**Zeitschrift:** Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali

**Herausgeber:** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft

**Band:** 149 (1969)

**Vereinsnachrichten:** Sektion für Mathematik

**Autor:** [s.n.]

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

## 1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, 4. Oktober 1969

*Präsident:* Prof. Dr. W. NEF, Sidlerstrasse 5, 3000 Bern
*Sekretär:* Prof. Dr. E. SPECKER, Sekretariat 46d, ETH, 8032 Zürich

**1.** C. PORTENIER (Neuchâtel) – *Espaces de Riesz et espaces de fonctions*

**2.** Frl. C. BANDLE (Zürich) – *Über eine isoperimetrische Ungleichung von Nehari*

**3.** Mlle S. PICCARD (Neuchâtel) – *Quelques résultats de la théorie des groupes*

1. *Les groupes quasi libres modulis N.* Soit $N=\{n_i\}$, $i\in I$, un ensemble donné d'entiers rationnels, pas nécessairement distincts, dont un et un seul correspond à tout élément $i$ d'un ensemble donné $I$ d'indices et dont chacun est $\geq 2$. Soit d'autre part, $G$ un groupe multiplicatif engendré par un ensemble $A=\{a_i\}$, $i\in I$, de générateurs liés par des relations dont chacune est de degré $\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n_i)$ par rapport à $a_i$, $\forall i\in I$. Cette propriété, dont jouissent *toutes* les relations entre éléments de $A$, porte le nom de quasi trivialité modulis $N$. Un groupe multiplicatif $G$ est dit quasi libre modulis $N$ s'il possède au moins un ensemble de générateurs – dits générateurs quasi libres modulis $N$ – liés uniquement par des relations quasi triviales modulis $N$. Les groupes quasi libres modulis $N$ forment une vaste classe de $P$-groupes qui se prête à une élégante théorie générale et qui conduit à d'intéressantes généralisations des notions fondamentales de la théorie générale des groupes. Relevons les propriétés suivantes de ces groupes: Tout ensemble de générateurs quasi libres modulis $N$ d'un groupe quasi libre modulis $N$ est irréductible au sens large (aucun de ses éléments ne peut être obtenu par composition finie des autres); pour tout élément $a$ d'un groupe quasi libre modulis $N$ il existe un entier fixe $v_i$ de la suite $0, 1,\ldots, n_i-1$, tel que toute composition finie d'éléments d'un ensemble donné $A=\{a_i\}$, $i\in I$, de générateurs quasi libres modulis $N$ de $G$ est de degré $\equiv v_i (\mathrm{mod}\, n_i)$ par rapport à $a_i$, $\forall i\in I$. $v_i$ est appelé le degré modulo $n_i$ de $a$ par rapport à $a_i$. A tout groupe quasi libre modulis $N$ est associé un groupe abélien dont les éléments sont des classes d'équivalence d'éléments de $G$ et qui jouit de cette propriété que $\forall$ le sous-groupe $\gamma$ de $\Gamma$ la réunion de toutes les classes qui sont des éléments de $\gamma$ est un sous-groupe de $G$. Tout groupe quasi libre modulis $N$ possède deux treillis de sous-groupes spéciaux appelés les uns symétriques modulis $N$, les autres invariants modulis $N$ et dont nous donnons la

définition ailleurs (voir *Journal de Crelle* 1969). Tout groupe libre $G$ dont $A=\{a_i\}$, $i\in I$, est un ensemble de générateurs libres est aussi quasi libre modulis $N=\{n_i\}$, $i\in I$, $\forall$ les entiers rationnels $n_i$ dont chacun est $\geqq 2$.

2. *Un théorème d'existence.* Il existe un groupe dénombrable de transformations des entiers rationnels dont tout ensemble de générateurs est dénombrable et réductible au sens strict (on peut remplacer dans tout ensemble de générateurs de ce groupe certains éléments, en nombre fini $>1$, par un nombre inférieur d'éléments de $G$ et obtenir ainsi à nouveau un ensemble de générateurs du groupe $G$). L'idée de la démonstration de ce théorème d'existence est la suivante. On sait que le groupe additif $G_0$ des rationnels ne possède que des ensembles dénombrables réductibles au sens strict de générateurs. Or ce groupe est dénombrable. Il est donc possible de former une suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ de l'ensemble de ses éléments. Faisons correspondre à tout élément $a_j$ de $G_0$ la transformation $t_j$ de l'ensemble des éléments de $G_0$ qui fait passer de tout élément $a_i$ de $G_0$ à l'élément $a_j a_i$. Cette transformation est régulière du même ordre que l'élément $a_i$ de $G_0$. Soit $T$ le groupe dénombrable dont les éléments sont les transformations $t_j, j\in\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, muni d'une structure de groupe par la loi usuelle de composition des transformations. On voit sans peine que les groupes $G$ et $T$ sont isomorphes. $\forall$ l'élément fixe $a_j$ de $G_0$ et $\forall$ l'élément $a_i$ de $G_0$, $a_j a_i = a_{i_j}$ est un élément bien défini de $G$ et l'ensemble $\{i_j\}$ des indices $i_j$ coïncide avec l'ensemble $Z$ des entiers rationnels. Faisons correspondre à toute transformation $t_j$ de $T$ la transformation $\mathfrak{t}_j$ de $Z$ qui fait passer de tout entier $i$ à l'entier $i_j$. L'ensemble $\mathfrak{T}$ des transformations $\mathfrak{t}_j$ muni d'une structure de groupe par la loi usuelle de composition des transformations est un groupe isomorphe à $T$, donc aussi à $G_0$, puisque la relation d'isomorphisme est transtitive. Donc à tout ensemble de générateurs de $G_0$ correspond un ensemble de générateurs de $\mathfrak{T}$ et vice versa et comme tout ensemble de générateurs de $G_0$ est réductible au sens strict il en est de même de tout ensemble de générateurs de $\mathfrak{T}$, d'où découle le théorème d'existence énoncé.

3. *Les groupes périodiques de transformation des entiers.* On sait que tout groupe d'ordre fini peut être représenté par un groupe régulier de substitutions des entiers $1, 2, \ldots n$. De façon analogue, tout groupe infini dénombrable peut être représenté par un groupe régulier de transformations des entiers rationnels. On peut donc traduire tout problème de la théorie générale des groupes dénombrables en termes de la théorie des groupes dénombrables de transformations des entiers rationnels. Parmi ces derniers groupes, une place à part tiennent les groupes périodiques de transformations des entiers rationnels. Soit $n$ un entier rationnel $\geq 2$ fixe, donné, et soit $t$ une transformation de l'ensemble $Z$ des entiers rationnels qui fait passer de tout entier $i$ de $Z$ à son image $t(i)$. On dit que $t$ est périodique, de période $n$, si $\forall$ les entiers $i$ et $j$ de $Z$, on a $t(i+jn)=t(i)$

$+jn$. Toute transformation des entiers peut être représentée par l'ensemble de ses cycles qui peuvent être d'ordre fini ou infini (dénombrable), ensemble qui est fini ou dénombrable. Soit $t$ une transformation périodique des entiers, de période $n$. Un cycle d'ordre fini de $t$ est alors d'ordre au plus égal à $n$ et tous les éléments d'un tel cycle ont des restes différents modulo $n$. Si $t$ contient un cycle d'ordre fini $(c_1, \ldots, c_k)$, elle en contient une infinité, notamment elle contient alors aussi les cycles $(c_1+jn, \ldots, c_k+jn)$, $\forall j \in Z$. Soit à présent $C=(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$ un cycle d'ordre infini de $t$. Soit $c_i$ un élément quelconque de ce cycle et soit $j$ le plus petit entier $>i$, tel que $c_i \equiv c_j (\mathrm{mod}\, n)$. Il existe un entier $l \in Z$, tel que $c_j = c_i + ln$. Alors $c_{j+1} = c_{i+1} + ln$, $c_{j+2} = c_{i+2} + ln, \ldots$. Le nombre $ln$ est appelé la période du cycle envisagé. Si $|l| > 1$, $t$ contient aussi les cycles $(\ldots, c_{-1} + mn, c_0 + mn, c_i + mn, \ldots)$, $m = 1, 2, \ldots, |l| - 1$. Une transformation périodique $t$ des entiers rationnels est entièrement définie par la donnée de la période $n$ et des transformés par $t$ de $n$ entiers consécutifs quelconques, par exemple des nombres $a_i = t(i)$, $i = 1, 2, \ldots n$. On désigne cette transformation par le symbole $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}_n$. On dit qu'un groupe $T$ de transformations des entiers rationnels est périodique, de période $n$, si toutes les transformations qui le composent sont périodiques, de même période $n$. On dit que $T$ est saturé s'il comprend toutes les transformations périodiques des entiers rationnels de période $n$. Un tel groupe est fondamental. Il possède des couples d'éléments générateurs, si $n=2$, et des triplets d'éléments générateurs, si $n>2$. Les méthodes d'investigation établies dans la théorie des substitutions sont applicables à la résolution de nombreux problèmes relatifs aux groupes périodiques de transformations des entiers rationnels.

**4.** M. Gut (Zürich) – *Erweiterungskörper von Primzahlgrad mit durch diese Primzahl teilbarer Klassenzahl* (wird in den Acta Arithmetica erscheinen)