Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 127 (1947)

Vereinsnachrichten: Section de Mathématiques

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Section de Mathématiques

Séance de la Société suisse de Mathématiques

Dimanche, le 31 août 1947

Président : Prof. Dr MAX GUT (Zurich)
Secrétaire : Prof. Dr CHARLES BLANC (Lausanne)

1. THEODOR REICH (Glarus). — *Das Verhalten der regulären Quaternionenfunktionen in der Nähe isolierter unwesentlich singulärer Punkte, Kurven und Flächen.* — Kein Manuskript eingegangen.

2. GEORGES DE RHAM (Lausanne). — *Sur la théorie des distributions de M. Laurent-Schwartz.* — Pas reçu de manuscrit.

3. LOUIS KOLLROS (Zurich). — *Solution d'un problème de Steiner.* — Paraîtra dans « Elemente der Mathematik ».

4. HUGO HADWIGER (Bern). — *Eine elementare Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung im Raum.* — Kein Manuskript erhalten.

5. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Un théorème concernant le nombre total des bases d'un groupe d'ordre fini.*

Soit G un groupe d'ordre fini N. Nous disons qu'il est à base d'ordre v s'il existe au moins un système formé de v éléments de G qui engendrent le groupe G tout entier par composition finie, alors qu'aucun système formé de moins de v éléments de G ne jouit de cette propriété, et nous appelons base de G tout système de v éléments de G, générateurs de ce groupe.

Soit $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}$ une base de G et soit a un élément de G. Posons $a'_i = aa_ia^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, v$, et $B' = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_v\} = aBa^{-1}$. B' est aussi une base de G. Nous disons qu'elle est la transformée de B par a et que les deux bases B et B' sont semblables.

Deux bases $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}$ et $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_v\}$ de G sont distinctes si les ensembles $\{a_1, a_2, \ldots, a_v\}$ et $\{b_1, b_2, \ldots, b_v\}$ diffèrent au moins par un élément.

Deux bases de G sont indépendantes si l'une d'elles n'est pas la transformée de l'autre par un élément de G.

Répartissons toutes les bases de G en classes de bases semblables. Soit m le nombre de ces classes et soit R un ensemble comprenant un représentant (choisi à volonté) et un seul de chaque classe de bases semblables du groupe G. R est, par définition, un système complet de bases indépendantes du groupe G et, quelle que soit la base B de G, il existe une base B′ du système R et un élément a de G, tel que $B = aB'a^{-1}$.

Quel que soit le groupe G d'ordre fini N, à base d'ordre v, et quelle que soit la base B de G, l'ensemble E des éléments de G qui transforment la base G en elle-même forme un groupe. Soit n l'ordre de E. On a $n \geqslant 1$ et n est un diviseur de N. Soit E_c le centre de G et soit k l'ordre de E_c. On a $n \leqq v!k$.

Soit $B_1, B_2, \ldots, B_m$ un système complet de bases indépendantes de G, soit E_i l'ensemble des éléments de G qui transforment la base B_i en elle-même et soit n_i l'ordre de E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

On démontre sans peine que le nombre total des transformées distinctes de la base B_i par les éléments de G est égal à N/n_i.

Soit l le plus petit commun multiple des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_m$, soit $n'_i = \frac{n}{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, et soit $\mathfrak{N}$ le nombre total des bases du groupe G.

On a, d'après ce qui précède, $\mathfrak{N} = (n'_1 + n'_2 + \ldots + n'_m)\frac{N}{l}$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : Quel que soit le groupe G d'ordre fini N, il existe un entier l, diviseur de N et tel que le nombre total des bases de G est un multiple de N/l.

6. Sophie Piccard (Neuchâtel). — *Sur les bases du groupe symétrique.*

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n! et soient $1, 2, \ldots, n$ les éléments permutés par les substitutions de $\mathfrak{S}_n$ (n = entier $\geqq 3$), Deux substitutions A, B de $\mathfrak{S}_n$ constituent une base de ce groupe si, quelle que soit la substitution C de $\mathfrak{S}_n$, elle peut être obtenue par composition finie de A et de B.

Soit A, B une base de $\mathfrak{S}_n$ et soit m l'ordre de la substitution A. Alors quels que soient les entiers i et j vérifiant les inégalités $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$, le couple A, A^iBA^j est également une base de $\mathfrak{S}_n$. Si la substitution A est circulaire, les n^2 substitutions A^iBA^j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont distinctes.

Il s'ensuit que, quel que soit l'entier $n \geqq 4$ et quelle que soit la substitution circulaire A du groupe $\mathfrak{S}_n$, le nombre total des bases du groupe $\mathfrak{S}_n$ dont fait partie la substitution A est un multiple de n^2 et, quel que soit l'entier impair $n \geqq 5$, le nombre total des bases de $\mathfrak{S}_n$ dont l'une des substitutions est circulaire, est un multiple de n^2.

Chaque base A, B du groupe $\mathfrak{S}_n$ peut être caractérisée par un système de relations fondamentales, dont aucune n'est une conséquence des autres et dont résultent toutes les relations satisfaites par A et B. C'est ainsi que la base $A = (1\ 2 \ldots n)$, $B = (1\ 2)$ du groupe $\mathfrak{S}_n$ est caractérisée par les relations fondamentales $A^n = 1, B^2 = 1, (AB)^{n-1} = 1, (BA^iBA^{-i})^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n/2 \left[\frac{n-1}{2}\right]$, si n est pair [impair] $\geqq 6$. La connaissance d'un système complet de bases indépendantes[1] du groupe $\mathfrak{S}_n$ et des relations fondamentales caractérisant l'une de ces bases fournissent un moyen très simple d'établir les automorphismes externes du groupe $\mathfrak{S}_6$. En effet, soit $S = \{B_1, B_2, \ldots, B_{163}\}$ un système complet de bases indépendantes du groupe $\mathfrak{S}_6$, soit $B_j = \{A, B\}$ une quelconque de ces bases et soient $\varphi_i\ (A, B) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, les relations fondamentales caractéristiques de cette base. Dans tout automorphisme externe du groupe $\mathfrak{S}_6$ à la substitution A correspond une substitution du même ordre A', à la substitution B une substitution du même ordre B', telles que A', B' est également une base de $\mathfrak{S}_6$, que $\varphi_i\ (A', B') = 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ et qu'il n'existe aucune substitution C de $\mathfrak{S}_6$ vérifiant les relations $A' = CAC^{-1}$, $B' = CBC^{-1}$. La base A', B' n'est d'ailleurs pas forcément distincte de A, B et il peut arriver que $A' = B$ et $B' = A$.

Pour trouver un automorphisme externe du groupe $\mathfrak{S}_6$, il suffit de trouver une base du système S dont les deux substitutions A', B' satisfassent les relations $\varphi_i\ (A', B') = 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, alors que l'on n'a pas simultanément $A' = A$, $B' = B$. On trouve ensuite les 720 automorphismes externes du groupe $\mathfrak{S}_6$ en faisant correspondre à A l'élément $CA'C^{-1}$, à B l'élément $CB'C^{-1}$ et à tout élément $\varphi\ (A, B)$ de $\mathfrak{S}_6$ l'élément $C\varphi\ (A', B')C^{-1}$, où C parcourt successivement tous les éléments du groupe $\mathfrak{S}_6$.

Inversement, la connaissance d'un automorphisme externe du groupe $\mathfrak{S}_6$ permet de simplifier l'étude des bases du groupe, deux bases qui se correspondent dans un automorphisme externe, sans être les transformées l'une de l'autre par un élément du groupe $\mathfrak{S}_6$, ayant la même loi de composition.

Le groupe $\mathfrak{S}_n$, pour $n \neq 6$, ne possède, comme l'a montré Hölder, aucun automorphisme externe, mais, d'une manière générale, l'étude des bases d'un groupe d'ordre fini est intimement liée à celle des automorphismes de ce groupe.

7. Marcel Diethelm (Schwyz). — *Über Anwendungen des Lehrsatzes von Ptolemäus.*

Direkt ergeben sich Konstruktionen von Ellipsenverwandlungen, analog den Kreisverwandlungen beim Pythagoräischen Lehrsatz.

Im Spezialfall, daß das eingeschriebene Viereck in ein gleichschenkliges Trapez übergeht, erhält man die Verwandlung der Ellipse in einen Kreis.

---

[1] Pour les définitions, voir notre communication précédente.

In den Spezialfällen, daß das eingeschriebene Viereck in ein gleichschenkliges Trapez oder in ein Rechteck übergeht, kann dieser Ptolemäische Lehrsatz auch bei der Behandlung der Kegelschnitte zur Anwendung gelangen, womit zugleich eine kürzeste Einführung in die Hyperbelfunktionen und in den Gebrauch von Tafeln der Hyperbelfunktionen gegeben ist.

Der Ptolemäische Lehrsatz löst, als spezielles Beispiel erwähnt, in seiner Art die Aufgabe: Gegeben: zwei Strecken: $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a+1}$, a = ganze reelle Zahl; gesucht die zu diesen Strecken gehörige Einheitsstrecke, und führt damit zur Konstruktion der Quadratwurzel-Spirale.

Ont encore parlé: A. Amman, Genève; A. Challand, Berne; A. Kriszten, Zurich.