# Ueber die Fresnel'sche Wellenfläche

Autor(en): **Geiser, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **54 (1871)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-89957

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Ueber die Fresnel'sche Wellenfläche.

—

*Vortrag gehalten in der Sitzung der mathematischen Sektion, Dienstag den 22. August 1871,*

von

Herrn Professor Dr. **C. F. Geiser.**

—

Nach einer mündlichen Mittheilung hat Steiner gefunden, dass der Ort der Mittelpunkte aller einem Ellipsoid umschriebenen Kegel, die von einer ihrer Hauptebenen in zwei zu einander senkrechten Geraden geschnitten werden, eine Wellenfläche sei. Da in den hinterlassenen Manuscripten des grossen Geometers nichts auf den Gegenstand Bezügliches sich vorgefunden hat, so bietet vielleicht die nachfolgende Behandlung des ausgesprochenen Theorems einiges Interesse dar.

Um den Zusammenhang der Darstellung nicht unterbrechen zu müssen, mögen zunächst einige bekannte, den Beweis vorbereitende Sätze dem Leser in's Gedächtniss zurückgerufen werden.

## I.

Die Gleichung eines Kegels $k$, der auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, dessen Ursprung mit dem Kegelmittelpunkt zusammenfällt, lautet:

$$1)\quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + {}_2A'\eta\zeta + {}_2B'\zeta\xi + {}_2C'\xi\eta = 0$$

und seine Axen*) hängen von der Gleichung dritten Grades ab:

$$2)\quad \begin{vmatrix} A-\lambda & C' & B' \\ C' & B-\lambda & A' \\ B' & A' & C-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn man mit $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnet, so kann man durch Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung den Kegel unter der Form darstellen:

$$\lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + \lambda_3 \zeta'^2 = 0.$$

Entwickelt man 2) nach Potenzen von $\lambda$ in die Form

$$-\lambda^3 + \mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C} = 0$$

so ist

$$3)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = A + B + C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \mathfrak{B} = A'^2 + B'^2 + C'^2 - BC - CA - AB = \\ \qquad -(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) \\ \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

## II.

Wenn der Kegel $k$ ein System von drei zu einander senkrechten Kanten enthält, so liegen deren unendlich viele auf ihm und man nennt ihn gleichseitig-hyperbolisch erster Art. Die analytische Bedingung dafür ist

$$\mathfrak{A} = 0.$$

Soll $k$ ein System von drei zu einander senkrechten Tangentialebenen enthalten, so besitzt er deren unendlich viele

---

*) Ist ein Kegel durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\eta^2}{m^2} + \frac{\zeta^2}{n^2} = 0$$

gegeben, so sind $l$, $m$, $n$ seine Axen, die also insofern unbestimmt sind, als man sie gleichzeitig mit dem nämlichen willkürlichen Faktor multipliziren darf.

und man nennt ihn gleichseitig-hyperbolisch zweiter Art. Die analytische Bedingung dafür ist

$$\mathfrak{B} = 0.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass wenn ein Kegel in zwei zusammenfallende Ebenen degenerirt, er dann dieser zweiten Art angehört; in der That lässt sich seine Gleichung

$$(p\,\xi + q\,\eta + r\,\zeta)^2 = 0$$

durch Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung stets auf die Form reduziren

$$\lambda_1\,\xi'^2 = 0,$$

d. h. von den drei Wurzeln der Gleichung, welche seine Axen bestimmt, werden zwei gleich Null, was nach der mittlern der Gleichungen 3) die Grösse B zum Verschwinden bringt.

Wenn ferner $k$ in zwei Ebenen zerfallen soll, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$\mathfrak{C} = 0.$$

Schneidet schliesslich eine seiner Hauptebenen den Kegel $k$ in zwei zu einander senkrechten Geraden, so muss seine Gleichung sich durch rechtwinklige Koordinatentransformation in

$$\lambda_1\,\xi'^2 + \lambda_2\,(\eta'^2 - \zeta'^2) = 0$$

verwandeln lassen, d. h. von den drei Wurzeln, die seine Axen bestimmen, müssen zwei (nach der getroffenen Annahme $\lambda_2$ und $\lambda_3$) gleichen absoluten Werth und entgegengesetztes Vorzeichen haben. Aus den Gleichungen 3) folgt aber unter Beachtung von

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

das System von Gleichungen:

$$\lambda_1 = \mathfrak{A}, \quad \lambda_2^2 = \mathfrak{B}, \quad \lambda_1\,\lambda_2^2 = -\,\mathfrak{C},$$

also ist die analytische Bedingung dafür, dass die Gleichung 1) einen Kegel von der verlangten Beschaffenheit darstelle:

$$4) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0.$$

# III.

Ist die Gleichung eines Ellipsoides $E$ in rechtwinkligen Koordinaten durch

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0$$

gegeben, so lautet die Gleichung des ihm vom Punkte $(x, y, z)$ aus umschriebenen Kegels $k_1$:

$$5)\qquad \left(\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}-1\right)^2$$

$$-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\cdot\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)=0.$$

Man kann $k_1$ parallel zu sich selbst verschieben, bis sein Mittelpunkt nach dem Koordinatenursprung gelangt, und erhält dann einen kongruenten Kegel $k$ mit der Gleichung

$$A\,\xi^2+B\,\eta^2+C\,\zeta^2+{}_2A'\,\eta\,\zeta+{}_2B'\,\zeta\,\xi+{}_2C'\,\xi\,\eta=0,$$

wenn

$$6)\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=A, & \frac{y\,z}{b^2c^2}=A', \\ -\frac{1}{b^2}\left(\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}-1\right)=B, & \frac{z\,x}{c^2\,a^2}=B', \\ -\frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=C, & \frac{x\,y}{a^2b^2}=C' \end{array}\right.$$

gesetzt wird.

Aus der Kongruenz von $k$ und $k_1$ folgt, dass die Gleichung dritten Grades, welche die Axen von $k_1$ bestimmt, identisch ist mit derjenigen, welche die Axen von $k$ liefert. Die Diskussion der Kegel, welche dem Ellipsoid $E$ umschrieben werden können, hängt also von der Gleichung 2) ab, wenn in dieselbe für $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$, die durch 6) gegebenen Werthe eingesetzt werden. — Die Kongruenz von $k$ und $k_1$ gilt nicht mehr, wenn $k_1$ ein Cylinder ist, sondern sie wird durch Aehnlichkeit ersetzt. Es reduzirt sich in

diesem Falle $k$ auf ein System zweier imaginärer Ebenen mit reeller Schnittgeraden.

## IV.

Es ist zunächst nöthig, unter Voraussetzung der Gleichungen 3) und 6) die Ausdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu bilden. Man findet leicht:

$$7)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left\{ \begin{array}{l} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - [(b^2 + c^2) x^2 + \\ (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2, \end{array} \right\}$$

also ergibt sich in Rücksicht auf II der Satz: Die Gleichung $\mathfrak{A} = 0$, welche ein Ellipsoid darstellt, gibt den Ort der Mittelpunkte aller gleichseitig-hyperbolischen Kegel erster Art, die dem Ellipsoid $E$ umschrieben werden können.

Der Ausdruck $\mathfrak{B}$ ist nach $x$, $y$, $z$ vom vierten Grade und stellt gleich Null gesetzt den Ort aller Punkte dar, die Mittelpunkte von solchen gleichseitig-hyperbolischen Kegeln zweiter Art sind, welche dem Ellipsoid $E$ umschrieben werden können. Da für einen Punkt auf $E$ der $E$-umschriebene Kegel in die zugehörige doppelt gelegte Tangentialebene ausartet, so muss nach II das Ellipsoid $E$ dem eben genannten Orte angehören, mit andern Worten: der Ausdruck $\mathfrak{B}$ enthält den Faktor

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Man weiss ferner, dass der Ort des Durchschnittspunktes dreier zu einander senkrechter Tangentialebenen von $E$ die Kugel $K = 0$ ist, wenn

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

angenommen wird. Jeder Punkt dieser Kugel ist Mittelpunkt eines dem Ellipsoid $E$ umschriebenen gleichseitig-hyperbolischen Kegels zweiter Art, d. h. auch $K$ ist ein Faktor von $\mathfrak{B}$. Man hat also, wenn $\mu$ einen noch zu bestimmenden Faktor bedeutet, die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu . \text{E. K.}$$

Durch Entwicklung derjenigen Glieder von $\mathfrak{B}$, welche $x^4$ enthalten, findet man

$$\mu = -\frac{1}{a^2\, b^2\, c^2},$$

demnach

$$8)\quad B = -\frac{1}{a^2\, b^2\, c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} - 1\right)[(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 + c^2)].$$

Der Ausdruck $\mathfrak{C}$, welcher nach $x$, $y$, $z$ scheinbar vom sechsten Grade ist, gibt gleich Null gesetzt den Ort der Punkte, deren zugehörige, $E$ umschriebene Kegel in ihren Axen von einer Gleichung dritten Grades abhängen, die eine Wurzel Null hat. Diese Kegel sind entweder Cylinder oder zerfallen in zwei Ebenen, und ihre Mittelpunkte liegen demnach auf dem Ellipsoid $E$ und der unendlich entfernten Ebene des Raumes. Es lässt sich hieraus bereits schliessen, dass $\mathfrak{C}$ eine Potenz, und zwar das Quadrat von $E$ mit einer leicht zu bestimmenden Konstanten multiplizirt sein muss; es kann diess aber noch auf einem andern Wege gezeigt werden, der zu einem an und für sich interessanten Ergebnisse führt.

## V.

Die Determinante

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) & \frac{y\,x}{b^2\, a^2} & \frac{z\,x}{c^2\, a^2} \\ \frac{x\,y}{a^2\, b^2} & -\frac{1}{b^2}\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1\right) & \frac{z\,y}{c^2\, b^2} \\ \frac{x\,z}{a^2\, b^2} & \frac{y\,z}{b^2\, c^2} & -\frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \end{vmatrix}$$

ist ein spezieller Fall von

$$\mathfrak{C}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn man für verschiedene $\varkappa$ und $\lambda$

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa} = \frac{x_\varkappa \; x_\lambda}{a_\varkappa^2 \, a_\lambda^2}$$

und unter Einführung von

$$E_n = 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \cdots\cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2}$$

wenn $\varkappa = \lambda$ ist,

$$a_{kk} = \frac{1}{a_k^2}\left(E_n + \frac{x_\varkappa^2}{a_\varkappa^2}\right)$$

setzt. Bezeichnet man noch zur Abkürzung $\frac{E_n \, a_\varkappa^2}{x_\varkappa^2}$ mit $u_k$, so hat man

$$a_{\varkappa\varkappa} = \frac{x_\varkappa^2}{a_\varkappa^4}(1 + u_\varkappa)$$

und

$$\mathfrak{C}_n = \begin{vmatrix} \frac{x_1^2}{a_1^4}(1+u_1) & \frac{x_2 \, x_1}{a_2^2 \, a_1^2} & \frac{x_3 \, x_1}{a_3^2 \, a_1^2} & \frac{x_n \, x_1}{a_n^2 \, a_1^2} \\ \frac{x_1 \, x_2}{a_1^2 \, a_{12}} & \frac{x_2^2}{a_2^4}(1+u_2) & \frac{x_3 \, x_2}{a_3^2 \, a_2^2} & \frac{x_n \, x_2}{a_n^2 \, a_2^2} \\ \frac{x_1 \, x_3}{a_1^2 \, a_3^2} & \frac{x_2 \, x_3}{a_2^2 \, a_3^2} & \frac{x_3^2}{a_3^4}(1+u_3) & \frac{x_n \, x_3}{a_n^2 \, a_3^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x_1 \, x_n}{a_1^2 \, a_n^2} & \frac{x_2 \, x_n}{a_2^2 \, a_n^2} & \frac{x_3 \, x_n}{a_3^2 \, a_n^2} & \frac{x_n^2}{a_n^4}(1+u_n) \end{vmatrix}$$

Aus jedem Element der $\varkappa^{\text{ten}}$ Horizontalreihe dieser Determinante kann man den Faktor $\frac{x_\varkappa}{a_\varkappa^2}$ absondern; in der übrig bleibenden Determinante hat jedes Element der $\lambda^{\text{ten}}$ Vertikal-

reihe den Faktor $\frac{x_\lambda}{a_\lambda{}^2}$, der ebenfalls abgesondert werden soll. Es ist dann nach ausgeführter Reduktion

$$\mathfrak{C}_n = \frac{x_1{}^2\, x_2{}^2 \ldots\ldots x_n{}^2}{a_1{}^4\, a_2{}^4 \ldots\ldots a_n{}^4} \begin{vmatrix} 1+u_1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1+u_2 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+u_3 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1+u_n \end{vmatrix}$$

Sei die in dem Produkte rechter Hand vorkommende Determinante $= \triangle$, so ist $\triangle$ eine ganze Funktion $n^{ten}$ Grades von $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$, welche jedesmal verschwindet, wenn irgend zwei derselben gleich Null sind. In der Funktion $n^{ten}$ Grades der u ist also jedes Glied ein Produkt der u, in welchem höchstens eines der u fehlt. Alle diese Glieder entstehen aus dem Diagonalglied der Determinante und geben

$$\triangle = u_1\, u_2 \ldots\ldots u_n \left\{ 1 + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots\ldots \frac{1}{u_n} \right\}.$$

Da $\frac{1}{u_\varkappa} = \frac{x_\varkappa{}^2}{a_\varkappa{}^2\, E_n}$ und $\frac{x_1{}^2}{a_1{}^2} + \frac{x_2{}^2}{a_2{}^2} + \ldots \frac{x_n{}^2}{a_n{}^2} = 1 - E_n$ ist, so folgt

$$1 + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{E_n}$$

also

$$\triangle = E_n{}^{n-1}\, \frac{a_1{}^2\, a_2{}^2 \ldots\ldots a_n{}^2}{x_1{}^2\, x_2{}^2 \ldots\ldots x_n{}^2}$$

und

$$\mathfrak{C}_n = \frac{E_n{}^{n-1}}{a_1{}^2\, a_2{}^2 \ldots\ldots a_n{}^2}.$$

Wendet man das erhaltene Resultat auf die Determinante $\mathfrak{C}$ an, indem man $n = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $a_1{}^2 = a^2$, $a_2{}^2 = b^2$, $a_3{}^2 = c^2$, $E_n = E$ setzt, so bekommt man

$$9)\quad \mathfrak{C} = \frac{E^2}{a^2\, b^2\, c^2} = \frac{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2}{a^2\, b^2\, c^2}.$$

# VI.

Soll der vom Punkte $(x, y, z)$ aus dem Ellipsoid $E$ umschriebene Kegel von einer seiner Hauptebenen in zwei zu einander senkrechten Geraden geschnitten werden, so muss der Punkt $(x, y, z)$ auf der Fläche

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$$

liegen, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ durch die Gleichungen 7), 8), 9) gegeben sind. Da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ den gemeinschaftlichen Faktor $E$ haben, so gehört das Ellipsoid $E$ dem gesuchten Orte*) an, und ausserdem besteht dieser noch aus der Fläche

$$F_4 = A.K - E = 0$$

oder entwickelt

$$10)\quad [(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)] . [(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 + c^2)] + \{b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2\} = 0.$$

Schneidet man das Ellipsoid

$$e = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} - 1 = 0$$

durch eine Ebene $P$, welche den Mittelpunkt $M$ von $e$ enthält, bestimmt die Axen der Schnittellipse und trägt deren Längen von $M$ aus auf der Normalen zu $P$ in $M$ ab, wodurch Endpunkte $p_1$ und $p_2$ entstehen, so wird durch Bewegung von $P$ um $M$ herum von den Punkten $p_1$ und $p_2$ eine Wellenfläche beschrieben, welche dem Ellipsoid $e$ zugeordnet heisst. Die Gleichung derselben ist

---

*) Diess folgt auch geometrisch, denn der zu einem Punkte auf $E$ gehörige umschriebene Tangentialkegel hängt in seinen Axen von einer Gleichung dritten Grades ab, von der zwei Wurzeln gleich Null sind. Derselbe erfüllt also die Bedingung $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, die mit $AB + C = 0$ identisch ist.

$$11)\quad (x^2+y^2+z^2)(l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2)+l^2m^2n^2 = l^2(m^2+n^2)x^2+m^2(n^2+l^2)y^2+n^2(l^2+m^2)z^2.$$

Setzt man $l^2 = b^2+c^2$, $m^2 = c^2+a^2$, $n^2 = a^2+b^2$, so geht, wie man durch Entwicklung gleichgearteter Koeffizienten verifizirt, die Gleichung 11) in die Gleichung 10) über, womit der an die Spitze dieser kleinen Abhandlung gestellte Steiner'sche Satz bewiesen ist. Er lautet nun vollständig so: Der Ort der Mittelpunkte aller einem Ellipsoid $E$ mit den Halbaxen a, b, c umschriebenen Kegel, welche von einer ihrer Hauptaxen in zwei senkrechten Geraden geschnitten werden, besteht aus $E$ selbst und der Wellenfläche, die dem mit $E$ konzentrischen und koacialen Ellipsoid, dessen $a$, $b$, $c$ entsprechende Halbaxen $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ sind, zugehört.

## VII.

Da die Gleichung 11) am bequemsten in der Form

$$12)\quad \frac{l^2x^2}{l^2-r^2}+\frac{m^2y^2}{m^2-r^2}+\frac{n^2r^2}{n^2-r^2}=0,$$

wo $r = x^2+y^2+z^2$ ist, dargestellt wird, so frägt es sich, ob die im Vorigen behandelte Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$ nicht direkt in 12) verwandelt werden könne.

Zur Beantwortung dieser Frage geht man auf die Gleichung 5) zurück und schreibt die in derselben enthaltenen Glieder zweiten Grades nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ abkürzend

$$(\beta_1\xi+\beta_2\eta+\beta_3\zeta)^2-(\alpha_1\xi^2+\alpha_2\eta^2+\alpha_3\zeta^2)$$

wo

$$\beta_1=\frac{x}{a^2},\quad \beta_2=\frac{y}{b^2},\quad \beta_3=\frac{z}{c^2};\quad \alpha_1=\frac{E}{a^2},\quad \alpha_2=\frac{E}{b^2},$$

$$\alpha_3=\frac{E}{c^2};\quad E=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Die Axen des vom Punkte $(x, y, z)$ aus dem Ellipsoid $E$ umschriebenen Kegels $k$ hängen von der Gleichung dritten Grades

$$13)\qquad \frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2+\lambda}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_3+\lambda}-1=0$$

ab. Wenn man 13) mit $(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)(\alpha_3+\lambda)$ multiplizirt, wodurch sie in

$$\beta_1^2(\alpha_2+\lambda)(\alpha_3+\lambda)+\beta_2^2(\alpha_3+\lambda)(\alpha_1+\lambda)+\beta_3^2(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)-(\alpha_1+\lambda)(\alpha_2+\lambda)(\alpha_3+\lambda)=0$$

oder in Voraussetzung von

$$14)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ \mathfrak{B}=\beta_1^2(\alpha_2+\alpha_3)+\beta_2^2(\alpha_3+\alpha_1)+\beta_3^2(\alpha_1+\alpha_2)- \\ \qquad (\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2) \\ \mathfrak{C}=\beta_1^2\alpha_2\alpha_3+\beta_2^2\alpha_3\alpha_1+\beta_3^2\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{cases}$$

in

$$-\lambda^3+\mathfrak{A}\lambda^2+\mathfrak{B}\lambda+\mathfrak{C}=0$$

übergeht, so wird diese Gleichung identisch mit der Gleichung 2), nachdem man in derselben die Substitutionen 6) ausgeführt hat. Es ergibt sich also unter Vergleichung gleichnamiger Potenzen von $\lambda$ in den gefundenen identischen Ausdrücken, dass die unter 14) dargestellten Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ resp. mit den unter 7), 8), 9) gegebenen übereinstimmen. Man würde diese Uebereinstimmung auch auf direktem Wege herleiten können, was hier aber nur für $\mathfrak{C}$ ausgeführt werden mag. — Es ist

$$\mathfrak{C}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left\{\frac{\beta_1^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_2^2}{\alpha_2}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_3}-1\right\}$$

$$=\frac{E^3}{a^2b^2c^2}\left\{\frac{x^2}{a^2E}+\frac{y^2}{b^2E}+\frac{z^2}{c^2E}-1\right\}$$

oder unter Berücksichtigung des Werthes von $E$ und nach Ausführung der nöthigen Reduktionen:

$$\mathfrak{C}=\frac{E^2}{a^2b^2c^2}.$$

# VIII.

Hat die Gleichung 13), deren Wurzeln mit $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ bezeichnet worden sind, zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, mit verschiedenen Vorzeichen versehene Wurzeln (wie diess für alle Punkte der zu untersuchenden Fläche eintreten muss), so dass $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist, so gelten nach II die Gleichungen

$$\lambda_1 = \mathfrak{A}, \quad \lambda_2^2 = \mathfrak{B}, \quad \lambda_1 \lambda_2^2 = -\mathfrak{C},$$

woraus $\lambda_1 = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, oder nach den in 8) und 9) gegebenen Werthen

$$\lambda_1 = \frac{E}{K}$$

folgt.

Unter Benutzung der bekannten Werthe von $\alpha_1$, $\beta_1$, $\lambda_1$ findet man

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_1} = \frac{\frac{x^2}{a^4}}{\frac{E}{a^2} + \frac{E}{K}} = \frac{K}{E} \cdot \frac{\frac{x^2}{a^2}}{K + a^2} = \frac{\frac{x^2}{a^2}}{E} - \frac{x^2}{E(K + a^2)},$$

ähnlich ergibt sich

$$\frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_1} = \frac{\frac{y^2}{b^2}}{E} - \frac{y^2}{E(K + b^2)}; \quad \frac{\beta_3^2}{\alpha_3 + \lambda_1} = \frac{\frac{z^2}{c^2}}{E} - \frac{z^2}{E(K + c^2)}$$

oder da

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda_1} + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3 + \lambda_1} - 1 = 0$$

ist, mit Unterdrückung des Faktors $\frac{1}{E}$:

$$15) \quad \frac{x^2}{K + a^2} + \frac{y^2}{K + b^2} + \frac{z^2}{K + c^2} = 1.$$

Setzt man $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, also $K = r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ und subtrahirt von 15) die identische Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

so erhält man, wenn der Rest mit $r^2$ multiplizirt wird:

$$16) \quad \frac{(b^2 + c^2)\, x^2}{r^2 - (b^2 + c^2)} + \frac{(c^2 + a^2)\, y^2}{r^2 - (c^2 + a^2)} + \frac{(a^2 + b^2)\, z^2}{r^2 - (a^2 + b^2)} = 0,$$

welche Gleichung mit 12) übereinstimmt, wenn man die in VI gemachten Annahmen über l, m, n berücksichtigt.

Diese zweite Lösung des Problems liefert in der Gleichung 16) neben der Wellenfläche noch die Fläche, welche durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

gegeben ist. Man sieht aber leicht ein, dass durch die eben ausgeführten Reduktionen aus der vollständigen Lösung der Gleichung $A\,B + C = 0$ das nothwendig zum gesuchten Orte gehörige Ellipsoid $E = 0$ ausgeschieden und dafür der fremde Faktor (der imaginäre Kegel) $r^2 = 0$ hinzugefügt worden ist. Unter Beachtung dieses Umstandes findet man also genau das am Schlusse von VI ausgesprochene Resultat.

## IX.

Um die im Bisherigen gegebenen Erörterungen über die dem Ellipsoid $E$ umschriebenen Kegel $k_1$ zu vervollständigen, mögen noch die unter ihnen enthaltenen Rotationskegel bestimmt werden. Soll $k_1$, in dessen Gleichung die Glieder zweiten Grades durch

$$(\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta)^2 - (\alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \zeta^2)$$

gegeben sind, ein gerader Kreiskegel sein, so muss die Gleichung

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1 + \lambda} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2 + \lambda} + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3 + \lambda} - 1 = 0$$

oder

$$\beta_1^2 (\alpha_2 + \lambda)(\alpha_3 + \lambda) + \beta_2^2 (\alpha_3 + \lambda)(\alpha_1 + \lambda) + \beta_3^2 (\alpha_1 + \lambda)$$
$$(\alpha_2 + \lambda) - (\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)(\alpha_3 + \lambda) = 0$$

zwei gleiche Wurzeln haben.

Werden $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ als von Null verschieden vorausgesetzt, so tritt das Verlangte nur ein, wenn

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

ist. Diese Gleichung wird erfüllt (wie man unter Berücksichtigung der in § VII entwickelten Werthe von $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, erkennt), wenn

$$E = 0,$$

also alle drei $\alpha$ verschwinden, d. h.: Für irgend einen Punkt des Ellipsoids ist der zugehörige umschriebene Kegel ein Rotationskegel. Dieses Resultat ist auch geometrisch leicht zu erklären, da eine doppelt gelegte Ebene immer als Rotationskegel aufgefasst werden kann.*)

Ist eines der $\beta$, z. B. $\beta_1 = 0$, so wird $k_1$ ein Rotationskegel sein, wenn die Gleichung

17) $(\alpha_1+\lambda)[\beta_2^2(\alpha_3+\lambda)+\beta_3^2(\alpha_2+\lambda)-(\alpha_2+\lambda)(\alpha_3+\lambda)]=0$

eine Doppelwurzel hat. — Es ist nun entweder der in der eckigen Klammer eingeschlossene Ausdruck der Gleichung 17) ein vollständiges Quadrat, also

18) $\left\{(\beta_2^2-\alpha_2)-(\beta_3^2-\alpha_3)\right\}^2+4\,\beta_2^2\,\beta_3^2=0,$

oder aber es ist $-\alpha_1$ die verlangte Doppelwurzel, was eintritt, wenn

19) $\beta_2^2(\alpha_3-\alpha_1)+\beta_3^2(\alpha_2-\alpha_1)-(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)=0$

ist.

Die Bedingung $\beta_1 = 0$, zusammengenommen mit der Gleichung 18), welche in zwei Gleichungen zerfällt, gibt unter der Voraussetzung $a > b > c$ die Endpunkte der mittlern und kleinsten Axe des Ellipsoids als Scheitel von Rotationskegeln $k_1$, welche $E$ umschrieben sind.

---

*) Die Gleichung dritten Grades, von der für $E = 0$ die Axen des Kegels abhängen, hat dann die Doppelwurzel Null, während die dritte Wurzel durch $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$ gegeben ist.

Wird $\beta_1 = 0$ mit 19) kombinirt, so findet man als Ort solcher Scheitel zunächst den Schnitt von $E$ mit der $yz$-Ebene und dann den in dieser Ebene gelegenen (imaginären) Fokalkegelschnitt des Ellipsoids

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0.$$

Setzt man nacheinander $\beta_2$ und $\beta_3$ gleich Null und verfährt wie vorhin, so erhält man die beiden andern Fokalkegelschnitte:

$$\frac{z^2}{c^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$