Sektion für Mathematik

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **111 (1930)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Freitag, 12. September 1930

Präsident: Prof. Dr. S. Dumas (Bern)
Aktuar: Prof. Dr. W. Saxer (Zürich)

1. Emile Marchand (Zurich). — *Le problème du risque dans l'assurance sur la vie.*

Le résultat financier des entreprises d'assurance sur la vie dépend d'un grand nombre de facteurs: les uns très importants, comme par exemple les fluctuations du taux de l'intérêt, les épidémies, les guerres, qui ne permettent pas une prévision mathématique; d'autres moins importants, comme par exemple les fluctuations de la mortalité dues au hasard, qui peuvent faire l'objet d'une étude au point de vue mathématique, en admettant certaines hypothèses, qui, à vrai dire, ne sont pas réalisables (table de mortalité exacte, répartition uniforme des capitaux, indépendance des risques assurés entre eux). Le problème du risque, autrement dit l'étude des écarts dus uniquement au hasard entre la mortalité effective et la mortalité présumée, a-t-il dans ces conditions un intérêt? Certainement, tout d'abord un intérêt théorique pour satisfaire notre curiosité scientifique, et, au point de vue pratique, il a l'avantage de nous indiquer les méthodes pour la détermination d'une valeur minimum de la réserve pour les fluctuations du risque dues au hasard.

Le 9e Congrès international d'actuaires tenu à Stockholm en juin 1930 avait proposé comme sujet de discussion, parmi d'autres, le problème du risque dans l'assurance sur la vie. Parmi les résultats publiés, les suivants méritent d'être relevés:

1° La prime ou les primes déterminées dans la supposition que sur l_x personnes d'âge x il en meurt exactement la 1re année d_x, la 2e année d_{x+1} etc., et qu'il en vive à l'âge $x+n$ l_{x+n} sont exactement celles auxquelles on est conduit en faisant une supposition plus générale, à savoir que sur l_x personnes, il en meurt la 1re année a_1, la 2e année a_2, etc., et qu'il en vive à l'âge $x+n$ a_{n+1}, toutes les possibilités de la décomposition de l_x en $a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}$, en nombres entiers non négatifs, intervenant avec la probabilité de leur arrivée.

2° Le calcul du risque moyen pour un groupe de s assurés de même âge, à savoir le calcul de la racine carrée de la somme des carrés

des pertes et des bénéfices possibles, chaque perte et chaque bénéfice intervenant avec la probabilité de son arrivée, peut être ramené aux opérations successives suivantes:

a) calcul du risque moyen quadratique dans le cas d'un assuré pris individuellement pour les années d'assurance successives,
d'où *b)* détermination du risque moyen quadratique toujours dans le cas d'un assuré pour la durée totale de l'assurance,
d'où *c)* calcul du risque moyen quadratique pour le groupe de s assurés pour la durée totale de l'assurance.

Cette méthode s'appuie entre autres sur un théorème dû à Hattendorff, dont plusieurs démonstrations rigoureuses ont été publiées en 1929.[1]

3° Le calcul du risque moyen linéaire pour un assuré pris individuellement, autrement dit le calcul de la moyenne arithmétique des pertes et des bénéfices possibles en valeur absolue, chaque perte et chaque bénéfice intervenant avec la probabilité de son arrivée, ne présente pas de difficulté. Par contre, l'extension à un groupe de s assurés n'a été résolue que dans un nombre restreint de cas simples.

4° La prudence s'impose avant d'appliquer les résultats de la théorie des erreurs au problème du risque dans l'assurance sur la vie. Lorsque le nombre d'assurés n'est pas très grand, la répartition des décès autour de la valeur la plus probable est donnée plus exactement par les exposants de Poisson[2] que par l'application de la loi de Gauss.

2. Dr. J. J. Burckhardt (Basel). — *Zur Kristallographie.*

Die Herleitung der Bewegungs- oder Raumgruppen erfolgt in allen bekannten Darstellungen auf geometrischem Wege, indem man die zulässigen Symmetrieelemente in die möglichen Gittertypen einbaut. Es soll hier ein arithmetischer Weg zur Auffindung der Bewegungsgruppen beschritten werden, auf dem wohl einiges in ihrer Struktur klarer hervortritt. Wir erläutern die Verhältnisse an den 17 ebenen Bewegungsgruppen.

Es gibt in der Ebene zwei verschiedene Klassen, die alle anderen als Untergruppen enthalten, nämlich die Diedergruppe des regulären Sechsecks (hexagonale Gruppe) und die Diedergruppe des Quadrates (quadratische Gruppe). Die hexagonale Gruppe hat drei eigentliche inäquivalente Untergruppen, die quadratische sechs, so dass man zusammen mit der Identität oder dem triklinen System zwölf rotative Gruppen erhält. In jeder dieser rotativen Gruppen sind nun die Raumgruppen zu suchen nach der Methode, die in einer Arbeit in den Comment. Math. Helv. Bd. 2, S. 91, auseinandergesetzt ist. Wichtig ist dabei, dass der Äquivalenzbegriff richtig gefasst wird, man muss ihn etwas enger nehmen als in jener Arbeit. Dabei gehören in der dortigen Bezeichnungsweise

[1] J. F. Steffensen. On Hattendorff's Theorem in the Theory of Risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1929; Häft 1—2.

[2] Karl Pearson. — Tables for Statisticians and Biometricians 1914, p. 113.

die Raumgruppen $\mathfrak{C}_s^{\mathrm{III}}$ und $\mathfrak{C}_{2v}^{\mathrm{IV}}$ nicht zu den Klassen C_s bzw. C_{2v}, sondern bilden rotative Gruppen für sich, die aus den Elementen e_1, e_7 bzw. e_1, e_3, e_7, e_8 bestehen; sie sind die einzigen Raumgruppen dieser rotativen Gruppen.

Es wird nun weiter ausgeführt, wie man von diesen 17 ebenen Bewegungsgruppen $\mathfrak{G}$ zu den 80 Bewegungsgruppen $\mathfrak{S}$ der doppelt zu zählenden Ebene kommt. Besonders einfach liegen die Verhältnisse im hexagonalen Fall. Bedeute w die Spiegelung an der Ebene. Dann treten auf: $\mathfrak{C}_3^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{C}_3^{\mathrm{I}} \times w$ (das direkte Produkt), $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{I}} \times w$ und $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{II}} \times w$, ferner $\mathfrak{C}_6^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}_6^{\mathrm{I}} \times w$, $\mathfrak{C}_{6v}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{C}_{6v}^{\mathrm{I}} \times w$. Ferner geben die Untergruppen vom Index zwei Anlass zu einer Raumgruppe, indem die Untergruppe invariant bleibt, die Nebengruppe aber gespiegelt wird. Dies liefert für $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}_{3v}^{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{C}_6^{\mathrm{I}}$ je eine, für $\mathfrak{C}_{6v}^{\mathrm{I}}$ zwei weitere Raumgruppen, so dass man insgesamt die 15 Gruppen der hexagonalen Abteilung erhält. Bei der quadratischen Gruppe liegen die Verhältnisse deshalb komplizierter, weil mit der Spiegelung w noch Translationen um die halbe Einheit in der einen oder anderen Koordinatenrichtung oder in das Zentrum des Elementarparallelepipedes verbunden sein können.

Es wird vermutet, dass der folgende Satz, vielleicht mit einer Einschränkung für die Klasse C_{2v}, gilt: Alle Raumgruppen $\mathfrak{G}$ derselben Klasse liefern bei Erweiterung zu den Raumgruppen $\mathfrak{S}$ der doppelt gezählten Ebene d i e s e l b e Anzahl von Gruppen. Der Beweis dieses Satzes ist jedoch noch nicht erbracht. Ferner wäre von Interesse, die Bedeutung der Anzahl der zu einer Raumgruppe äquivalenten Gruppen zu erforschen.

3. L. Kollros (Zurich). — *Problèmes et théorèmes de géométrie.*

1. Problèmes d'Apollonius et de Steiner sur une quadrique S. On donne 3 coniques a_1, a_2, a_3, sur S; trouver les coniques de S tangentes à la fois à a_1, a_2 et a_3. Les sommets des 6 cônes du 2^d ordre joignant 2 à 2 les coniques données sont, 3 à 3, sur 4 droites d; par chacune d'elles, on mène les paires de plans tangents aux 3 cônes dont les sommets sont sur la droite; les 8 plans ainsi obtenus coupent S suivant les 8 coniques cherchées. — Si S est une sphère, les cercles isogonaux aux 3 cercles a_1, a_2, a_3 sont sur 4 faisceaux de plans dont les axes sont les 4 droites d. La détermination des cercles de S qui coupent a_1, a_2, a_3 sous des angles donnés ψ_1, ψ_2, ψ_3 se ramène au problème d'Apollonius. — Il y a 8 cercles isogonaux à 4 cercles d'une sphère S: les sommets des 12 cônes du 2^d ordre passant par ces cercles, pris 2 à 2, sont 6 à 6 dans 12 plans; 4 de ces plans ne dépendent que de 3 des 4 cercles; les 8 autres coupent S suivant les 8 cercles isogonaux cherchés.

En partant d'une hypersphère de l'espace à 4 dimensions e_4, on trouverait de même les 16 sphères tangentes à 4 sphères, ou les coupant sous des angles donnés, ou isogonales à 5 sphères données.

2. *Problème de Malfatti sur une quadrique* S. On donne 3 coniques a_1, a_2, a_3 sur S; trouver 3 autres coniques de S tangentes entre elles et dont chacune touche 2 des coniques données (Solution dans l'Enseignement math.; C. R. de la séance de St-Gall). Pas de généralisation dans les espaces de dimensions supérieures.

3. *Configuration de Clifford.* La figure de Clifford (Math. Papers p. 38) devient par projection stéréographique, une configuration de 2^n plans et 2^n points telle que chaque plan passe par $(n+1)$ points et que chaque point soit sur $(n+1)$ plans. Il n'existe pas de théorème analogue à celui de Clifford dans l'espace à 3 dimensions e_3, mais si l'on considère 5 plans de e_3 et les 5 sphères circonscrites aux tétraèdres qu'ils déterminent, 4 à 4, on arrive, par projection stéréographique sur une hypersphère de e_4, à une configuration de 10 solides et de 16 points telle que chaque solide contienne 8 points et que 5 solides passent par chaque point.

En partant de 6 plans quelconques de e_3, on arrive, dans e_4, à une configuration de 27 solides $(6+15+6)$ et de 72 points $(1+20+30+20+1)$ analogue à celle des 27 droites et des 36 double-six de la surface du 3e degré.

4. Le théorème du *double-six de Schläfli* est identique au *théorème de Miquel* (5 droites prises 4 à 4, déterminent 5 paraboles telles que les 5 foyers soient sur 1 cercle). Voir Ens. math. 1930.

4. A. Speiser (Zürich). — *Ein Satz über topologische Bäume.*

Ein topologischer Baum setzt sich in folgender Weise aus gerichteten Strecken zusammen: Man beginnt mit einer ersten Strecke (1. Generation) und setzt an ihren Endpunkt eine endliche Zahl von Strecken an (2. Generation), an deren Endpunkte wird wieder je eine endliche Zahl neuer Strecken angesetzt. In dieser Weise fährt man fort. Kein Endpunkt bleibt unbesetzt, auch wird niemals ein Endpunkt mit einer früheren Strecke verbunden. Unter einer Endfolge verstehe ich eine unendliche Folge zusammenhängender Strecken, welche aus jeder Generation je eine Strecke enthält. Dann wird folgender Satz bewiesen: Die Anzahl der Endfolgen ist entweder endlich oder abzählbar unendlich oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Quartum non datur.

Der Beweis geschieht durch eine Operation, die sich in drei Stücke zerlegt: die Weglassung der Knoten (Stellen, wo bloss zwei Strecken zusammenhängen), das Abschneiden der kahlen Äste (unendliche Folgen von Strecken, die bloss Knoten zwischen sich haben) und das Säubern des Baumes. Diese Operation muss im allgemeinen unendlich oft ausgeführt werden, aber ihre Zahl kann durch eine transfinite Ordnungszahl höchstens der zweiten Zahlklasse gemessen werden. Falls nach der Durchführung dieser Säuberung noch etwas übrig bleibt, dann ist die Anzahl der Endfolgen von der Mächtigkeit des Kontinuums, im andern Fall dagegen endlich oder abzählbar.

5. G. Tiercy (Genève). — *De la densité superficielle moyenne de la terre et des dimensions du sphéroïde terrestre.*

On sait que l'Union géodésique internationale, ne prenant en considération que des calculs précessionnels et gravifiques de première approximation, a adopté la valeur $h = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}$ pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre. On sait aussi que les mesures géodésiques conduisent à une valeur voisine de $\frac{1}{294}$. Ce désaccord apparent, dit désaccord de Poincaré, n'existe plus, semble-t-il, depuis la remarquable étude de M. R. Wavre;[1] ce dernier a montré qu'en seconde approximation, les calculs précessionnels et gravifiques donnent aussi une solution proche de $\frac{1}{294}$.

Pour étudier la répartition de la densité à l'intérieur du globe terrestre, j'ai repris l'équation de Clairant,[2] qui paraît être suffisante; et j'ai adopté les valeurs de seconde approximation de Wavre, soit $h = \frac{1}{294}$ pour l'aplatissement et $\varphi = \frac{1}{288{,}42}$ pour le rapport de la force centrifuge équatoriale à la pesanteur équatoriale.

Considérant alors la densité ϱ comme une fonction continue $\varrho = \Phi(A)$ du rayon équatorial (A), suivant le procédé de Tisserand, et supposant cette fonction développable suivant les puissances de A, j'ai repris l'hypothèse de Roche:

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \beta A^2\right),$$

où ϱ_0 représente la densité centrale. Le calcul m'a conduit[2] à la solution numérique;

$$\varrho = 9{,}93\,(1 - 0{,}740\,A^2);$$

avec $A = 1$, on trouve $\varrho_1 = 2{,}6$ pour la densité superficielle moyenne, en accord avec la valeur actuellement adoptée.

L'aplatissement d'une couche quelconque est donné par la relation:

$$h = 0{,}00285$$
$$[1 + 0{,}1269\,A^2 + 0{,}0407\,A^4 + 0{,}0153\,A^6 + 0{,}0062\,A^8 + \ldots];$$

et un rayon R non équatorial est représenté, en fonction de A et de la colatitude Θ, par:

$$R = A\left[1 - h\cos^2\Theta - \frac{3}{2}h^2\sin^2\Theta\cdot\cos^2\Theta\right].$$

---

[1] *Archives* (5), 11, p. 131, 212, 295; (5), 12, p. 11. — *Publ. de l'Obs. de Genève,* fasc. 8 et 10.

[2] *Archives* (5), 12, p. 115; *Publ. de l'Obs. de Genève*, fasc. 12.

Par approximations successives, ces deux relations combinées fournissent une valeur de A correspondant à un point quelconque donné (R, θ) ; et, en portant cette valeur de A dans $\varrho = 9{,}93\,(1 - 0{,}740\,A^2)$, on trouve la densité ϱ en ce point.

En résumé, par l'adoption des valeurs de seconde approximation pour h et φ, et en conservant l'équation de Clairant et l'hypothèse de Roche, on obtient une solution numérique convenable pour la densité moyenne des couches superficielles de la Terre.

Il est évident que cette conclusion milite en faveur de l'adoption de la valeur $h = \frac{1}{294}$ pour l'aplatissement. A ce sujet, il est curieux de constater que des solutions numériques sensiblement différentes sont actuellement utilisées par les instituts nationaux de géodésie, soit pour h, soit pour les rayons a et b (équatorial et polaire) de l'ellipsoïde. Les valeurs admises pour h vont de $\frac{1}{293{,}5}$ à $\frac{1}{309{,}7}$; or, seule, la valeur $\frac{1}{294}$ donne satisfaction dans le problème de la densité superficielle ; et d'autre part, c'est celle qui convient le mieux à la théorie de la lune.

Il semble dès lors que l'Union géodésique internationale serait bien inspirée de l'adopter, en lieu et place de la valeur $\frac{1}{297}$, qui ne saurait donner satisfaction suffisante.

6. R. Wavre (Genève). — *Sur les rotations permanentes de genre un dans un champ extérieur.*

Cette note ne vise qu'à indiquer que la méthode de la cavité s'étend au cas d'une masse fluide hétérogène en rotation, soumise à l'attraction de corps extérieurs en plus de son attraction propre.

Il serait trop long de résumer ici cette méthode. Nous prions le lecteur de bien vouloir se référer à notre exposé synthétique donné au « Bulletin de la Société mathématique de France » t. LVII, Fasc. III—IV, p. 222—251. Si la masse fluide se trouve dans un champ extérieur constant relativement aux axes en rotation, il suffit d'ajouter le potentiel du champ extérieur aux seconds membres des équations (6) et (18). Les propriétés caractéristiques des rotations permanentes de genre un ne sont pas altérées et le système fondamental (32) contiendra aux seconds membres les différents termes du développement du nouveau potentiel. Ainsi, la méthode de la cavité s'étend à ce que les anglais appellent « The Tidal Problem » et aussi au problème des étoiles doubles. On peut aussi l'appliquer à la figure de la planète Saturne en tenant compte de l'anneau.

L'étude de ces différents cas est trop longue pour être exposée ici et je me contente de cette indication concernant la méthode.

7. Gustave Dumas (Lausanne). — *Sur la structure d'une surface analytique au voisinage d'un point donné.*

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

l'équation d'une surface analytique au voisinage du point O, de coordonnées $x = y = z = 0$. $f(x, y, z)$ est ainsi une série entière en x, y, z.

On suppose le point O *singulier* pour la surface. La série, au premier membre de (1), ne contient, donc, ni terme constant, ni termes du premier degré.

On démontre alors, en se fondant sur la considération du polyèdre analytique de $f(x, y, z)$, qu'en général et à l'opposé de ce qui se passe en général pour les courbes, le *continuum* défini par (1) est d'*un seul tenant* au voisinage de O.

D'un autre côté, si l'on introduit la notion de *courbe nulle* ou, ce qui revient au même, de *point fondamental,* on voit que le polyèdre permet de considérer un point singulier tel que O, comme constitué par une *superposition de courbes nulles* en O.

A chaque face du polyèdre correspondent une ou plusieurs courbes nulles. Ces faces les définissent et définissent aussi ce qu'on peut appeler leurs voisinages respectifs en O. Ces voisinages correspondant respectivement aux *„éléments complets de Weierstrass“* en O, [1] *épuisent,* dans leur ensemble, *complètement la singularité.*

A chaque arête du polyèdre correspondent, d'autre part, toujours confondus en O, certains points que l'on doit regarder comme des points d'intersection entre elles des courbes nulles relatives aux faces déterminant l'arête. Ces points et leurs voisinages immédiats forment la transition entre les voisinages des courbes nulles et fixent, par conséquent, le mode de *connexion* de la surface au voisinage de O.

Les substitutions introduites ailleurs, [2] établissent ces différents faits et conduisent finalement à une représentation analytique complète de la surface en O. Elles donnent en particulier, chose essentielle, les *lignes singulières* issues, cas échéant, de O.

Une théorie mettant en lumière les points principaux se trouve, de la sorte, esquissée dans les lignes qui précèdent. Cette théorie exige d'assez longs développements. Toutes choses égales, elle ne diffère pas sensiblement des théories relatives aux points singuliers des courbes planes.[3] Pour les surfaces, le polyèdre analytique paraît occuper la même place, avoir la même importance, que le polygone de Newton pour les courbes.

---

[1] Actes du Congrès international de Bologne, Septembre 1928.

[2] Actes de la Soc. helv. des Sc. nat., Soleure, 1911, Altorf, 1912, ainsi que C. R. tomes 152 et 154.

[3] Commentarii mathematici helvetici, tome I, p. 120.