbol{v}$ zusammen. Beim Abkühlen des *stillstehenden*, ausgeschalteten Motors (Kennzeichen Index 0 bei $\boldsymbol{G}_0$) ist die stationäre Lösung ein Nullvektor ($\boldsymbol{0}$), so dass nur der Ausgleichs- oder Entspannungsvorgang ($\boldsymbol{v}$) übrigbleibt:

$$(\boldsymbol{G}_0 + \boldsymbol{C} \cdot p) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

Hat das System von Fig. 1 den Rang n = 4, so haben die Matrizen in Gl. (2, 3) die Dimension 4×4, und die systembedingten sog. Eigen*werte* p_k resultieren aus einer Gleichung 4. Grades in p (die charakteristische Gleichung):

$$\det(\boldsymbol{G}_{0,e} + \boldsymbol{C} \cdot p) = 0 \quad \rightarrow p_k, \quad k = 1...4 \qquad (4)$$

Der Entspannungsvorgang (Gl. 3) enthält in allen Komponenten v_i des Lösungsvektors ($\boldsymbol{v}$) jeweils dieselben Zeitfunktionen $c_k \cdot \exp(p_k t)$ eines fundamentalen Exponentialansatzes $\exp(pt)$, in Verbindung mit relativen «Gewichten» m_{ik} zum i-ten Ausgleichspotential (v_i) und zum k-ten Dämpfungsdekrement ($-p_k$), so dass

$$v_i(t) = \sum_{(k)} m_{ik} \cdot c_k e^{p_k t} \quad (\text{i und k}) = 1...4 \qquad (5)$$

Die Gewichtsfaktoren m_{ik} in Gl. (5) sind nach Zeilen (i) und Spalten (k) in einer ebenfalls nur von der Schaltung abhängigen Matrix $\boldsymbol{M}_0$ (oder $\boldsymbol{M}_e$) angeordnet (*Modal*matrix). Man bezeichnet die bis auf einen unerheblichen Maßstabsfaktor (die Integrationskonstante c_k in Gl. 5) relativ zueinander durch das System bestimmten Komponenten je einer k-ten Spalte der Modalmatrix als den k-ten Eigen*vektor* oder als die Eigen*richtung* zum k-ten Eigenwert [2].

Die Schaltungsmatrizen des Systems ($\boldsymbol{G}_0$, $\boldsymbol{C}$) können geometrisch als eine Abbildungsvorschrift (Affinität) aufgefasst werden, derzufolge eine Einheits-«Kugel» um die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen des 4dimensionalen Raumes (welcher durch die 4 Spannungen als seine Koordinaten definiert sein mag) in ein 4achsiges Ellipsoid verwandelt wird. Die 4 Hauptachsen des Ellipsoids fallen in die Eigenrichtungen für k = 1...4, so dass ein Einheitsvektor in der k-ten Eigenrichtung $\boldsymbol{m}_k$ auch durch die 4 räumlichen Winkel definiert sein kann, die dieser mit den Koordinatenachsen einschliesst. Falls der 4dimensionale Abbildungsraum Vorstellungsschwierigkeiten macht, so stelle man sich zunächst 2- und 3dimensionale Unterräume vor, in denen grundsätzlich dieselben Beziehungen zwischen Matrizen leicht darstellbar sind.

Die Eigenvektoren oder -richtungen ergeben sich aus demselben *homogenen* Gleichungssystem wie die entsprechenden Eigenwerte, d.i. Gl. (2 oder 3) beide Male mit rechter Seite als Nullvektor ($\boldsymbol{0}$) aufgefasst. Löst man Gl. (4) mit den konkreten Daten ($\boldsymbol{G}_0$ und $\boldsymbol{C}$ in der Legende von Fig. 1) für den stillstehenden Motor nach p auf, so resultiert zunächst ein Quadrupel von Dämpfungsdekrementen p_k

$p_1 ... p_4$: $-4{,}174$; $-1{,}144$; $-0{,}390$; $-0{,}0758\ (\text{ks})^{-1}$

Einsetzen des ersten dieser Werte in Gl. (3) und willkürliches Vorgeben irgendeines der 4 Potentiale v_i (z.B. $v_4 = 1$) liefert mit den Zahlenwerten aus $\boldsymbol{G}_0$, $\boldsymbol{C}$ in Fig. 1 das folgende 3dimen-

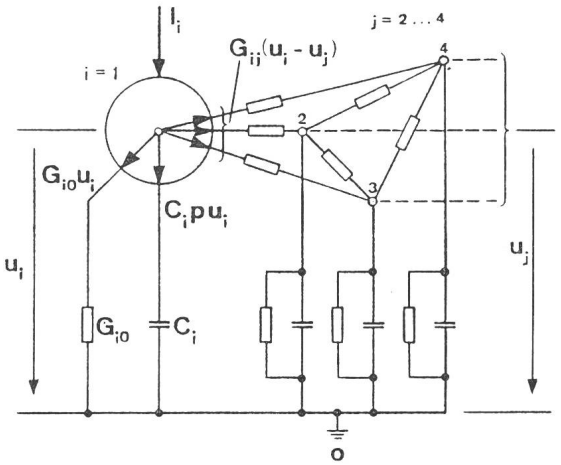

Fig. 1 Galvanisches Quadrupolnetz als thermisches Motorabbild zur Wärmebilanz am i-ten Knoten

Erklärungen im Text

Datensatz eines IEC-Drehstrommotors 225/4 (37,5 kW; 1500 min^{-1}) nach [1]

Leitwertnetz im eingeschalteten Zustand (bei laufendem Motor):

$$G_e = \begin{bmatrix} 63{,}1 & -33{,}3 & -25 & \\ -33{,}3 & 123{,}8 & -23{,}8 & \\ -25 & -23{,}8 & 69{,}4 & -16{,}6 \\ & & -16{,}6 & 16{,}6 \end{bmatrix} \text{W/K}$$

Leitwertnetz im ausgeschalteten Zustand (bei stehendem Motor):

$$G_0 = \begin{bmatrix} 54{,}8 & -33{,}3 & -16{,}7 & \\ -33{,}3 & 44{,}7 & & \\ -16{,}7 & & 33{,}3 & -16{,}6 \\ & & -16{,}6 & 16{,}6 \end{bmatrix} \text{W/K}$$

Kapazitätsmatrix:

$$C = \begin{bmatrix} 15 & & & \\ & 60 & & \\ & & 36 & \\ & & & 36 \end{bmatrix} \text{kJ/K}$$

Wärmequellenvektor des Dauerbetriebs:

$$i = \begin{bmatrix} I_1 = 1010 \\ I_2 = 460 \\ I_3 = 1430 \\ I_4 = 0 \end{bmatrix} \text{W} \quad \begin{matrix} \text{Wicklung} \\ \text{Eisen} \\ \text{Rotor} \\ \end{matrix}$$

sionale *inhomogene* System zur Bestimmung der übrigen modalen Komponenten v_1, v_2, v_3:

$$-33{,}3\, v_1 + (44{,}7 - 4{,}174 \cdot 60)\, v_2 = 0$$
$$-16{,}7\, v_1 + (33{,}3 - 4{,}174 \cdot 36)\, v_3 = 16{,}6$$
$$-16{,}6\, v_3 = 4{,}174 \cdot 36 - 16{,}6$$

also $v_1 = 55{,}4$; $v_2 = -8{,}97$; $v_3 = -8{,}05$; $v_4 = 1$. Aus den Komponenten folgt für den Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$ (die sog. Norm)

$$N(\boldsymbol{v}) = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)^{0,5} = 56{,}7$$

Damit erhält man als erste Spalte der gesuchten Modalmatrix die Projektionen des betreffenden bezogenen Eigenvektors auf die Koordinatenachsen (cos-Funktionen der räumlichen Winkel):

$$m_{ik} = \frac{(v_i)_{k=1}}{N(\boldsymbol{v})}, \quad \boldsymbol{M}_0 = [m_{ik}] = \begin{bmatrix} 0{,}977 & \dots & \dots & \dots \\ -0{,}158 & \dots & \dots & \dots \\ -0{,}142 & \dots & \dots & \dots \\ 0{,}018 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. Die Übergangsfunktionen beim Ausschalten oder beim Einschalten der Nennlast

Der Dauerbetrieb des Motors ist definiert durch eine stationäre Potentialverteilung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$ seiner Speichergebiete, welche sich nach Gl. (2) mit dem Vektor $\boldsymbol{i}$ der im Nennlastbetrieb auftretenden Wärmeströme berechnen lässt, indem die Ableitungen null gesetzt werden ($p = 0$):

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}_e^{-1} \cdot \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 63 \\ 34{,}6 \\ 72{,}5 \\ 72{,}5 \end{bmatrix} \mathrm{K} = \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}55 \\ 1{,}15 \\ 1{,}15 \end{bmatrix} \text{p.u.} \tag{7}$$

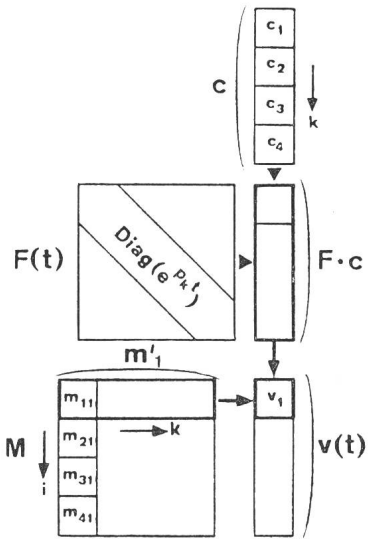

Fig. 2 Allgemeines Produktschema zur Bildung der Exponentialsummen von Gl. (5) als Skalarprodukte zweier Vektoren mit Matrizen
Das sog. *Falk*-Schema [2] führt solche Komponenten je eines horizontalen Vektors (z.B. $\boldsymbol{m}_1'$) und eines vertikalen Vektors (z.B. $\boldsymbol{c}$ oder $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c}$) als Faktoren zusammen, die in Richtung der Laufvariablen (Index k) gleich weit vom Anfang k = 1 entfernt sind. Die Summe der einzelnen Komponentenprodukte (z.B. $\boldsymbol{m}_{11} \exp(p_1 t)\, c_1 + m_{12} \cdot \exp(p_2 t) \cdot c_2 + \dots$) wird im Kreuzungspunkt der Laufrichtungen der über k laufenden Vektoren gespeichert und als das skalare Produkt der Vektoren bezeichnet

Die erste Komponente (Index i = 1: Wicklung) diene als normierte Bezugsgrösse für alle weiteren Erwärmungsangaben: Sie sei vom Dauerbetrieb her zu anfangs 100 % bzw. 1 per-unit (p.u.) festgelegt, wenn es um den Abkühlungsvorgang beim Ausschalten der Nennlast geht; dabei gehen der Vektor der Quellströme auf null ($\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{0}$) und, da der Motor beim Abkühlen stillsteht, die Leitwertmatrix von $\boldsymbol{G}_e$ auf $\boldsymbol{G}_0$.

Im weiteren Verlauf nach dem Summengesetz von Gl. (5) müssen die Integrationskonstanten c_k aus der Anfangsbedingung

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \quad \text{bei} \quad t = 0 \tag{8}$$

bestimmt werden. Fasst man die für jedes Speicherpotential (also auch das i-te) zu bildende Produktsumme als das *Skalarprodukt* zweier je über den Index k laufender Vektoren auf, so lässt sich der ganze Potential*vektor* $\boldsymbol{v}(t)$, wie in Fig. 2 veranschaulicht, durch den Ansatz einer Transformation am Konstantenvektor $\boldsymbol{c} = [c_k]$ darstellen:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{F}_0(t) \cdot \boldsymbol{c} \tag{9}$$

Die Funktionswerte sind darum in einer diagonalen Funktionalmatrix

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{0,e}(t) = \mathrm{Diag}\,(e^{p_k t})$$

angeordnet worden, um den in Fig. 2 senkrecht angeordneten Vektor $\boldsymbol{c}$ in eine ebenfalls senkrechte Vektorspalte $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c} = [c_k \exp(p_k t)]$ zu verwandeln. Das Produktschema in Fig. 2 deutet an, wie beispielsweise der skalare Betrag v_1 (und entsprechend alle übrigen v_i) gebildet wird, nämlich durch das Produkt $\boldsymbol{m}_1' \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c})$, d.i. die Summe sämtlicher Produkte von gleichindizierten Komponenten m_{1k} und $f_k c_k$.

Im ersten Augenblick wird die Funktionalmatrix zur Identitätsmatrix (Einsmatrix $\boldsymbol{I}$), und der Konstantenvektor in Gl. (9) bestimmt sich aus der Anfangsbedingung (8) durch Inversion:

$$\boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{M}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{w} \tag{10}$$

Damit schreibt sich der Abkühlungsvorgang in allgemeiner Matrizenform:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{F}_0 \cdot \boldsymbol{M}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}_0(t - t_1) \cdot \boldsymbol{u}_1(t_1) \tag{11}$$

Das ist nach der Sprachregelung der Matrizentheorie [2] eine Vektortransformation vom Dauerbetriebs-Endwert $\boldsymbol{w}$ aus oder von einem anderen Anfangswert $\boldsymbol{u}_1$ aus, zum Entspannungspotential $\boldsymbol{v}(t)$, wobei die zusammengefasste Übergangsmatrix ($\boldsymbol{A}_0$) durch Ähnlichkeitstransformation ($\boldsymbol{M}_0 \dots \boldsymbol{M}_0^{-1}$) an der Funktionalmatrix ($\boldsymbol{F}_0 = [f_{kk}] = \mathrm{Diag}\, e^{p_k t}$) entstanden ist. Die Diagonalelemente f_{kk} stellen gleichzeitig die Eigenwerte der Matrizen $\boldsymbol{F}_0$ (wegen Diagonalität) und $\boldsymbol{A}_0$ (wegen Ähnlichkeit) dar; sie sind alle kleiner als eins wegen der Tatsache, dass die p_k nur negativ vorkommen. Auf die Konsequenzen dieser Feststellung wird noch in Gl. (24) näher einzugehen sein. Im wesentlichen geht es darum, dass bei mehrfacher Wiederholung der ν-te Rekursionsschritt auf der Entspannungskurve (Gl. 11) gegen null konvergiert, indem die Eigenwerte der Matrixpotenz $\boldsymbol{A}_0^{\nu}$ mit $\nu \to \infty$ alle gegen null gehen. Eine aus lauter Matrixpotenzen der Basis $\boldsymbol{A}$ (im besonderen $\boldsymbol{A}_0$ oder $\boldsymbol{A}_e$, aber auch $\boldsymbol{A}_0 \cdot \boldsymbol{A}_e$) gebildete unendliche Reihe wird Matrizenfunktion genannt; diese konvergiert gegen einen Sättigungs-Grenzwertevektor, solange die f_{kk} kleiner als eins und die p_k kleiner als null sind.

Beim Aufheizen des unter Last laufenden eingeschalteten Motors gelten dieselben Entspannungsgrundsätze der Funktion $\boldsymbol{v}$ in Relation zum Beharrungszustand $\boldsymbol{w}$ (der hier an die Stelle des beim Abkühlen nicht geschriebenen Nullvektors tritt). Die spiegelbildliche Betrachtungsweise eines Heizvorgangs ($\boldsymbol{u}$) und eines Kühlvorgangs ($\boldsymbol{v}$), genaugenommen $u(t)$ und $v(t)$ in Fig. 3 axialsymmetrisch zur Linie $w = \text{const}$ nur bei weiterlaufender Kühlung, ist auch bei der Messung mit Erfolg angewendet worden. Die Messung von $v = w - u$ in Fig. 3a (d.i. Abkühlung der ausgeschalteten, aber weiterhin angetriebenen Maschine) lässt sich viel einfacher und genauer ausführen als die Messung von u im eingeschalteten Zustand. Indem überall die Indizes 0 durch e ersetzt werden, erhält man daher anstelle von Gl. (11) jetzt für das Aufheizen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{w} - \boldsymbol{M}_e \cdot \boldsymbol{F}_e \cdot \boldsymbol{M}_e^{-1} \cdot (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_0) = \\ &= \boldsymbol{w} - \boldsymbol{A}_e(t) \cdot [\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_0(0)] \end{aligned} \tag{12}$$

Dabei ist für den Fall, dass der Zustand der Speicher für $t = 0$ nicht null sein sollte, der allgemeinere Anfangszustand $\boldsymbol{u}_0(0) = \boldsymbol{0}$ oder $\neq \boldsymbol{0}$ in die Formel von Gl. (12) eingebaut worden, wobei die Anregung (Differenzzustand $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_0$) die gleiche Rolle spielt wie der andere allgemeine Anfangswert $\boldsymbol{u}_1$ bei der Abkühlung nach vorzeitig abgebrochenem Aufheizen (Gl. 11).

Es darf schon an dieser Stelle auf die besondere Leistungsfähigkeit des Matrizenkalküls hingewiesen werden, der nämlich die Berechnung der Exponentialfunktionen *überflüssig* macht, dadurch dass man (um den Kurvenverlauf explizit Punkt für Punkt darstellen zu können) mehr oder weniger kleine Abszissenschritte Δt ausführt, wodurch die Übergangsmatrizen $\boldsymbol{A}_0(\Delta t)$ oder $\boldsymbol{A}_e(\Delta t)$ zu Konstanten werden und die Anfangswerte $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}_1$ zu den eigentlichen Veränderlichen. Das Rechnen in Rekursionsschritten stellt unabhängig von der Schrittweite (Δt) eine Skalarproduktbildung (Vektortransformation) dar; diese verläuft wesentlich wirtschaftlicher als das Ausrechnen variabler Funktionswerte.

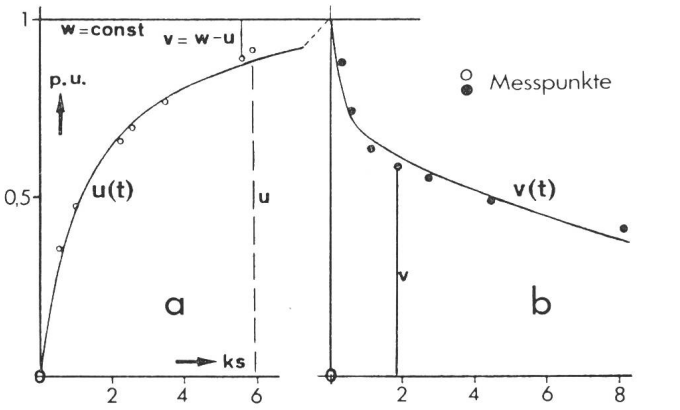

Fig. 3 Berechnete und gemessene Dauerbetriebskurven
Übergangskurven zum Dauerbetrieb mit Nennlast

Die Kurven $u(t)$, $v(t)$ ohne Index stellen die Wicklungserwärmung des in Fig. 1 erwähnten Käfigläufermotors dar (d.i. Komponente 1 des Potentialvektors $\boldsymbol{u}$). Sie entsprechen dem Grenzzustand des sog. S3-Schaltbetriebs, wenn die Einschaltzeit t_e und die Ausschaltzeit t_0 beide gegen unendlich gehen

a) Heizkurve $u(t)$:

Messpunkt $v = w - u$ gemessen mit Hilfe des abnehmenden Wicklungswiderstands beim Abkühlen des angetriebenen Motors, bei laufender Ventilation (Matrix $\boldsymbol{G}_e$)

b) Kühlkurve $v(t)$:

Messpunkt v gemessen aus abnehmendem Widerstand beim Abkühlen des stillstehenden Motors (Matrix $\boldsymbol{G}_0$)

4. Das Hüpfen von einer Schaltspitze zur nächsten im diskontinuierlichen Schaltbetrieb mit Pulslasten

Ein *periodischer* Schaltbetrieb ist durch die Betriebsart und durch den zeitlichen Ablauf des Schaltspiels gekennzeichnet. Beim thermischen Verhalten von Motoren kommt es auf die Hüllkurve der Temperaturspitzen an, welche die Wicklung im Laufe der Zeit annimmt, wenn Einschaltzeiten t_e und Ausschaltzeiten t_0 periodisch abwechseln. Im sog. S3-Betrieb hat der Belastungsverlauf rechteckige Gestalt, d.h. man rechnet mit gleichmässiger Last und mit konstanter Wärmeeinströmung $\boldsymbol{i} = \text{const}$ (Gl. 2) während der Einschaltzeit und mit stehendem Motor bei $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ während der Ausschaltzeit (Fig. 4a). Der Potentialverlauf ist stetig (ohne Sprünge), wenn auch nicht stetig differenzierbar. In den schwerwiegenderen Betriebsarten S4 und S5 (Fig. 4b, 4c) treten zusätzliche Dirac-Pulse der Wärmeeinströmung jeweils am Anfang bzw. am Anfang und Ende der Einschaltperiode auf. Anlaufwärme Q_a und Bremswärme Q_b hängen in erster Linie mit dem Trägheitsmoment des Maschinensatzes zusammen, das meistens in Relation zum Nenndrehmoment in Form der sog. Anlaufzeit angegeben wird. Anlauf- und Bremswärme müssen berücksichtigt werden, wenn die Anlaufzeit trotz $t_a \ll t_e, t_0$ jenes Mass überschreitet, das durch die Höhe zugehöriger Temperatursprünge gegeben sein mag.

Die Pulsinhalte (Q_a, Q_b) sind im elektrischen Abbild (Fig. 1) als Ladungsvektoren $\boldsymbol{Q}_a$, $\boldsymbol{Q}_b$ zu qualifizieren, mit jeweils Komponentenanteilen $\int I_i \, dt$ bei den Knoten 1 und 3 (Wicklung und Rotor). Es ergeben sich damit diskontinuierliche Potentialverläufe. Die Potentialsprünge sind ebenfalls Vektoren $\Delta\boldsymbol{u}_a$, $\Delta\boldsymbol{u}_b$, deren Komponenten sich aus jeweils «Ladung/Kapazität» berechnen lassen. Ohne auf diese Berechnung hier näher einzutreten, seien die nachfolgenden Sprungpotentiale als numerisches Beispiel eingeführt, welches sich ausser einer angenommenen Anlaufzeit von $t_a = 10$ s aus der Drehmomentcharakteristik und aus den übrigen Daten des Motors von [1] ableitet sowie ausserdem von einer angenommenen Lastkennlinie:

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{u}_a &= \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}_a = \begin{bmatrix} 0{,}164 \\ 0 \\ 0{,}146 \\ 0 \end{bmatrix} \text{p.u.,} \\ \Delta\boldsymbol{u}_b &= \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}_b = \begin{bmatrix} 0{,}160 \\ 0 \\ 0{,}207 \\ 0 \end{bmatrix} \text{p.u.} \end{aligned} \tag{13}$$

Bei der Berechnung der Schaltspitzen geht man zunächst von der ersten Spitze $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ aus, so dass das anschliessende Entspannungspotential $\boldsymbol{v}_1$ (Minimum vor Beginn der zweiten Antriebsphase, Fig. 4a) ohne weiteres nach Gl. (11) angegeben werden kann:

$$\boldsymbol{v}_1(t_e + t_0) = \boldsymbol{A}_0(t_0) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_1 \tag{14}$$

Als Anfangszustand des nächsten steigenden exponentiellen Ausgleichsvorgangs wählt man die Summe aus diesem Entspannungspotential und aus dem Anlaufsprung ($\boldsymbol{v}_1 + \Delta\boldsymbol{u}_a$),

siehe Fig. 4b, anstelle des allgemeinen Anfangswerts $\boldsymbol{u}_0(0)$ in Gl. (12). Schliesslich ist zu berücksichtigen, dass am Ende des Aufheizens u. U. noch ein fester Betrag für das Bremsen ($\Delta \boldsymbol{u}_b$) überlagert wird (Fig. 4c), so dass der zweite Spitzenwert ähnlich wie in Gl. (12) bzw. durch Einsetzen von $\boldsymbol{v}_1$ aus (14) wie folgt herauskommt:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_2(2t_e + t_0) = \underbrace{\boldsymbol{w} + \Delta \boldsymbol{u}_b}_{\boldsymbol{w}_b} - \boldsymbol{A}_e(t_e) \cdot (\underbrace{\boldsymbol{w} - \Delta \boldsymbol{u}_a}_{\boldsymbol{w}_a} - \boldsymbol{v}_1) = \\ = \boldsymbol{w}_b - \boldsymbol{A}_e \cdot \boldsymbol{w}_a + \boldsymbol{A}_e \cdot \boldsymbol{A}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_1 \tag{15}$$

Die erste Spitze berechnet sich nach demselben Gesetz (15), ausser dass der Anfangszustand jetzt ein Nullvektor ist, so dass

$$\boldsymbol{v}_0(0) = \boldsymbol{0}, \qquad \hat{\boldsymbol{u}}_1(t_e) = \boldsymbol{w}_b - \boldsymbol{A}_e \cdot \boldsymbol{w}_a \tag{16}$$

Durch Einsetzen von Gl. (16) in (15) folgt mit $\boldsymbol{A}_e \cdot \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_2 = \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_1 \tag{17}$$

Entsprechend erhält man durch Wiedereinsetzen von (17) in (14) und (15) die für die laufende Berechnung der Spitzen längs der einhüllenden Kurve wichtige Rekursionsformel (vgl. Laufvariable Index ν in Fig. 5):

$$\hat{\boldsymbol{u}}_3 = \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\nu+1} = \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\nu \text{ bzw. Differenzvektor} \\ [\delta_i]_\nu = \hat{\boldsymbol{u}}_{\nu+1} - \hat{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\nu \tag{18}$$

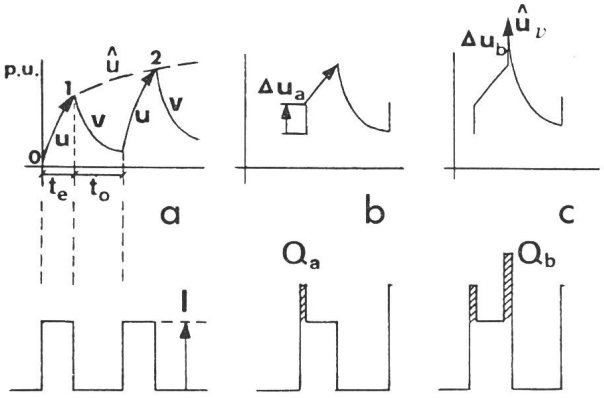

Fig. 4 Verlauf der Wärmeeinströmung und der Erwärmung in verschiedenen Schaltbetriebsarten eines Motors

Komponenten 1 (Wicklungsverluste *I*, *Q* und Wicklungserwärmung *u*, *v*) ohne Index 1 geschrieben

a) S3-Betrieb:

- *I* gleichmässige Einströmung ins Einschaltnetz (G_e) während der Einschaltdauer t_e bei vernachlässigbarer Anlaufzeit
- *u* steigender Abschnitt der Temperaturkurve
- *v* fallender Abschnitt, Entspannung im Stillstandsnetz (G_o) während der Ausschaltzeit t_o
- $\hat{u}$ Hüllkurve der Temperaturspitzen
- 1, 2 erste, zweite Spitze usw.

b) S4-Betrieb:

- Q_a Anlaufwärme bei nicht vernachlässigbarer Anlaufzeit t_a; Motor läuft aus
- Δu_a Temperatursprung am Anfang des Heizzyklus auf Grund der Anlaufwärme

c) S5-Betrieb:

- Q_b Bremswärme am Ende des Einschaltzyklus tritt zusätzlich zur Anlaufwärme in Anlagen auf, die elektrisch mit Gegenstrom gebremst werden
- Δu_b Temperatursprung am Ende des Heizzyklus auf Grund der Bremswärme am Anfang des Entspannungszyklus
- $\hat{u}_\nu$ ν-te Spitze; alle Spitzen enthalten den Temperatursprung Δu_b

5. Entwicklung der Übergangsmatrix ($\boldsymbol{A}$) aus äquidistanten Vektorzuständen der Übergangskurvenschar ($\boldsymbol{U}$)

Die ersten n Rekursionsschritte δ_ν, $\nu = 1 \ldots n$ lassen sich durch Nebeneinanderanordnen der Vektoren $\hat{\boldsymbol{u}}_\nu$ bzw. der Differenzvektoren $[\delta_i]_\nu$ zu quadratischen Matrizen $\boldsymbol{U}$ und Δ zusammenfassen, womit die Umkehrbarkeit der Beziehungen zwischen den Stützwerten einer Übergangskurvenschar ($u_{i\nu}$) und der Übergangsmatrix (a_{ik}) formal bewiesen ist:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{a}_i'] = [a_{ik}] \\ \boldsymbol{U} &= [\hat{\boldsymbol{u}}_\nu] = [u_{i\nu}] \\ \Delta &= [\delta_i]_\nu = [\delta_{i\nu}] \end{aligned}\right\} \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U} = \Delta \tag{19}$$

Die Schaltbetriebskurve von Fig. 5 diene als numerisches Beispiel eines allgemeinen Erwärmungsvorgangs, wobei im folgenden nicht mehr von Heizen oder Kühlen (Indizes e, 0) zu sprechen ist, weil die schaltungsmässige Herkunft der Matrix ($\boldsymbol{A}$) oder ihre Zusammensetzung aus Faktoren in Relation zu den Vektorzuständen ($\boldsymbol{U}$) ohne Bedeutung ist.

Bei der Berechnung von $\boldsymbol{A}$ aus $\boldsymbol{U}$ (Umkehrung des Matrizenprodukts Gl. 19) ist mit der Problematik der kleinen Determinanten zu rechnen, so dass diese Umwandlung in praktischen Fällen nicht ohne weiteres möglich ist. Um die sehr entscheidenden Fehlermöglichkeiten qualitativ beschreiben zu können, soll folgendermassen vorgegangen werden: Die Matrix $\boldsymbol{U}$ werde zunächst aus der mit den Zahlen von Fig. 5 berechneten, als gegeben betrachteten Eingabematrix $\boldsymbol{A}_1$ berechnet und dann gerundet. Die aus der gerundeten Matrix $\boldsymbol{U}$ (anstelle einer supponierten Messdatenliste) hervorgehende Ausgabematrix $\boldsymbol{A}_2$ weist gegenüber $\boldsymbol{A}_1$ einen Fehler $\Delta \boldsymbol{A}$ auf, der zu diskutieren ist.

Die Eingabematrix $\boldsymbol{A}_1$ enthält einfach die Systemparameter (Eigenwerte, Eigenvektoren) in Verbindung mit der digitalisierten Zeitkoordinate (Intervallbreite, Spieldauer), während alle Informationen über die Belastung in der vektorförmigen Anfangsbedingung als weitere Dateneingabe $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ enthalten sind (Gl. 15, 16). Die Dateneingaben verstehen sich in *abgeschlossenen* Zahlen, welche höchstens 3 Ziffern nach dem Komma enthalten sollen:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}107 & 0{,}386 & 0{,}226 & 0{,}080 \\ 0{,}087 & 0{,}467 & 0{,}095 & 0{,}029 \\ 0{,}087 & 0{,}190 & 0{,}420 & 0{,}211 \\ 0{,}030 & 0{,}027 & 0{,}246 & 0{,}689 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{u}}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}065 \\ 0{,}461 \\ 0{,}022 \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

Dann ergeben sich beim Rechnen ohne Stellenverlust durch fortlaufende Multiplikation die Stellenzahlen der $u_{i\nu}$, $\delta_{i\nu}$ mit wachsendem ν zu 3, 6, 9...15. Nachstehend das auf ebenfalls nur 3 Stellen gerundete Resultat der Vektorzustände:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0{,}450 & 0{,}629 & 0{,}760 & 0{,}864 \\ 0{,}065 & 0{,}179 & 0{,}276 & 0{,}353 \\ 0{,}461 & 0{,}711 & 0{,}883 & 1{,}021 \\ 0{,}022 & 0{,}166 & 0{,}335 & 0{,}500 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}310 & 0{,}414 & 0{,}500 \\ 0{,}114 & 0{,}211 & 0{,}288 & 0{,}352 \\ 0{,}250 & 0{,}422 & 0{,}560 & 0{,}677 \\ 0{,}144 & 0{,}313 & 0{,}478 & 0{,}631 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man umgekehrt die Vektorzustände als gegeben, so können deren Rundungsfehler je nach «Kondition» der

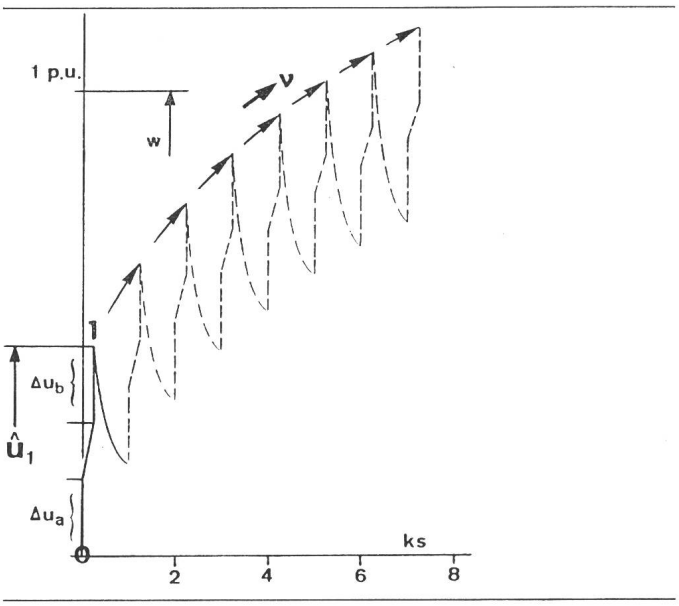

Fig. 5 S5-Betrieb des Elektromotors
Berechnete Wicklungserwärmung, ohne Index 1 geschrieben.
Mit Berücksichtigung von Anlauf- und Bremswärme.

Anlaufzeit	$t_a = 10$ s
Spieldauer	1 ks
Einschaltdauer 25%	$t_e = 0{,}25$ ks
Ausschaltdauer 75%	$t_o = 0{,}75$ ks

Matrix $\boldsymbol{U}$ beim Auflösen des Systems Gl. (19) nach $\boldsymbol{A}$ zu abweichenden Ausgabedaten $\boldsymbol{A}_2$ führen, welche aus numerischen Gründen deutlich von $\boldsymbol{A}_1$ verschieden herauskommen. Die Matrixinversion (aus Gl. 19)

$$\boldsymbol{A} = \Delta \cdot \boldsymbol{U}^{-1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{U}')^{-1} \cdot \Delta' \tag{20}$$

ist am besten lesbar in Form des *transponierten* Matrizenprodukts ($\boldsymbol{A}'$ rechts mit vertauschter Zeilen-Spaltenanordnung bewirkt eine Änderung in der Reihenfolge der transponierten Faktoren), so dass die Spalten in $\boldsymbol{A}'$ (entsprechend Zeilen in $\boldsymbol{A}$) als Lösungen je eines Gleichungssystems berechnet werden können, beispielsweise im Falle der ersten Zeile der gesuchten Matrix $\boldsymbol{A}_2$:

$$\boldsymbol{a}_1' = [a_{1k}] = [u_{vi}]^{-1} \cdot [\delta_{1v}]$$

$$\text{bzw. } \boldsymbol{U}' \cdot \boldsymbol{a}_1' = \begin{bmatrix} 0{,}179 \\ 0{,}310 \\ 0{,}414 \\ 0{,}500 \end{bmatrix}$$

$$\text{also} \qquad \boldsymbol{a}_1' = [\,0{,}087 \;\; 0{,}335 \;\; 0{,}252 \;\; 0{,}100\,] \tag{21}$$

Entsprechend ergeben sich die ganze Matrix mit n Zeilen $\boldsymbol{a}_i'$ wie oben

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}087 & 0{,}335 & 0{,}252 & 0{,}100 \\ -0{,}051 & 0{,}269 & 0{,}255 & 0{,}081 \\ 0{,}106 & 0{,}177 & 0{,}404 & 0{,}222 \\ 0{,}005 & -0{,}017 & 0{,}277 & 0{,}701 \end{bmatrix}$$

und die Fehlermatrix $\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2$ aufgrund des Stellenverlusts beim Runden der nur 3stellig angegebenen Matrix $\boldsymbol{U}$:

$$\Delta\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0{,}020 & 0{,}051 & -0{,}026 & -0{,}020 \\ 0{,}138 & 0{,}198 & -0{,}160 & -0{,}052 \\ -0{,}019 & 0{,}013 & 0{,}016 & -0{,}011 \\ 0{,}025 & 0{,}044 & -0{,}031 & -0{,}012 \end{bmatrix}$$

Als ein repräsentatives 1dimensionales Vergleichsmass können die quadratischen Mittelwerte der Zahlenreihen der Matrix (d.i. die Vektornorm bzw. der Betrag von $\boldsymbol{a}_i$ oder $\boldsymbol{a}_k$) oder noch besser die mittlere Vektornorm (eine Art Effektivwert)

$$N_m(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}) / \sqrt{n}$$
$$\text{mit} \quad N(\boldsymbol{A}) = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2} = \text{Matrixnorm} \tag{22}$$

benützt werden. Die n-te Potenz von N_m bezeichnet dann eine orthogonale Vergleichskubatur zum volumetrischen Inhalt des tatsächlich durch die Zeilen- oder Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Epipeds (dargestellt durch den Zahlenwert der Determinanten). Die Matrixinversion (Gl. 20) ist an die Bedingung der Regularität $\det(\boldsymbol{U}) \neq 0$ geknüpft, wobei mehr oder weniger ausgeprägte numerische Stabilität (die Fehlerverstärkungseigenschaften) üblicherweise durch eine Konditionszahl ausgedrückt wird [2]:

$$K(\boldsymbol{U}) = \det(\boldsymbol{U}) / N_m^n(\boldsymbol{U}) = 0{,}000\,024 / (1{,}13)^4 = 0{,}000\,015 \tag{23}$$

Im Vergleich der Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{U}$ muss festgestellt werden, dass die $\boldsymbol{U}$-Matrix etwa 1000mal schlechter konditioniert ist als die $\boldsymbol{A}$-Matrix. Der Fehler in der berechneten Matrix ($\Delta\boldsymbol{A}$), gemessen am grössten Komponentenbetrag $\Delta a_{ik\,max} = 0{,}198$ im Verhältnis zur mittleren Vektornorm $N_m(\boldsymbol{A}) = 0{,}56$ (relativ 0,198/0,56 = 0,35), mag etwa 1000mal grösser sein als die durch Rundung bewirkten Fehler in der $\boldsymbol{U}$-Matrix. Trotzdem lässt sich mit der fehlerhaften Matrix $\boldsymbol{A}_2$ sinnvolle Berechnungsarbeit leisten, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

6. Extrapolation eines intermittierenden Erwärmungsverlaufs und Sättigungseigenschaft der Hüllkurve

Die Frage nach dem Endspitzenwert einer periodisch intermittierenden Belastungssituation ist experimentell nur schwer oder mit grossem Aufwand zu beantworten. Auch beim Rechnen, z.B. Hüpfen von Spitze zu Spitze, ist die grosse Zahl der Spitzen bis zum Eintreten der Sättigung störend. Beispielsweise kommt man mit den Zahlenwerten der Matrix $\boldsymbol{A}_1$ (Motorbeispiel nach Fig. 5) erst nach 60 Schaltspielen bis auf 1% an den Endspitzenwert heran.

Das Springen von Spitze zu Spitze ist unnötig, wenn nur der Endwert der Hüllkurve gesucht wird, weil von allem Anfang an schon sämtliche Information im Vektor der ersten Spitze $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ und in der zusammengesetzten Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ enthalten ist. Dabei ist es im Prinzip gleichgültig, ob die Matrix aus einer Modellschaltung ($\boldsymbol{A}_1$) oder aus einer numerischen Kurvenanalyse ($\boldsymbol{A}_2$) hervorgegangen ist. Einsetzen von $\hat{\boldsymbol{u}}_2$ aus Gl. (17) in Gl. (18) bis $\hat{\boldsymbol{u}}_\nu$ liefert als resultierenden Transformationsfaktor bei $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ ein endliches Matrizenpolynom bis zur ($\nu - 1$)-ten Potenz, wobei schon im Anschluss an Gl. (11) nachgewiesen worden ist, dass im Grenzübergang $\nu \to \infty$ die höchsten Potenzen nur noch Nullbeiträge liefern. Damit entsteht eine unendliche Matrizenreihe (eigentliche Matrizen*funktion*), im besonderen also eine konvergente geometrische Reihe, die nach derselben Grenzwertformel wie bei den einfachen Zahlen behandelt werden darf:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\infty = \lim_{\nu \to \infty} \hat{\boldsymbol{u}}_\nu = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^{\nu-1}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_1 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_1 \tag{24}$$

Die Lösung $\hat{\boldsymbol{u}}_\infty$ entspricht somit der Lösung eines Gleichungssystems mit den Koeffizienten der Matrix $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ und mit dem Vektor der ersten Spitze auf der rechten Seite:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\infty = \hat{\boldsymbol{u}}_1$$

$$\begin{bmatrix} (1-0{,}107) & -0{,}386 & -0{,}226 & -0{,}080 \\ -0{,}087 & (1-0{,}467) & -0{,}095 & -0{,}029 \\ -0{,}087 & -0{,}190 & (1-0{,}420) & -0{,}211 \\ -0{,}030 & -0{,}027 & -0{,}246 & (1-0{,}689) \end{bmatrix} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_\infty = \tag{25}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}065 \\ 0{,}461 \\ 0{,}022 \end{bmatrix} \text{p.u.} \quad \text{also } \hat{\boldsymbol{u}}_\infty = \begin{bmatrix} 1{,}52 \\ 0{,}82 \\ 1{,}96 \\ 1{,}84 \end{bmatrix} \text{p.u.}$$

Die einzige Voraussetzung, welche an die ausserordentlich einfache Extrapolationsmethode nach Gl. (24) geknüpft ist, schreibt vor, dass das System linear sei, d.h. dass ein lineares Differentialgleichungssystem wie Gl. (1) formulierbar sein muss. Im Gegensatz zu höheren mathematischen Operationen, wie z.B. den bekannten numerischen Integrationsverfahren nach *Runge-Kutta* u.a. [3], liefert das Matrizenverfahren exakte und zuverlässige Integrationsergebnisse fast ohne jede Begrenzung (Anzahl n der Speicher und Integrationsbereich t der Zeitachse), wenn nur das System und die Anfangsbedingungen bekannt sind, was für alle anderen Verfahren ebenfalls Bedingung ist.

Interessanterweise beruht die Extrapolation auf einer wesentlich stabileren numerischen Situation als die analytische Entwicklung (Umkehrmatrix von $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ in Gl. 24 statt von $\boldsymbol{U}$ in Gl. 20). Die Extrapolationsrechnung vermag sogar Fehler, die als Folge einer unzutreffenden Netztopologie oder als Folge unzureichender Analysiergenauigkeit (vgl. $\boldsymbol{A}_2$ aus $\boldsymbol{U}$) aufgetreten sind, teilweise wieder auszugleichen. Bezeichnenderweise hat das Weiterrechnen mit der Matrix $\boldsymbol{A}_2$ (relativer Fehler 35 % auf der Stelle i, k = 2,2) ein durchaus tragbares Endresultat $\hat{\boldsymbol{u}}_\infty(\boldsymbol{A}_2)$ erbracht, welches in den einzelnen Komponenten Abweichungen zwischen 5...10 % gegenüber $\hat{\boldsymbol{u}}_\infty(\boldsymbol{A}_1)$ nach Gl. (25) aufweist, was für thermische Abbilder noch immer zulässig zu sein scheint:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\infty(\boldsymbol{A}_2) = \begin{bmatrix} 1{,}60 \\ 0{,}91 \\ 2{,}05 \\ 1{,}95 \end{bmatrix} \text{p.u.}$$

7. Ausblick: Anwendung auf Kabel

Die Methode der thermischen Abbilder verlangt unter Umständen einen Wechsel der Arbeitsweisen, wenn man Betrachtungen über Motorwicklungen auf Kabelsysteme anwenden will. Zunächst ist klar, dass die Angabe einer konkreten Schaltung für eine gegebene Anordnung gemeinsam im Boden verlegter Energiekabel sehr schwierig sein dürfte, da diese Kabel zusammen mit dem sie umgebenden Sand in einem ebenen Temperaturfeld liegen, das die Wärmekapazitäten ebenso wie die Wärmewiderstände als in der Querschnittsebene verteilte Grössen enthält. Die einleitend zitierte Diskretisierung ist darum schwierig, weil man (anders als bei einem Motor) die Kapazitäten nicht sicher unterscheiden kann; wieviel Sand und wieviel Isolation ist zu einem Speicherbereich zu rechnen, würde man sich typisch fragen müssen.

Wenn das Kabelsystem überhaupt durch Exponentialfunktionen angenähert werden soll, dann reicht zur Nachbildung des zeitlichen Verlaufs wahrscheinlich eine geringe Anzahl von Speichern und Eigenwerten aus. Es wäre daher vernünftig, die Rangzahl des Systems n mit der Anzahl von Mess-Potentialen in der fraglichen Querschnittsebene in Einklang zu bringen, indem gleichzeitig die Messpunkte der Ebene Durchschnitte über die gesamte Kabellänge enthalten. Die nach der Widerstandsmethode auszumessenden Kabelseelen repräsentieren im wesentlichen Schwerpunkte der Speicherbereiche, wobei ausserhalb der Energiekabel liegende inaktive Wärmekapazitäten durch dünne Hilfskabel zu erfassen sind. Man hat also bei Kabelsystemen, im Gegensatz zu einem Motor, grundsätzlich die Möglichkeit, *Vektor*zustände $\boldsymbol{u}(t)$ zu messen.

Die gesuchte Matrix $(\boldsymbol{A})$ hat nichts mit der Belastung (Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u}_1$ einer beliebigen Probelast oder $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ der späteren, spezifisch intermittierenden Last) zu tun; sie kann nach Vorgabe der Zeitintervalle ($\Delta t = t_e, t_0$) aus der beliebigen Übergangsfunktion $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}_1, \Delta t)$ herausgelesen und berechnet werden. Aus praktischen Gründen wird man das Kabelsystem im Kurzschluss anwärmen und dann zur Widerstandsbestimmung mit einem relativ kleinen Gleichstrom beaufschlagen, der über je 2 Phasen desselben Kabels hin- und zurück- sowie über mehrere Kabelstrecken in Reihe geleitet wird. Während einer genügend langen Abkühlungszeit des Systems müssen die Spannungsabfälle über sämtlichen Kabelschleifen und der Strom (Spannung am Shunt) so genau wie möglich (min. 1‰ genau) erfasst und gespeichert werden. Ist die einmal erhaltene Messinformation auf einem Datenträger festgehalten, so kann sie jederzeit zusammen mit der Zeitkoordinaten abgerufen und rechnerisch weiterverarbeitet werden.

Es gibt bei den Kabeln keine Systemunterscheidung zwischen Heizen und Kühlen. Aber wenn die spezifische Aufgabe gestellt wird, dann können verschiedene Zeitwerte t_e, t_0 gegeben sein, welche es erforderlich machen, mit zwei Zeitvorgaben verschiedene Matrizen $\boldsymbol{U}_e$, $\boldsymbol{U}_0$ aus dem Datenspeicher zu entnehmen, daraus durch Rechnung zwei Matrizen $\boldsymbol{A}_e$, $\boldsymbol{A}_0$ zu berechnen und diese dann abschliessend in eine einzige Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ umzuformen. Die Anfangsbedingungen, z.B. stationäre Enderwärmungen $(\boldsymbol{w})$ oder Sprungpotentiale $(\Delta\boldsymbol{u})$ ergeben sich ähnlich wie bei den Motoren durch Rechnung. Hat man in einem weiteren Vorversuch durch Belasten eines Kabels nach dem anderen und Messen aller Kabel im Beharrungszustand die überlagerungsfähigen Einflusszahlen festgelegt, so ergibt sich der stationäre Vektor $\boldsymbol{w}$ als Vektortransformation am Wärmestromvektor $(\boldsymbol{i})$ mit der Matrix der Einflusszahlen (eine Widerstandsmatrix); die Sprungpotentiale, beispielsweise nach Netzkurzschlüssen, berechnen sich aus der adiabatischen Erwärmung des Kupfers, womit allerdings die Kapazität des nicht genau bekannten Wärmeknotens unterschätzt und der Temperatursprung überschätzt wird.

Das Zahlenbeispiel des Motors hat gezeigt, dass ein punktuelles Mehrkörpersystem mit genügendem messtechnischem Aufwand einwandfrei aus den Übergangskurven identifiziert werden kann. Anderseits kann die Übereinstimmung des in Wirklichkeit verteilten *Poisson*-Feldes mit einem Mehrkörpersystem u.U. durch Einführung zusätzlicher Messpotentiale

(Hilfskabel) beliebig gesteigert werden. Es ist also zu erwarten, dass trotz der numerisch mässig konditionierten U-Matrizen ein Verfahren realisierbar ist, welches gestattet, das Zeitverhalten ausgeführter Kabelstrecken als digitale Basisinformation permanent zu speichern, wobei im Prinzip eine Datenbank über die Untertage-Energieübertragungsstränge aufgebaut werden könnte, die dasselbe leisten würde wie entsprechende analoge Modelle.

Literatur

[1] *H. G. Gerlach:* Transiente thermische Vorgänge in normalen Käfigankermotoren und deren analoge Darstellung. Zürich, Verlag der Fachvereine an der ETH Zürich, 1974.

[2] *R. Zurmühl:* Matrizen und ihre technische Anwendungen. 4. Auflage. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1964.

[3] *R. Zurmühl:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Auflage. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.

Adresse des Autors

Dr.-Ing. *H. G. Gerlach,* Forschungskommission des SEV und VSE für Hochspannungsfragen (FKH), Seefeldstrasse 301, Postfach, 8034 Zürich.

Briefe an die Redaktion – Lettres à la rédaction

«Influence d'une rupture de barre ou d'un anneau sur les caractéristiques externes d'un moteur asynchrone à cage»

[Bull. SEV/VSE 69(1978)17, S. 921...925]

Zuschrift

This is timely and valuable work. It is necessary to improve our knowledge and its application, about insipient defects of machines. The eventual complete destruction of the machine should be avoided. The new era of high energy costs forces the early recognition of defects that reduce efficiencies.

The parasitic torque caused by the fracture has twice the slip frequency. It is expected to cause vibration and stator pulsation at twice slip frequency. This suggests that by monitoring vibration and/or stator current at twice slip frequency may furnish good and early warning of these fractures. Naturally, twice slip frequency will show other defects and anomalies. The 2 pole machines may have relatively higher twice slip frequency effects due to other deviations from complete circular symmetry.

It is thought that the parasitic torques are sufficiently high for detection by reduced voltage run-up tests. In this test the motor is started (free acceleration) at various different reduced voltages. Fracture of one bar, or of several adjacent bars will cause 'hang up' at half speed on reduced voltage.

It is notable that the stator current pulsations caused by bar fractures show different trends/patterns for the two motors. The 2300 kW, 3000 RPM, 2 pole motor shows a very steep rise in the pulsating stator current as the slip increases. I have applied correlation analysis and found that for one broken bar

$I_p = 4.83\ s^{1.82}$

Both I_p and s (slip) in %; the fit is good; coefficient of determination is 99%.

This leads to very high extrapolated values for high slip values. Possibly the rise would be far less steep if resistances were taken into account; some of these may be in the form of equivalents of stray load losses and parasitic core losses.

Similar analysis of the tested values of the small 4 kW, 3000 RPM, 2 pole motor leads to

$I_p = 1.24\ s^{0.59}$; for one broken bar

$I_p = 1.22\ s^{0.8}$; for two adjacent broken bars

Correlation is good, i.e. better than 98%. The tested values of the 4-kW-motor do not show levelling off or 'saturation effects', notwithstanding that the rate of rise with increasing slip is substantially lower than for the 2300-kW-motor.

A comparison of extrapolated values emphasizes these patterns:

Motor 3 phase, 50 Hz, 3000 RPM	I_p %			Remarks
	Slip 25%	Slip 50%	Slip 100%	
# 1 2300 kW	1 680	5 940	20 960	one broken bar
# 2 4 kW	8	12	19	one broken bar
# 2 4 kW	16	29	50	two broken bars

Caveats must be applied before extrapolating. What could have caused the choice of levelling off (saturation) slope for the relationship between I_p and s for the 4-kW-motor # 2? The test results do not appear to justify that choice.

The increase in the current of the rotor bars adjacent to the fractured bars is substantial as it goes up to 40% for fracture of three adjacent bars for the 2300-kW-motor # 1. Others report that adjacent to the fractured bar of a motor having 28 bars, the increase in current in the adjacent bars is 91% at 50 Hz, i.e. locked rotor, $s = 100\%$. Rapid, near violent heating follows and causes temperatures of 114 °C in 15 s [1].

The case of the fracture of two bars not adjacent but diametrically opposite to each other, is expected to be very different. A special case will be fractures that are more or less evenly distributed in a manner that corresponds to the number of poles. This might be caused by certain kinds of intolerably long time at zero speed on full voltage as it might occur on failure to start.

J. Szogyen, Glen Ridge, USA

Réponse de l'auteur

Les différentes remarques de M. John Szogyen-Delmar appellent les réponses suivantes:

1. Il est exact que des dissymétries de construction telles qu'excentricité du rotor, ovalisation du stator ou du rotor, etc. peuvent créer également une pulsation du courant. Cependant, dans tous les cas, une rupture de barre provoque un changement de l'amplitude d'oscillation du courant. C'est alors la variation d'amplitude qui est indicatrice du phénomène.

2. Des tests basés sur des tensions d'alimentation réduites ne sont pratiquement pas réalisables en exploitation.

3. Les approximations proposées pour l'évaluation du courant pulsant en fonction du glissement ne sont valables que pour des glissements faibles, n'excédant pas quelques %. A titre d'illustration, le calcul complet a été effectué pour le moteur N° 1, avec une barre cassée (fig. 1). On constate que le courant pulsant se stabilise à une valeur de 5% et non pas à 20960% pour un glissement égal à l'unité.

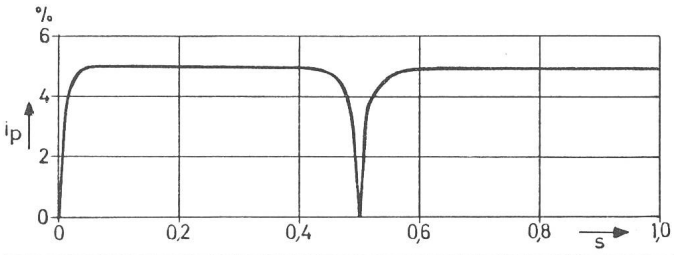

Fig. 1 Courant statorique pulsant relatif en fonction du glissement pour une barre cassée, moteur 1

De plus, le courant pulsant s'annule pour un glissement égal à 0,5, soit à mi-vitesse. Ce phénomène est dû à l'effet de Görge, bien connu dans les cas des machines synchrones démarrant en asynchrone.