Section de Mathématiques

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **126 (1946)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Dimanche, le 8 septembre 1946

Président : Prof. Dr MAX GUT (Zurich)
Secrétaire : Prof. Dr CHARLES BLANC (Lausanne)

1. HANS BIERI (Bern). — *Eine neue Methode zur Lösung von Randwertproblemen der Variationsrechnung.*

Wichtige Probleme der Variationsrechnung sind vom Typus

$$\int \sqrt{\Phi(\mathfrak{x})}\ \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}\ dt = \text{Minimum mit } \Phi = a_{ik}x_ix_k + 4\, b_ex_e + c \quad (i,\ k,\ l = 1 \ldots . n)$$

Meines Wissens ist das Randwertproblem, sofern Φ alle Koordinaten explizit enthält, nicht gelöst worden. Dies liegt daran, dass die Enveloppenbedingung nicht ausgewertet werden konnte.

Wir greifen den geometrisch und physikalisch bedeutsamen Fall $n = 3$ heraus, legen aber den folgenden Betrachtungen das vierdimensionale Problem

$$\int \sqrt{a_{ik}x_ix_k + 4\, b_ex_e + c}\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{w}^2}\ dt = \text{Minimum}$$

zugrunde[1]. Die Extremalen sind von der Form $x_i = x_i\,(P_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, t)$[2], während die Gleichung $\dfrac{\partial\,(x, y, z, w)}{\partial\,(t, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)} = o$ bezüglich $\cos \varkappa_3$ quadratisch ist. Dieser Umstand gestattet die mühelose Aufstellung der Enveloppenhyperflächengleichung.

Zwecks Erleichterung der Diskussion eliminiert man die übriggebliebenen Winkelgrössen, führt x, y als Parameter ein und untersucht die Schnittkurve der Enveloppe mit der (z, w)-Hyperebene.

Es ist auch möglich, die ersten drei Extremalengleichungen nach den Winkelgrössen aufzulösen und so die Enveloppenbedingung mit τ als einziger unabhängigen Variablen & x, y, z als Parameter darzustellen[3].

---

[1] Dasselbe enthält für $w \equiv o$ das zu lösende dreidimensionale.
[2] P_0 ist der Knotenpunkt, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sind Richtungsparameter.
[3] Mit $t = \tau$ berührt die Extremale die Enveloppe.

Die Bewältigung der resultierenden transzendenten Gleichung erfordert dann neue Hilfsmittel der Kurvendiskussion, auf die in diesem Zusammenhang nicht eingetreten werden kann.

2. Beno Eckmann (Lausanne). — *Polyeder und Operatoren.*

Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ des Polyeders P sei in bestimmter Weise durch Operatoren (Automorphismen) der Abelschen Gruppe J dargestellt. Dann kann man den üblichen Cohomologiegruppen von P bezüglich J « Operator-Cohomologiegruppen » B^n_{op} $n = 0, 1, 2, \ldots$ zur Seite stellen, gestützt auf eine Randdefinition der Zellen von P, in welcher die Inzidenzzahlen nicht nur 0, $+1$, -1 oder andere ganze Zahlen sind, sondern beliebige Operatoren von J, die mit Hilfe geschlossener Wege und der gegebenen Darstellung von $\mathfrak{F}$ eingeführt werden. Solche Cohomologiegruppen sind in anderer Form (mit Hilfe lokaler Koeffizienten) schon von Steenrod [1] definiert worden. Ist die Darstellung von $\mathfrak{F}$ trivial, das heisst entspricht jedem Element von $\mathfrak{F}$ die Identität von J, so erhält man die gewöhnlichen Cohomologiegruppen von P. — Die Gruppen B^n_{op} lassen sich besonders einfach in der *universellen Überlagerung* Q von P beschreiben : Man fasse $\mathfrak{F}$ als Decktransformationengruppe von Q über P auf und nenne eine Funktion f^n der n-dimensionalen Zellen z^n von Q mit Werten in J *invariant* bezüglich der gegebenen Darstellung von $\mathfrak{F}$, wenn für jede Zelle z^n und jedes Element x von $\mathfrak{F}$

$$f^n(xz^n) = x \cdot f^n(z^n)$$

ist (der Ausdruck rechts bedeutet, dass der Operator x auf das Element $f^n(z^n)$ von J auszuüben ist). Die Gruppen B^n_{op} des Polyeders P sind dann isomorph den « invarianten Cohomologiegruppen » der universellen Überlagerung Q, das heisst den mit der gewöhnlichen Randdefinition, aber ausschliesslich mit invarianten Funktionen gebildeten.

Man kann nun zeigen, dass die invarianten Cohomologiegruppen von Q in gewissem Masse durch die Struktur der Gruppe $\mathfrak{F}$ und ihre Darstellung in J bestimmt, im übrigen also vom Polyeder P oder Q unabhängig sind; es gilt genauer der *Satz: Sind die (gewöhnlichen) ganzzahligen Homologiegruppen von Q in den Dimensionen $< N$ alle $= 0$, so sind die invarianten Cohomologiegruppen von Q in diesen Dimensionen, ferner eine gewisse Untergruppe der N-ten, durch $\mathfrak{F}$ und die Darstellung von $\mathfrak{F}$ in J bestimmt.* Speziell ergibt sich, dass in einem zusammenhängenden Polyeder P, welches in den Dimensionen $2 \leqq n \leqq N-1$ *asphärisch* ist, die Operator-Cohomologiegruppen B^n_{op}, $n < N$, ferner eine Untergruppe von B^N_{op} durch die Fundamentalgruppe und ihre Darstellung in J bestimmt sind. Es besteht also die Möglichkeit, für die Berechnung der B^n_{op} bis zu einer gewissen Dimension das Polyeder durch ein anderes, eventuell einfacheres, mit isomorpher

[1] *N. E. Steenrod,* Ann. of Math. 44 (1943), 610—627.

Fundamentalgruppe zu ersetzen. Überdies lässt sich der Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ und den B^n_{op} rein algebraisch beschreiben durch eine abstrakte *Operator-Cohomologietheorie in beliebigen Gruppen,* die der entsprechenden Theorie ohne Operatoren [1] völlig analog ist, und deren algebraische Bedeutung man weiter verfolgen kann; es ergeben sich geometrische und algebraische Anwendungen, zum Beispiel auf die Erweiterungstheorie der Gruppen nach Schreier.

Um den genannten *Satz* in voller Allgemeinheit zu formulieren und zu beweisen, kann man die Überlagerung Q durch einen beliebigen abstrakten Komplex mit Automorphismen [2] und $\mathfrak{F}$ durch die zugehörige Automorphismengruppe ersetzen; der Beweis stützt sich auf einen algebraischen Homotopiebegriff. Die Resultate lassen sich auch auf den Cohomologiering ausdehnen. — Eine ausführliche Arbeit, auf die wegen aller Einzelheiten verwiesen sei, ist in Vorbereitung.

3. Sophie Piccard (Neuchâtel). — *Les systèmes de substitutions qui engendrent un groupe régulier.*

Soient m et n deux entiers > 1 et soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions régulières indépendantes des éléments 1, 2, ..., n. Soit k un entier $\geqq 1$ et $< m$ et soient 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ substitutions distinctes quelconques du système 1). Nous disons qu'un sous-ensemble E de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est un *domaine de connexion* des substitutions 2) si E se compose de la totalité des éléments d'un certain nombre de cycles de chacune des substitutions du système 2), alors qu'aucun sous-ensemble propre de E ne jouit de cette propriété. Soient 3) $E_1, E_2, \ldots, E_l$ les divers domaines de connexion des substitutions 2). On a $l \geqq 1$, $E_1 + E_2 + \ldots + E_e = \{1, 2, \ldots, n\}$ et les ensembles E_i sont disjoints deux à deux. Si $l = 1$, nous disons que les substitutions 2) constituent un *système connexe.* Quel que soit l'entier $l \geqq 1$, nous disons que les substitutions du système 2) ont un *ordre de connexion* fixe (égal à n/l) si tous les ensembles 3) sont d'égale puissance. Nous dirons que le système 1) est *régulier* s'il jouit des propriétés suivantes: le système 1) est connexe alors que tout système 2) possède un ordre de connexion fixe, mais il n'est pas connexe, et, quelle que soit la substitution S_i de 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe deux entiers fixe r et ϱ, tels que S_i transforme les éléments de chaque ensemble 3) en éléments de r autres ensembles 3), et, si S_i transforme un élément (au moins) d'un ensemble E_i en un élément d'un ensemble E_j $(i, j = 1, 2, \ldots, l, i\ j)$, alors S_i transforme ϱ éléments de E_i et ϱ seulement en éléments de E_j; si un cycle de S_i con-

[1] Vgl. *B. Eckmann,* Verhandlungen Schweiz. Naturf. Ges. 1945, 97—99; ferner Comm. Math. Helv. 18 (1945/46), 232—282, und die dort angegebene Literatur.

[2] *G. de Rham,* Comm. Math. Helv. 12 (1940), 191—211.

tient au plus un élément de chaque ensemble 3), chaque cycle de S_i jouit de la même propriété, mais si un cycle $C = (a_1\, a_2 \ldots a_t)$ de S_i contient au moins deux éléments d'un même ensemble 3) et si λ est le plus petit entier positif, tel que les deux éléments a_j et $a_{j+\lambda}$ de C font partie d'un même ensemble de la suite 3) pour une valeur au moins de $j = 1, 2, \ldots t$, alors quel que soit le cycle $C' = (a'_1, a'_2, \ldots a'_t)$ de S_i et quel que soit l'élément a'_α de ce cycle, les éléments $a'_\alpha, a'_{\alpha+1}, \ldots, a'_{\alpha+\lambda-1}$ font partie de λ ensembles différents de la suite 3), alors que a'_α et $a'_{\alpha+\lambda}$ font partie d'un même ensemble de la suite 3); le groupe engendré par les substitutions 2) est d'ordre égal à l'ordre de connexion du système 2); quel que soit le couple S_i, S_j de substitutions distinctes du système 1), il existe deux entiers r et μ, tels que $S_i S_j^r S_i^{-1} = S^\mu$.

Une condition nécessaire pour que le système 1) engendre un groupe régulier, c'est qu'il soit régulier dans le sens défini ci-dessus, mais cette condition n'est, en général, pas suffisante. Dans une *Note* qui paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici,* nous indiquons diverses conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système donné de substitutions engendre un groupe régulier.

4. Sophie Piccard (Neuchâtel). — *Quelques propositions et remarques concernant les groupes d'ordre fini.*

Soit G un groupe régulier de substitutions dont les éléments sont les nombres 1, 2, ..., n. Quel que soit l'entier $i = 1, 2, \ldots, n$, désignons par T_i la substitution de G qui transforme 1 en i et soit m_i^j la nombre de la suite 1, 2, ..., n que T_i substitue à j, quel que soit l'entier j compris au sens large entre 1 et n. Alors quelles que soient les substitutions T_i et T_j du groupe G, on a $T_i T_j = T_{m_i^j}$.

Soit, à présent, G un groupe quelconque d'ordre fini n, soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les éléments de G pris dans un ordre quelconque, soit, pour tout couple i, j d'entiers compris au sens large entre 1 et n, u_{ij} l'entier $\geqq 1$ et $\leqq n$, tel que $S_i S_j = S_{u_{ij}}$. Soit $R_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ u_{i1} & u_{i2} & \ldots & u_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors l'ensemble des substitutions $R_1, R_2, \ldots, R_n$ constitue un groupe régulier Γ, simplement isomorphe à G.

Quel que soit l'entier $n \geqq 4$, il existe un sous-groupe régulier du groupe alterné de degré n!, simplement isomorphe au groupe symétrique de degré n.

Soit G un groupe d'ordre fini > 1, à base d'ordre $m \geqq 1$, et soit M l'ensemble des éléments de G qui ne font partie d'aucune base de G. L'ensemble M n'est jamais vide et il peut arriver que M soit un sous-groupe invariant de G, comme c'est le cas, par exemple, pour le groupe symétrique ou le groupe alterné de degré $\geqq 3$. Pour ces deux groupes, M se compose de la seule substitution identique, excepté le

groupe $\mathfrak{S}_4$ pour lequel M est d'ordre 4 et se confond avec le groupe de Klein. Mais, en général, l'ensemble M n'est pas forcément un groupe. Ainsi, pour le groupe régulier G d'ordre 12 engendré par les deux substitutions (1 3 5 7 9 11) (2 12 10 8 6 4), (1 2) (3 4) (5 6) (7 8) (9 10) (11 12), l'ensemble M se compose des quatre substitutions 1, (1 5 9) (3 7 11) (2 10 6) (12 8 4), (1 9 5) (3 11 7) (2 6 10) (12 4 8) et (1 7) (3 9) (5 11) (2 8) (12 6) (10 4) et ces substitutions ne forment pas un groupe.

Si G et G′ sont deux groupes finis à base du même ordre l, si G est k fois isomorphe à G′ et si N est le nombre total de bases de G′, le nombre total de bases de G est $\leq k^l N$ et ce nombre est égal à $k^l N$, s'il existe au moins une base de G′ qui correspond à k^l bases de G dans l'isomorphisme de G à G′.

5. Joachim Otto Fleckenstein (Basel). — *Ein Problem der sphärischen Astronomie aus dem Nachlass von Johann I Bernoulli.*

Die im Brief Daniel Bernoullis an Goldbach (3. Oktober 1729) erwähnte Lösung des « Petersburger »-Problems der Polhöhenbestimmung aus drei Sternhöhen und den beobachteten Zwischenzeiten konnte im restlichen Basler Nachlass Johann I Bernoullis aufgefunden werden. Während sonst alle die kleineren Noten typischen Nachlassmaterials als Band IV der Opera omnia publiziert worden sind, hat Johann diese Arbeit über eine absolute Polhöhenmethode, die übrigens das Pendant zum Gausschen Dreihöhenproblem darstellt, unterdrückt, weil sie offenbar nur ad usum filii verfasst war. Sie illustriert deutlich den unentwickelten Zustand der sphärischen Trigonometrie bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts, indem selbst ein Johann Bernoulli für die Lösung den Umweg über Proportionalbeziehungen in der Ebene des Sternkreisparallels, den er vorher in den Meridian klappt, nehmen muss. Bezeichnenderweise übersieht Bernoulli, dass die Projektionen der Sternörter auf den Meridian die $\cos t_i$ (t = Stundenwinkel) darstellen; sonst hätte er leicht gemäss der Neperschen Tradition nach vorheriger Zerlegung seines sphärischen Dreiecks in rechtwinklige den sphärischen Cosinussatz $\cos z = \cos \Phi \cos p + \sin \Phi \sin p \cos t$ mittelst seiner Proportionalbeziehung zwischen den Meridianabschnitten und den $\cos z_i$ (z = Zenitdistanz) finden können, den dann Euler bei Behandlung desselben Problems 1729 in einer seiner Jugendarbeiten erstmals publizierte.

6. Marcel Diethelm (Schwyz). — *Originelle Differentialquotient-Ableitungen.*

1) $y = x^n$

$$y + dy = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,x^{n-2}\,(dx)^2 + \ldots$$

$$dy = nx^{n-1}\,dx$$

unendlich kleine Grösse höherer Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

2) $y = uv$

$y + dy = (u + du)\ (v + dv) = uv + udv + vdu + du\ dv$

$dy = u\ dv + v\ du$ fällt weg

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

3) $y = e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$$y + dy = 1 + \frac{x + dx}{1!} + \frac{(x + dx)^2}{2!} + \frac{(x + dx)^3}{3!} \ldots$$

$$dy = dx\ \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = e^x$$

Ont encore parlé : Pierre Bidal, Cully; Jean de Siebenthal, Lausanne; Ernst Specker, Zurich; Jean Sydler, Zurich; Georges Vincent, Lausanne.