Sektion für Logik und Philosophie der Wissenschaften

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **152 (1972)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

11. Sektion für Logik und Philosophie der Wissenschaften

Schweizerische Gesellschaft für Logik und Philosophie
der Wissenschaften
Société Suisse de Logique et Philosophie des Sciences

Präsident: Dr FRANÇOIS BONSACK, 23, rue Le-Corbusier, 2400 Le Locle
Sekretär: HANS IKLÉ, Im Rhyner, 8712 Stäfa

Samstag, 14. Oktober

1. J. DE SIEBENTHAL (Lausanne): *Le rôle des modèles en mathématique*

Introduction

Au cours de ma carrière de mathématicien enseignant, je me suis vu contraint à une réflexion sur ma science et sur l'insertion de celle-ci dans le reste de la culture. En particulier, la question des relations de la mathématique avec la philosophie s'est posée avec acuité. Je me présente à vous en mathématicien amené à s'exprimer à l'aide d'un appareil conceptuel et terminologique qui n'est pas spécifiquement le sien.

Pour enseigner dans une Ecole polytechnique il faut correspondre aux nécessités pratiques et théoriques des ingénieurs et des physiciens; cela exclut l'enseignement en circuit fermé, car l'ingénieur mal alimenté en mathématiques se donne facilement à lui-même la nourriture qui lui convient.

Cette constatation influence beaucoup la présentation des modèles que j'expose ici.

Par ailleurs, le malaise suscité en France et dans d'autres pays par une réforme scolaire hâtive peut nous inciter à éviter des engagements erronés et un certain illuminisme ensembliste dans nos propres réformes.

La position doctrinale suggérée dans ces lignes me paraît capable, si c'est nécessaire, d'amener nos professeurs ou maîtres de tous niveaux à adopter une attitude équilibrée, qui tient compte des avantages des notations et conceptions récentes, tout en valorisant les notions et objets dont vit le praticien.

L'exposé distingue quatre domaines ou champs de réflexion et d'activité mathématique. Ils sont mutuellement complémentaires, et réagissent les uns sur les autres. Je distinguerai donc:

1. Les essences immédiates
2. Les essences construites
3. La métaphysique axiomatique
4. La métaphysique typographique

Les objets sous 1 et 2 fonctionnent comme modèles pour les systèmes décrits sous 3 et 4.

1. *L'essence matérielle immédiate*

La source de la mathématique, c'est l'humble réalité matérielle; ce sont ces objets, ou situations toutes concrètes, manipulés, contemplés. Là est le fondement véritable, l'origine non point naïve, mais profonde.

Aujourd'hui comme hier, deux mots résument la mathématique: le nombre et l'espace. La source du nombre: ces collections d'objets comptés, ces problèmes pratiques d'énumération, de dénombrement, de mesure, appliqués à des situations où l'espace est en jeu, d'abord de simples problèmes de localisation, de limite, de jonction, de fabrication d'objets, d'ornementation, de construction, d'érection de bâtiments.

Il est facile de voir que cette conception vaut encore aujourd'hui-même. Certes, pendant des millénaires, les Egyptiens ont dénombré, mesuré, construit, trouvé des règles pratiques; les Babyloniens, faisant de même, ont forgé des règles pratiques d'algèbre et de numération. Recueillant cet héritage, les anciens Grecs ont, en quatre siècles, édifié la construction mathématique et logique la plus étonnante, qui culmine dans les Eléments d'Euclide, dans les œuvres d'Archimède et d'Appollonius: *le nombre (réel positif) intimement lié à l'espace*. On peut bien plus observer qu'aujourd'hui les humbles situations concrètes, comme un terreau inépuisable, font encore jaillir de nouvelles sciences; l'exemple le plus marquant est fourni par la naissance et la création de la topologie: ainsi, en trois siècles, d'Euler aux topologues d'aujourd'hui, en passant par les conceptions de Gauss et de Poincaré, on est parti d'objets concrets, manipulés ou pensés, pour aboutir à ces belles constructions axiomatiques de l'homologie, de la cohomologie, de la suite spectrale, etc.

Comment, au plan philosophique, ces situations concrètes engendrent-elles nos grandes constructions? Notons que jamais l'esprit humain ne peut pouvoir prétendre s'émanciper, se soi-disant libérer des situations matérielles concrètes, à moins de succomber au mirage idéaliste, appelé aussi idéosophique, à moins de s'égarer dans les méandres de l'*a priori*, des constructions sans ancrage – j'y reviendrai.

Le nœud, le centre créateur, le voici: c'est *l'essence matérielle concrète*. D'où vient cette idée que je vous avance? Tout simplement des définitions d'Euclide, qui portent bel et bien sur des *essences*.

Qu'est-ce qu'une essence (pour le mathématicien)?

L'essence d'une situation matérielle concrète est le contenu intelligible de cette situation sous le rapport de la quantité (nombre et étendue).

Le point est ce qui n'a pas de partie!

Dans le problème de la localisation, on peut se servir d'objets qui n'ont de mesure dans aucune direction (dimension zéro), dans lesquels on ne peut discerner aucune partie, faute de quoi la localisation n'est pas atteinte.

Le point est donc l'essence de localisation; c'est un objet de pensée, un être de raison, présent à l'état singulier dans cette tache de craie, d'encre ou de graphite, et présent à l'état d'universalité dans l'esprit.

Le point n'est pas un objet matériel, limite d'objets de plus en plus petits; il est présent dans chacun d'eux sous l'état singulier, à l'état d'universalité dans notre esprit.

Une ligne est une longueur sans largeur!

Cette définition est parfaite selon mon point de vue pour situer l'essence de la pure jonction d'un lieu à un autre. Aujourd'hui bien sûr on dit qu'une ligne est l'image d'un intervalle (a, b) de IR par une application continue (différentiable). Ici, Euclide veut saisir le continu connexe unidimensionnel en tant qu'essence présente à l'état singulier dans des fils, dans des rayons lumineux, dans des bords d'objets, etc., et présents à l'état d'universalité dans nos esprits.

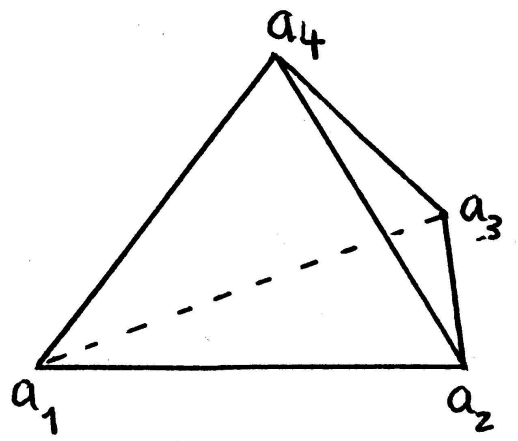
On dit qu'Euclide était platonicien; je me permets d'en douter, par la seule considération de ses définitions.

Un travail analogue peut être ainsi fait sur la plupart des définitions d'Euclide.

Dans le même esprit, les *postulats* sont des constatations d'ordre expérimental, liées aux objets concrets, et par suite aux essences; leur rôle logique est bien entendu primordial. Ils constituent le système de générateurs de centaines voire de milliers de propositions. Les *axiomes* ou notions communes sont moins directement liés aux essences fondamentales comme telles «Le tout est plus grand que la partie».

Aucun problème de consistance, de non-contradiction: les postulats étant vérifiés expérimentalement, au sens local, aucune contradiction ne peut se révéler dans la chaîne des raisonnements.

La lecture d'essences immédiates peut se faire encore à l'aide d'un tétraèdre de sommets a_1, a_2, a_3, a_4.



Le solide $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ est limité par des faces

$$(a_1\ a_2\ a_3)\ ,\ (a_1\ a_2\ a_4)\ ,\ (a_1\ a_3\ a_4)\ ,\ (a_2\ a_3\ a_4)$$

chacune d'elles étant limitée par des arêtes:

$$(a_1\ a_2)\ ,\ (a_2\ a_3)\ ,\ (a_1\ a_3)$$
$$(a_1\ a_2)\ ,\ (a_2\ a_4)\ ,\ (a_1\ a_4)$$
$$(a_1\ a_3)\ ,\ (a_3\ a_4)\ ,\ (a_1\ a_4)$$
$$(a_2\ a_3)\ ,\ (a_3\ a_4)\ ,\ (a_2\ a_4)$$

Chaque arête est limitée par des sommets

$$(a_1)\ (a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (a_2)\ (a_4)$$

On a: $1+4+6+4$ éléments géométriques. On passe d'un élément de dimension à un élément de dimension inférieure par considération du fait que l'un est un bord ou une extrémité de l'autre. Chaque face fournit par exemple trois arêtes, etc.

Supposant connu un formalisme algébrique de nature vectorielle, on peut «lire» sur le tétraèdre 15 vecteurs qui se regroupent en 4 espaces vectoriels à 1, 4, 6, 4 dimensions:

$$IR(a_1\,a_2\,a_3\,a_4),\ IR(a_1\,a_2\,a_3)\oplus IR(a_1\,a_2\,a_4)\oplus IR(a_1\,a_3\,a_4)\oplus$$
$$\oplus IR(a_2\,a_3\,a_4),\ \text{etc.}$$

Alors le bord d'un élément s'obtient par une opération δ qui fait passer d'un vecteur à un autre (linéairement)

$$\left\{\ \delta a_{1234} = a_{123} - a_{124} + a_{134} - a_{234}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta a_{123} = a_{12} - a_{13} + a_{23} \\ \delta a_{124} = a_{12} - a_{14} + a_{24} \\ \delta a_{134} = a_{13} - a_{14} + a_{34} \\ \delta a_{234} = a_{23} - a_{24} + a_{34} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta a_{12} = a_1 - a_2,\ \delta a_{13} = a_1 - a_{31},\ \delta a_{14} = a_1 - a_4 \\ \delta a_{23} = a_2 - a_3,\ \delta a_{24} = a_2 - a_4\ ,\ \delta a_{34} = a_3 - a_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\ \delta a_1 = \ldots = \delta a_4 = 0\right.$$

On constate alors que le bord d'un bord est le vecteur nul, ce qu'on écrit: $\delta\delta = 0$ ou $\delta^2 = 0$.

On dégage ainsi d'une situation concrète une essence constituée d'espaces vectoriels lus sur la figure avec une opération «bord» qui transforme linéairement chaque espace dans le suivant. On a un *germe des théories homologiques. Les théories homotopiques* procèdent de même à partir des phénomènes liés aux boucles et surfaces élastiques, convenablement malaxés par l'intelligence.

L'analyse naît de la même manière: chez les Grecs, la quadratrice ou les coniques employées par Menechme pour la duplication du cube font ressortir le graphe d'une fonction, notion qui conduit à l'explicitation progressive des idées dont nous vivons. De même, quand Archimède calcule l'aire de la première spire de sa courbe $r = (\theta/2\pi)$ à l'aide d'un calcul de limite qui somme des secteurs circulaires, nous repérons dans

sa gangue le diamant combien précieux du calcul intégral moderne.

La circonférence étant divisée en n parties, on a n secteurs «par défaut» et n secteuer «par excès». Les secteurs de rang p ont pour aires respectivement

$$\pi\left(\frac{p-1}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \quad -\left(\frac{p}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

Les aires par défaut et par excès sont

$$\frac{\pi}{n^3}\left\{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right\}, \quad \frac{\pi}{n^3}\left\{1^2+2^2+\ldots+n^2\right\}$$

La différence $(\pi/n^3)n^2=\pi/n$ est aussi petite qu'on le désire, pour n convenable. L'aire cherchée est alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n^3}\frac{n(n+1(2n+1)}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Il ne s'agit en aucune manière de se confier à quelque «intuition naïve»; il s'agit en fait d'une prospection rigoureuse qui, à même la situation concrète dégage une essence mathématique plus étoffée ou nouvelle. *Un esprit de totale ouverture est requis dans le sens d'une nouveauté qui s'enracine dans l'ancien.*

A ce niveau mathématique, qu'est-ce qu'un *modèle*, et quel peut bien être son rôle? On admettra sans peine que les *modèles* sont ces objets matériels ou dessins concrets dans lesquels repose l'essence mathématique, et à partir desquels cette essence peut être dégagée et fleurir. Quelques-uns de ces objets ont été présentés ci-dessus. Je me souviens avoir vu chez Heinz Hopf une nappe brodée présentant les premières approximations de cette courbe dite de Peano qui remplit un carré.

On voit sans doute le rôle capital des modèles en mathématique – à notre présent niveau –: un rôle de *fondement germinal*, qui arme l'esprit des idées les plus générales, vécues à même le concret.

J'insiste encore: *le modèle, en un premier sens, c'est l'objet matériel, souvent construit, à partir duquel se dégage l'essence-germe appelée aux plus grands développements, tout en restant soumise aux enchaînements logiques habituels.*

Le formalisme est peu développé; le texte prédomine; le dessin peut éventuellement faciliter l'adhésion. Les plus belles réussites impliquent un texte abondant, expressif, un formalisme algébrique minimal, qui émerge à peine du texte, et quelques dessins. La logique, au sens du Stagirite, est parfaitement adaptée.

A partir des définitions, postulats et notions communes se constituent, par progression logique, tout un corps de propositions, souvent vérifiables matériellement.

Ainsi *beaucoup de modèles mathématiques sont réalisables matériellement*, et sont capables d'illustrer les germes des théories mathématiques.

Remarquons que cette attitude n'est pas du tout platonicienne: c'est celle du réalisme modéré. A ce stade, il serait possible d'introduire la notion *d'ontologie mathématique: dans son activité contemplative et constructrice, le mathématicien discerne en son contexte matériel des essences*, des êtres de raison, antérieurement à tout formalisme, quoique liés à quelque formalisme s'ils doivent être exprimés.

2. *Deuxième niveau*

Les essences matérielles construites, ou le travail sur la matière intelligible

A un stade qui implique la parfaite connaissance de certaines essences concrètes, jointe à des moyens algébriques et algorithmiques suffisants, un certain détachement des situations concrètes peut se produire en ce sens que, dans *l'imaginable matériel*, on peut se mettre à construire, à partir du concret.

Le pas essentiel de l'étape précédente: *dégager pour construire logiquement* étant fait, les essences primitives vont en engendrer d'autres. La construction relativement libre dans la matière intelligible devient possible. On passe d'une réalité immédiate à une réalité médiate, domaine de l'immense majorité des mathématiciens d'aujourd'hui.

Exemple: chez les anciens Grecs, Egyptiens, Babyloniens se précise le domaine des nombres réels positifs, rationnels, irrationnels, qui s'enrichit, par la conquête du zéro, des nombres négatifs, de toutes les propriétés qui font la droite numérique réelle $IR+$, corps commutatif totalement ordonné continu, les propriétés anciennes et nouvelles s'imbriquant inextricablement, l'axiome d'Archimède ou mieux d'Eudoxe se mêlant à la propriété moderne de la borne supérieure d'une partie majorée non vide.

Cet objet, où l'arithmétique des nombres naturels est incluse, ne fait pas problème: une réalité élémentaire où les entiers positifs et négatifs s'alignent potentiellement, où la grille des rationnels s'intercale physiquement et toujours potentiellement, où les irrationnels sont définis par des sections commençantes, ou demi-coupures à gauche dans les rationnels, cet objet donc, sorti plus ou moins directement de l'expérience concrète, ne cause aucun trouble au mathématicien «courant». Par un passage soigné à l'espace, il s'élabore toute une théorie abstraite des espaces IR^n numériques à n dimensions, à l'aide de constructions précises. Bien plus, l'intervalle concret défini par deux nombres de IR, s'amplifie dans les ouverts connexes de IR^n, réunion de pavés ouverts, avec lesquels, par des recollements très suggestifs, on constitue les variétés différentiables réelles; cette théorie est encore en pleine floraison aujourd'hui, sainement enracinée dans nos objets très humbles: la droite, le plan et l'espace du vénérable Euclide. De la notion de fonction définie dans IR on passe à la notion de fonction définie dans un ouvert de IR^n. Les fonctions définies sur une variété constituent aujourd'hui un instrument d'analyse apprécié. On leur fait constituer des espaces fonctionnels, espaces vectoriels, qui

par la structure d'Hilbert ou des espaces normés transcendent l'espace euclidien comme un arbre transcende la graine dont il est sorti.

La topologie de situation de même, sortie du fondement germinal de la géométrie du caoutchouc des lanières et des membranes et de l'analyse de polyèdres associe maintenant à chaque espace un ensemble algébrique complexe de groupes d'homologie, ou de cohomologie, ou d'autres. On ne saurait douter du développement de cette science à partie de situations concrètes contemplées, travaillées, équipées de moyens algébriques de mieux en mieux adaptés.

Des réflexions semblables peuvent être faites à partir du calcul des probabilités.

Ainsi, la plupart des mathématiciens «purs ou appliqués» travaillent dans un monde d'êtres de raisons, construits à partir d'essences directement tirées des situations matérielles concrètes. La sûreté de leur démarche vient de la proximité des objets «palpables». Les êtres existent, construits; ils ne sauraient impliquer contradiction.

Pour s'exprimer, le mathématicien dispose d'un formalisme évolué algébriquement, harmonieusement proportionné au texte courant; quelquefois, il ne dédaigne pas de recourir au dessin. Il se sert de la logique de l'honnête homme, qui est liée à l'être.

On dispose ici d'un monde d'objets construits, ou découverts, qui généralise à un niveau supérieur les modèles du niveau de tout à l'heure. C'est à mon sens le niveau véritablement mathématique, le cœur de l'activité du mathématicien par définition de celui-ci.

3. *Métaphysique mathématique*

Les théories mathématiques du premier et du deuxième niveau, examinées d'un point de vue suffisamment éloigné, révèlent des traits communs, des «structures» parfois identiques, et le dégagement de cette notion constitue l'essentiel du troisième niveau. Les objets précis de tout à l'heure sont remplacés par des objets non précisés «vagues», mais dont chacun peut être l'un quelconque des objets «réels». On a des objets posés devant l'esprit, mais issus de situations concrètes ou construites, et l'on cherche à dégager les lois de l'être mathématique en tant que tel. Les points, droites, plans du vénérable Euclide deviennent ces trois systèmes de choses (vagues) dont la nature cesse d'être connue, soumis à des règles précises: les postulats deviennent des règles de fonctionnement logique, ou axiomes.

Une très saine notion d'ensemble apparaît alors, que certains appellent «naïve», mais qui, proche des intuitions fondamentales, est très facile à saisir. Appartenance, inclusion, réunion, intersection, applications, ... De même, selon les propres termes de J. DIEUDONNÉ, la théorie des catégories constitue la métaphysique de l'algèbre linéaire, et domine à son niveau un grand nombre de théories. La topologie ensembliste se trouve à notre niveau actuel par rapport aux théories relatives aux parties de IR^n.

Les théories du premier et du deuxième niveaux constituent alors autant de *modèles* pour celles du troisième, et assurent leur cohérence.

Un exemple particulièrement étoffé est donné par la structure de groupe: considérant les translations du plan, ou les rotations autour d'un point dans l'espace, ou IR^n muni de l'addition des vecteurs, ou les matrices orthogonales $n \times n$, etc., on dégage la notion de structure de groupe E, où E est un ensemble muni d'une application:

$$E \times E \to E$$
$$(x, y) \to x\,y$$

avec des règles de fonctionnement:

$$x(yz) = (xy)z \;;\; (\exists e)\,(xe = ex = x) \;;\; (\forall x)\,(\exists x')\,(xx' = x'x = e)$$

Il se développe une théorie abstraite, qui s'incarne dans d'innombrables situations concrètes ou construites, dont elle provient, ou qu'elle engendre. La démarche est toujours la même: des êtres mathématiques dont la nature (au sens des deux premiers niveaux) n'est pas précisée, mais qui sont «actionnés» par des règles précises, appelées axiomes, communes par nature à toutes les «incarnations». Le contenu intuitif en ce sens est évacué mais il est directement sous-jacent. De là à dire que seules les relations logiques impliquées par les axiomes forment l'objet des mathématiques, comme le prétendait EINSTEIN, c'est certainement abusif.

Notre métaphysique mathématique est ainsi solidement enracinée dans les objets concrets ou construits. Le caractère quasi expérimental des postulats des deux premiers degrés se transforme en caractère de fonctionnement logique. Le groupe des postulats devient un groupe d'axiomes, qui régit logiquement des théories très diverses, à tritre d'organe moteur, ou générateur. Toutes ces théories ou objets sont autant de *modèles* pour l'édifice basé sur un système d'axiomes donnés. On voit aussi qu'*un modèle n'est rien d'autre qu'une incarnation d'un système d'axiomes dans une sorte de réalité concrète ou construite*, et que, par construction même, les systèmes envisagés sont consistants. En ce sens, notre époque moderne a perfectionné l'œuvre des Grecs: l'édifice géométrique, basé sur les définitions et postulats énoncés par Euclide, s'est prolongé en un complexe très riche basé sur des systèmes d'axiomes multivalents, liés aux objets des deux premiers niveaux de la manière même dont les solides de la géométrie élémentaire liés aux postulats d'Euclide.

Peut-on s'émanciper de ce cadre? Question difficile, dont la réponse semble être négative. Je me permets d'affirmer même que la réponse est franchement négative, si l'on veut rester dans le domaine de la mathématique prise dans son ordre d'intelligibilité.

Peut-on concevoir des êtres mathématiques qui ne soient pas enracinés dans quelque configuration matérielle concrète. Je n'en connais aucun; mais mes connaissances sont limitées... Les constructions de CANTOR et de beaucoup d'autres vont, je crois, dans le sens évoqué, en évitant toute incarnation. Diverses attitudes philosophiques guident les démarches.

Posant *in abstracto* des objets de pensée mathématiques, on peut les situer, soit dans le monde des idées platoniciennes, d'où la démarche de la découverte, soit encore dans la liberté de l'esprit humain au sens du conceptualisme kantien. Mais ces hypothèses se heurtent à de sérieux obstacles. Comment ériger en somme une théorie axiomatique sans modèle au sens précédent? La consistance devient très mal assurée et les antinomies difficiles à éviter. Reste une sorte de nominalisme: l'être mathématique se pose sur les signes typographiques utilisés, assemblés suivant certaines règles. Le mathématicien opère ici de la façon suivante:

- il pense des êtres mathématiques (vagues) en l'avouant ou non
- il guide son esprit par une typographie linéaire enrobée dans un texte
- il voit les êtres mathématiques concentrés dans les signes représentatifs
- le travail logique consiste à manipuler ces signes: c'est de la logistique

La théorie RUSSELL-WHITEHEAD est un exemple d'articulation de symboles typographiques qui prétend transcender la logique fondée sur les essences; elle est très utile pour affiner le discours mathématique en tant que discours, mais ne remplace pas les données des deux premiers niveaux.

On peut bien, par ailleurs, poser les axiomes d'une théorie ensembliste: ZERMELO-FRÄNKEL, par exemple, en posant en même temps l'acte de foi qui consiste à croire que le système issu des prémisses ne comporte aucune contradiction. Cette certitude ne vient que de l'expérience et ne saurait provenir d'une démonstration.

Poursuivant la recherche dans le même sens, on débouche alors sur

4. *Le formalisme intégral*

C'est ici le moment du formalisme intégral, où le discours typographique, disent certains, devient la seule réalité. Pour une droite, par exemple, plus de sens «intuitif», cette béquille pour «sous-développés, infirmes à mentalité prélogique». Les caractères d'imprimerie suivants expriment toute la réalité, dit-on:

$$[\exists (a,b,c) \in IR^3 - \{0,0,0\}]\ \{(x,y) \in IR^2 \mid a\,x + b\,y + c = 0\}$$

N. BOURBAKI, dans son livre de théorie des ensembles, pose très bien les bases formalistes de la mathématique, qui devient dans cette conception une manipulation typographique linéaire particulière:

Une théorie mathématique est un ensemble de signes: les signes logiques $\square$, τ, ν, $\neg$, les lettres, et les signes spécifiques ($=, \in, , \ldots$). Un *assemblage* est une succession de signes

$$\tau\,\nu\,\neg \in \square\, A' \in \square\, A''$$

par exemple. On a des règles qui disent que certains assemblages sont des termes, ou des relations, ou des théorèmes. Un ensemble est un assemblage, et non plus une collection d'objets. Partant d'une théorie purement typographique, on retrouve le discours axiomatique, au prix de conces-

sions faites à l'intuition. On sait par ailleurs que le texte formalisé ne peut être effectivement écrit; on se contente à chaque stade de savoir qu'il pourrait l'être éventuellement.

Ces manipulations formalistes présentent certainement un très grand intérêt, car elles fournissent un discours mathématique pur et affiné. Une culture mathématique véritable devrait impliquer la connaissance des notions principales en cette matière, dont l'informatique, par exemple, ne saurait se passer.

Ainsi, nous obtenons une notation, expression écrite de la mathématique, une longue ligne flexible codée, capable de se prolonger indéfiniment.

Selon N. BOURBAKI, le travail axiomatique n'est plus que l'art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir. La signification des assemblages importe peu; la seule chose qui compte, c'est l'observation correcte du code de formation.