Zeitschrift: Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

Herausgeber: Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

Band: 143 (1963)

Vereinsnachrichten: Section de mathématiques

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Section de mathématiques

Séance de la Société suisse de mathématiques
Samedi le 31 août 1963

Président: Prof. Dr B. ECKMANN (Zurich)
Secrétaire: Prof. Dr H. HUBER (Bâle)

1. S. PICCARD (Neuchâtel). *Dépendance et indépendance linéaire modulo n de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel à un nombre quelconque de dimensions.*

Un espace vectoriel E de dimension finie ou infinie quelconque est défini sur un corps K de nombre et il est rapporté à l'une quelconque de ses bases formée des vecteurs $\vec{e}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de base. Désignons par x^λ, $\lambda \in \Lambda$, les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base donnée de E. Soit $\mathfrak{M}$ le module de tous les vecteurs de E à composantes entières et soit n un entier fixe quelconque $\geqq 2$. Un vecteur $\vec{x}$ de $\mathfrak{M}$ est dit congru au vecteur nul modulo n si chacune de ses composantes x^λ satisfait la congruence $x^\lambda \equiv 0 \pmod{n}$. Cette congruence vectorielle s'écrit $\vec{x} \equiv 0 \pmod{n}$ où 0 au second membre désigne le vecteur nul de E. Soit t un entier $\geqq 1$. t vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ du module $\mathfrak{M}$ sont dits linéairement indépendants modulo n si la congruence vectorielle (I) $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_t \vec{v}_t \equiv 0 \pmod{n}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ sont des nombres entiers du corps K, implique l'ensemble des congruences numériques $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$, $i = 1, \ldots, t$. Par contre, les t vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ sont dits liés linéairement modulo n s'il existe (au moins) un système $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ d'entiers du corps K, dont l'un au moins n'est pas un multiple de n, et pour lesquels a lieu la congruence vectorielle (I). Un système S de puissance infinie quelconque de vecteurs du module $\mathfrak{M}$ est dit linéairement indépendant modulo n si tout sous-ensemble fini de vecteurs de S est linéairement indépendant modulo n et le système S est dit lié linéairement modulo n s'il existe au moins un sous-ensemble fini de S, formé de vecteurs liés linéairement modulo n.

Supposons d'abord que l'espace vectoriel E est de dimension finie s, qu'il est rapporté à la base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$. Soit t un entier $\geqq 1$, soient $\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_t$ t vecteurs de l'espace E, à composantes entières dans la base donnée,

soient a_i^j, $j = 1, \ldots, s$, les composantes du vecteur $\vec{v}_i$, $i = 1, \ldots, t$ et soit $A = (a_i^j)$ la matrice dont les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ sont les vecteurs colonnes. La condition nécessaire et suffisante pour que les t vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ soient linéairement indépendants module n c'est que la matrice A soit de rang t et que le plus grand commun diviseur d de n et de tous les déterminants mineurs d'ordre t de A soit égal à un. Pour établir ce résultat, nous avons d'abord montré que si les t vecteurs $v_1, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants, la matrice A est de rang t. Nous avons ensuite supposé que le rang de la matrice A est égal à t et nous avons prouvé que, si les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ sont linéairement indépendants modulo n, on a $d = 1$ et que, réciproquement, si $d \equiv 1$, les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ sont linéairement indépendants modulo n.

Supposons maintenant que l'espace vectoriel E est de dimension infinie, qu'il est rapporté à une base donné $\{\vec{e}_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$. Soit t un entier $\geqq 1$ et soit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ un système fini de vecteurs de E. Comme tout vecteur de E s'exprime de façon unique par une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de la base donné de E, dont les coefficients sont des scalaires du corps K sur lequel est défini E, il existe un système fini $\vec{a}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{e}_{\lambda_u}$ de vecteurs de cette base, tel que chacun des vecteurs $\vec{v}_i$ est une combinaison linéaire des u vecteurs $\vec{e}_{\lambda_j}$. Soit $\vec{v}_i^j = a_j^i \vec{e}_{\lambda_1} + \ldots + a_i^u e_{\lambda_u}$, $i = 1, \ldots, t$, et soit $\mu = (a_j^i)$, $i = 1 \ldots, t$, $j = 1, \ldots, u$. Nous appelons μ la matrice des composantes essentielles des vecteurs $v_1, \ldots, v_t$. Toute composante de chacun des vecteurs v_i qui ne figure pas dans la matrice μ est nulle par définition. Nous dirons qu'elle n'est pas essentielle. Des éléments de la matrice μ peuvent également être nuls, et cette matrice est toujours de dimension finie. Soit à présent S un ensemble de puissance quelconque (finie ou infinie) de vecteurs de E à composantes entières. La condition nécessaire et suffisante pour que ce système S soit formé de vecteurs linéairement indépendants modulo n c'est que quel que soit le sous-ensemble fini $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t$ de vecteurs de S, la matrice μ des composantes essentielles de ces vecteurs soit de rang t et que le plus grand commun diviseur de n et de tous les déterminants mineurs d'ordre t que l'on peut déduire de cette matrice μ soit égal à 1.

La dépendance et l'indépendance linéaire modulo n de vecteurs à composantes entières joue un rôle important dans de nombreux problèmes de la théorie des groupes, et plus particulièrement dans la théorie des groupes quasi libres.

2. S. Piccard (Neuchâtel). *Sur les groupes quasi libres.*

Un groupe multiplicatif quasi libre G est engendré par un ensemble $A = \{a_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, de puissance quelconque, d'éléments qui ne sont liés que par des *relations quasi triviales* de la forme $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_4}) = 1$ où f est une composition finie d'éléments de A, de degré nul par rapport à chacun d'eux. Un groupe est dit *fondamental* s'il possède un système *irréductible* de générateurs, c'est-à-dire tel que quels que soient les entiers h, k $(1 \leqq h < k)$ il est impossible de remplacer k éléments de ce système par h éléments du groupe de façon à ce que le nouveau système d'éléments ainsi obtenus soit encore générateur du groupe considéré. Tout groupe quasi libre G est fondamental et tout ensemble de générateurs de G qui ne sont liés que par des relations quasi triviales est irréductible. Un tel système de générateurs est appelé une *base* de G et tout élément d'un groupe quasi libre qui fait partie d'une de ses bases est dit quasi libre. Tout élément quasi libre d'un groupe quasi libre est d'ordre infini. Un groupe quasi libre peut posséder des sous-groupes non fondamentaux, donc aussi des sous-groupes non quasi libres. Tout élément d'un groupe quasi libre possède un degré fixe par rapport à tout élément d'un système donné A de générateurs quasi libres de G, et le degré de cet élément est non nul tout au plus par rapport à un nombre fini d'éléments de A. Soit a un élément de G et soit μ_λ le degré de a par rapport à a_λ, quel que soit $\lambda \in \Lambda$. On peut répartir les éléments de tout groupe quasi libre en classes d'équivalence en convenant de prendre dans une même classe deux éléments de G dans le cas et ce cas seulement où chacun de ces deux éléments a le même degré par rapport à tout élément de A. On dira que a appartient à la classe $\mathrm{M}\binom{a_\lambda}{\mu_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, s'il est de degré μ_λ par rapport à a_λ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. Deux classes M sont des ensembles d'égale puissance. La classe M *nulle* est l'ensemble des éléments de G de degré nul par rapport à tout élément de A. Si un élément d'un groupe quasi libre est de degré nul par rapport à tout élément d'un système de générateurs quasi libres, il jouit de la même propriété par rapport à tout élément de n'importe quel système de générateurs quasi libres de G et l'ensemble des éléments de G

qui font partie de la classe M nulle constitue un sous-groupe invariant de G. Appelons produit de deux classes ${}_1M = M\binom{a_\lambda}{\mu_\lambda}$ et ${}_2M = M\binom{a_\lambda}{\nu_\lambda}$ l'ensemble des éléments de G de la forme ab, où $a \in {}_1M$ et $b \in {}_2M$. On désigne ce produit par le symbole ${}_1M\,{}_2M$ et il représente la classe $M\binom{a_\lambda}{\mu_\lambda + \nu_\lambda}$. Cette loi de composition des classes M est commutative et associative et l'ensemble des classes M, muni de cette loi de composition, est un groupe abélien Γ associé au groupe quasi libre G, dont l'élément neutre est la classe M nulle. Le groupe Γ est fondamental et libre. Soit ${}_1M, \ldots, {}_kM$ un ensemble fini quelconque de classes M. On dira que ces classes sont indépendantes si la relation 1) $({}_1M)^{n_1} \ldots ({}_kM)^{n_k} = 1$, où $n_1, \ldots, n_k$ désignent des entiers, implique que $n_1 = \ldots = n_k = 0$. Les classes envisagées sont *liées* si la relation 1) a lieu pour un système au moins d'entiers non tous nuls $n_1, \ldots, n_k$. Un ensemble $\mathfrak{M}$ de puissance quelconque de classes M est indépendant si tout sous-ensemble fini de $\mathfrak{M}$ est formé de classes indépendantes. Il est lié s'il possède au moins un sous-ensemble fini, formé de classes liées. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $\mathfrak{M}$ de classes M générateur du groupe Γ soit irréductible c'est qu'il soit formé de classes M indépendantes. On appelle *base* d'un groupe abélien tout système d'éléments générateur du groupe, jouissant de cette propriété que tout élément du groupe peut être représenté de façon unique par une composition finie réduite d'éléments de la base. Tout système irréductible de générateurs de Γ constitue aussi une base de ce groupe abélien. Une classe $M = M\binom{a_\lambda}{\mu_\lambda}$, telle que pour une valeur fixe λ^* de λ, on a $\mu_{\lambda^*} = 1$, alors que $\mu_\lambda = 0$ pour toute autre valeur de $\lambda \in \Lambda$, est appelée classe M unitaire par rapport à l'élément a_{λ^*} de A ou, tout court, classe unitaire. L'ensemble des classes M unitaires constitue une base de Γ. Soit ${}_1M, {}_2M, \ldots, {}_kM$ un système fini de classes M dont l'une au moins est non nulle et soit $\{a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_l}\} = A^*$ le système *fini* formé de tous les éléments de A, tels que, pour tout indice j, $1 \leqq j \leqq l$ l'une au moins des classes ${}_iM$ $(1 \leqq i \leqq k)$ est composée d'éléments de G de degré non nul par rapport à a_{λ_j}. Soit v_{ij} le degré de tout élément de la classe ${}_iM$ par rapport à l'élément a_{λ_j}, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$ et soit $\mu = (v_{ij})$ la matrice dont les nombres v_{ij} forment les k lignes et les l colonnes. μ est appelée la matrice des degrés des classes ${}_iM$ $(1 \leqq i \leqq k)$ par rapport aux éléments de A^*. La condition nécessaire et suffisante pour que k classes M soient indépendantes c'est que la matrice de leurs degrés par rapport aux éléments de l'ensemble correspondent A^* soit de rang k égal au nombre de ces classes. Si l'ensemble A est fini, formé de n éléments, tout ensemble $\mathrm{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ formé de n éléments générateurs de G constitue une

base de ce groupe et il est composé de générateurs quasi libres. Toute base du groupe Γ est alors également formée de n éléments et, quelle que soit la base B de G, l'ensemble des classes M qui contiennent les éléments de B constitue une base de Γ. Les classes M ont un caractère intrinsèque, indépendant de la base du groupe G, à partir de laquelle elles sont définies. Aucune classe M ne saurait contenir plus d'un élément d'un système de générateurs quasi libres de G. On dit qu'un groupe G jouit de la propriété P (mod n), (n = entier $\geqq 2$), par rapport à tout élément d'un de ses systèmes générateurs $A = \{a_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, si toute relation entre ces générateurs est de la forme $g(a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_s}) = 1$ ou g est une composition finie d'éléments de A, de degré $\equiv 0$ (mod n) par rapport à chacun d'eux. Tout groupe quasi libre jouit de la propriété P (mod n) par rapport à tout élément de chacune de ses bases, quel que soit $n = 2, 3, \ldots$ et tout groupe qui jouit de la propriété P (mod n) par rapport à tout élément d'un de ses systèmes générateurs quel que soit $n = 2, 3, \ldots$ est quasi libre[1].

[1] La démonstration de ces propositions est donnée dans l'ouvrage de *S. Piccard:* Les groupes quasi libres, Paris, Gauthier Villars (à paraître).

3. W. Hatcher (Neuchâtel). *La notion d'équivalence entre systèmes formals.*

4. C. Piron (Lausanne). *Définition de l'espace de Hilbert comme géométrie projective orthocomplémentée généralisée.*

5. P. Jeancartier (Lausanne). *Distributions invariantes.*

6. K. Voss (Zürich). *Über vollständige Minimalflächen.*

7. E. Kreyszig (Graz). *Eine Verallgemeinerung der Whittaker-Bergman-Operatoren.*

8. A. PFLUGER (Zürich). *Über harmonische Funktionen im Einheitskreis mit Werten in einem Banachschen Raum.*

Die Resolventen unitärer Operatoren auf einem Hilbertschen Raum sind Beispiele für analytische Funktionen vom Einheitskreis in einen Banachschen Raum. Die Darstellbarkeit dieser Resolventen als Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\vartheta}-z}\, d\,\Theta(\vartheta),$$

wo Θ eine Zerlegung der Einheit ist,

legt die Frage nahe, ob die klassischen Sätze über die Darstellbarkeit als Stieltjessches Integral und die Existenz radialer Grenzwerte fast überall auf die genannten Funktionen übertragen werden können. Es gilt der folgende *Satz A:* F sei eine harmonische Funktion vom Einheitskreis $\{z \mid |z| < 1\}$ in einen komplexen Banachschen Raum B und

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \| F(re^{i\vartheta}) \|\, d\vartheta < \infty$$

(lim existiert, da $\|F\|$ subharmonisch ist). Dann gibt es eine Funktion Θ von beschränkter Schwankung vom Intervall $[0,2\pi]$ in B mit

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2}\, d\,\Theta(\vartheta),\ |z| < 1.$$

Für analytisches F gilt insbesondere

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\vartheta}-z}\, d\,\Theta(\vartheta).$$

Zum Beweis betrachtet man die Abbildung Λ_r von $C_{2\pi}$ in B:

$$\Lambda_r(f) = \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, F(re^{i\vartheta})\, d\vartheta,\ f \in C_{2\pi}.$$

Sie konvergiert für $r \to 1$ gegen eine beschränkte lineare Abbildung Λ und

es ist

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi} \Lambda \left(\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2} \right) = F(z).$$

Hätte der Satz von F. Riesz über die Darstellbarkeit beschränkter linearer Funktionale auf $C_{2\pi}$ durch Stieltjessche Integrale hier ein Analogon, so wäre man fertig. Hiefür ist aber die Bedingung der Beschränktheit zu schwach. Hingegen ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Es sei j ein offenes Intervall in $(0,2\pi)$, φ_j seine charakteristische Funktion und

$$\sigma(j) = \sup \| \Lambda(f) \| \text{ für } f \in C_{2\pi} \text{ und } |f| \leqq \varphi_j .$$

Dann gibt es eine Konstante K, so dass für irgendwelche fremde Intervalle $j_1, \ldots, j_n$ in $(0, 2\pi)$ gilt $\sigma(j_1) + \ldots + \sigma(j_n) < K$. Ein solches Λ nennt man wohl Abbildung von beschränkter Schwankung. Es gilt: Zu einer linearen Abbildung Λ von $C_{2\pi}$ in B gibt es eine Funktion Θ von $[0,2\pi]$ in B, die von beschränkter Schwankung ist, mit

$$(2) \qquad \Lambda(f) = \int^{2\pi} f(\vartheta)\, d\Theta(\vartheta), \; f \in C_{2\pi},$$

dann und nur dann, wenn Λ von beschränkter Schwankung ist. Ist B der Körper der komplexen Zahlen, so ist jedes beschränkte Λ auch von beschränkter Schwankung, da zu jeder komplexen Zahl c ein reelles α mit $e^{i\alpha} c = |c|$ existiert.

Es ist leicht zu zeigen, dass das eingangs mit F konstruierte Λ von beschränkter Schwankung ist. (1) und (2) ergeben dann sofort die Behauptung des Satzes.

Wie im klassischen Fall zeigt man: Wo Θ differenzierbar ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{r \to 1} F(re^{i\vartheta})$. In einigen Banachschen Räumen, zum Beispiel den gleichmässig konvexen, gilt auch das Analogon zum Lebesgueschen Satz von der «Differenzierbarkeit fast überall» einer Funktion von beschränkter Schwankung[1] und damit in Verbindung mit Satz A das Analogon zum Satz von Fatou von der Existenz radialer Grenzwerte fast überall.

[1] *J. A. Clarkson*, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. *40*, 396–414 (1936).