Zeitschrift: Jahrbuch der Schweizerischen Philosophischen Gesellschaft = Annuaire de la Société Suisse de Philosophie

Herausgeber: Schweizerische Philosophische Gesellschaft

Band: 2 (1942)

Artikel: Inventer et découvrir

Autor: Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-883882

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Inventer et découvrir.

Par R. Wavre.

Introduction.

Cette étude se divise en deux parties: la première, de nature plus philosophique; la seconde, plus mathématique. Dans la première, le problème que je désire étudier sera précisé ainsi que ses rapports avec d'autres. La seconde, de caractère naturellement plus technique, contient l'essentiel de l'argumentation. Je tenterai aussi de répondre à quelques objections dans cette seconde partie. A vrai dire, je sens tout le poids de ces objections et du courant général de la pensée mathématique qui risque de m'emporter vers des positions plus communément reçues, et j'ai un peu l'impression d'être comme la truite qui veut remonter la chute du Rhin.

Nous voudrions éviter toute méprise quant à notre but. Ce n'est pas une étude à proprement parler psychologique à propos de la genèse des mathématiques. Notre but est de faire le partage entre ce qui doit être qualifié d'invention et ce qui doit être appelé découverte, car il me semble incontestable que ces deux éléments se présentent effectivement dans les actes de genèse de notre science et y jouent des rôles différents. Nous inventons le produit scalaire et le produit vectoriel, mais nous découvrons l'irrationalité de la racine carrée de 2. Naturellement, notre domaine est voisin du domaine philosophique, d'une part, et psychologique de l'autre. Vis-à-vis de ce dernier, nous croyons pouvoir en rester, en quelque sorte, sur des positions cartésiennes, en requérant qu'il y a deux parts: l'une revient à l'imagination, l'autre à l'«entendement». Nous le disons, non pas pour méconnaître la valeur des études récentes, mais parce que cette distinction de deux facultés nous est ici utile. Nous voulons tenter d'éviter le renversement que l'on est tenté de faire lorsqu'il s'agit de savoir si les «êtres» mathématiques: triangle, fonction, ensemble, groupe, sont des inventions ou des découvertes. Si, diront quelques philosophes, les êtres mathématiques n'existent que dans votre pensée, mieux, s'ils ne préexistent pas à votre pensée, vous les

inventez; s'ils préexistent, vous les découvrez. Si ces êtres ont une existence en soi indépendante de tout notre moi, réalisme, vous les découvrez; s'ils ne sont relatifs qu'au sujet pensant, ce sont des inventions. Or, justement, je crois que ces alternatives sont vaines et inaptes à répondre à la question posée. Qu'est-ce qui préexistait dans la pensée des mathématiciens avant la découverte des fonctions elliptiques? Rien peut-être qu'une nervure de l'esprit. Au contraire, l'étude de la part d'invention et de découverte dans les sciences mathématiques nous paraît apte à préciser les raisons que l'on a d'être idéaliste ou réaliste en philosophie; non pas dans le sens d'un choix inévitable, mais d'un juste dosage entre ces deux tendances, dans le sens de l'adoption d'une position médiatrice. En mécanique céleste, on n'est sorti de l'alternative entre Ptolémée et Copernic qu'en faisant avec Galilée et Newton intervenir la mécanique terrestre. Dans le même sens, j'ose espérer qu'un jour les philosophes sortiront de l'alternative: idéalisme — réalisme grâce à l'effort des techniciens. Henri Lebesgue recommandait aux mathématiciens de s'en tenir à ce qu'il appelait modestement une philosophie de seconde zone, cependant essentielle, indispensable même pour la philosophie proprement dite: « Nos réflexions de techniciens pourraient aider les philosophes comme les observations des travailleurs manuels ont parfois guidé les physiciens et les chimistes. »

Idéalisme, réalisme, et pragmatisme.

Au moyen de quelques citations, montrons la diversité des opinions philosophiques sur la question de savoir si les êtres mathématiques existent en dehors de nous ou si nous les créons. Voyons chez Descartes s'opérer un passage de l'idéalisme au réalisme qui situe ces « êtres » hors de notre pensée. Il est tiré de la Vème Méditation; les derniers mots de ce texte sont les plus révélateurs: « Je trouve en moi une infinité d'idées de certaines choses qui ne peuvent pas être estimées un pur néant, quoique peut-être elles n'aient aucune existence hors de ma pensée, et qui ne sont point feintes par moi, bien qu'il soit en ma liberté de les penser ou de ne les penser pas, mais qui ont leur vraie et immuable nature. Comme par exemple, lorsque j'imagine un triangle, encore qu'il n'y ait peut-être en aucun lieu du monde hors de ma pensée une telle figure et qu'il n'y en ait jamais eu, il ne laisse pas néanmoins d'y avoir une certaine nature,

ou forme, ou essence déterminée de cette figure, laquelle est immuable et éternelle, que je n'ai point inventée et qui ne dépend en aucune façon de mon esprit.»

Opposons maintenant la lettre de Charles Hermite à Stieltjes à la déclaration de Dedekind (au sujet de la définition des nombres irrationnels par des classes de nombres rationnels): «Les nombres, dit Hermite, me semblent exister en dehors de nous et en s'imposant avec la même nécessité, la même fatalité que le sodium et le potassium.» «Je conseillerais plutôt, dit Dedekind, de ne pas entendre par nombre la classe même, mais quelque chose de nouveau que l'esprit engendre. Nous sommes de race divine et possédons . . . le pouvoir de créer.» Et voici la position moyenne de Kronecker, bien connue: «Le bon Dieu a fait le nombre entier, tout le reste est œuvre humaine.» On aurait tort sans doute de prendre ces aphorismes dans leur simplicité pour l'expression de la philosophie de leur auteur; il n'est pas douteux toutefois que la nature des découvertes de ces trois mathématiciens les ont inclinés vers le réalisme ou vers l'idéalisme. Chaque mathématicien a la philosophie de ses propres découvertes. C'est une raison de plus d'étudier d'une manière générale ce qui sollicite le technicien à adopter telle ou telle philosophie; et à ramener, autant que faire se peut, le problème transcendant en soi du conflit entre l'idéalisme et le réalisme, à un autre plus immanent, posé dans la pensée même et à propos de la recherche technique. Nous connaissons un écueil à cette manière de procéder, c'est la position pragmatique; mais ne peut-on pas l'éviter? ou mieux la tempérer, elle aussi, en analysant la part de découverte que comportent les mathématiques. Ici encore, quelques citations définiront les positions respectives mieux que je ne saurais le faire. Je les emprunte à la préface de Bergson au «Pragmatisme» de William James: «Pour les philosophes anciens, il y avait, au-dessus du temps et de l'espace, un monde où siégeaient de toute éternité toutes les vérités possibles: les affirmations humaines étaient pour eux d'autant plus vraies qu'elles copiaient plus fidèlement ces vérités éternelles. Les modernes ont fait descendre la vérité du ciel sur la terre; mais ils y voient encore quelque chose qui préexisterait à nos affirmations. La vérité serait déposée dans les choses et dans les faits: notre science irait l'y chercher, la tirerait de sa cachette, l'amènerait au grand jour.» . . . «Cette conception de la vérité est naturelle à notre esprit et naturelle aussi à la philosophie parce qu'il

est naturel de se représenter la réalité comme un Tout parfaitement cohérent et systématisé que soutient une armature logique. Cette armature serait la vérité même; notre science ne ferait que la retrouver.» Jusqu'ici, Bergson analyse donc la créance que les vérités sont pour ainsi dire classées en dehors de notre esprit. Il y oppose maintenant la conception pragmatiste: « La vérité, d'après le pragmatisme, s'est . . . faite peu à peu, grâce aux apports individuels d'un grand nombre d'inventeurs. Si ces inventeurs n'avaient pas existé, s'il y en avait eu d'autres à leur place, nous aurions eu un corps de vérité tout différent. La réalité fût évidemment restée ce qu'elle est, ou à peu près; mais autres eussent été les routes que nous y aurions tracées pour la commodité de notre circulation.» . . . « Une vérité pour être viable doit avoir sa racine dans des réalités; mais ces réalités ne sont que le terrain sur lequel cette vérité pousse; et d'autres fleurs auraient aussi bien poussé là si le vent avait apporté d'autres graines.» . . . « On pourrait — ajoute Bergson — résumer tout l'essentiel de la conception pragmatiste de la vérité dans une formule telle que celle-ci: tandis que pour les autres doctrines une vérité nouvelle est une découverte, pour le pragmatisme c'est une invention.»

Les uns ne voient dans la recherche scientifique qu'un assujettissement progressif à des réalités indépendantes de notre volonté; les autres, forts du sentiment de la liberté de nos démarches spirituelles, verront dans la science non pas un assujettissement, mais tout au moins un arbitrage. A Gustave Juvet: « L'esprit ne crée pas les faits mathématiques, il les subit; la recherche fructueuse n'est pas une invention, c'est une découverte », il convient d'opposer Dedekind ou en tout cas L. Brunschvicg: « L'esprit est libre et se sent créateur.» Mais, nous le répétons, de toutes ces redoutables alternatives, il convient de sortir, et pour cela d'étudier ce qui nous donne l'impression d'une invention libre et ce qui au contraire paraît contraindre l'esprit, et cela dans la genèse même des mathématiques. Il faut, me semble-t-il, remonter aux causes des impressions premières que nous avons de découvrir ou d'inventer; étudier en quoi consiste l'autonomie des mathématiques pures, de manière à concilier les points de vue et à pouvoir souscrire pleinement à la fois à la pensée suivante de Juvet et à cette autre de L. Brunschvicg: « La seule métaphysique des mathématiques . . . ce sont les mathématiques elles-mêmes, comme elles sont à elles-mêmes leur propre technique et leur propre

esthétique.» (Juvet: *La structure des nouvelles théories physiques.)* « Le savant est tourné vers les faits, vers les expériences de laboratoire ou les raisonnements mathématiques qui s'établissent indépendamment de sa volonté et dont il attend anxieusement la confirmation de ses inventions. La spécificité de la science, c'est que l'invention s'y fait découverte et cela grâce à un procédé intellectuel de vérification.» (L. Brunschvicg, dans une réponse à Edouard Leroy au sujet de la philosophie nouvelle (pragmatisme). *Revue de métaphysique et de morale*, 1901.) Je m'excuse de faire tant de citations, d'autant plus que quelques-unes ont une forme aphoristique et, prises isolément, dénatureraient la pensée de l'auteur. Il est bien entendu que c'est entre les positions extrêmes que la caravane passe, mais elles ont cela de bon, dans leur extrémisme même, de bien préciser le problème en question. Jetons un regard sur le domaine voisin de la physique. Louis de Broglie, dans son livre *Continu et Discontinu*, dit quelques mots du problème de l'invention et de la découverte dans l'ensemble des sciences mathématiques. Pour le physicien, il y a, cela va sans dire, découverte des rayons X, de la radioactivité, tandis qu'en général il n'y aurait qu'invention dans les mathématiques. Louis de Broglie nuance l'opinion commune des physiciens et fait remarquer qu'il y a dans une découverte de physique une grande part d'invention, laquelle provient des théories dans lesquelles l'expérience se place: « si la découverte expérimentale est en un sens une invention, par contre la création et l'invention dans le domaine de la science théorique possèdent à certains égards les caractères de la découverte.» La même question se pose donc presque dans le même langage dans le vaste domaine de la physique. D'un autre côté, dans le domaine de la logique, il faudrait expliquer pourquoi les logiciens et logisticiens, depuis Aristote jusqu'à nos jours, ont été des réalistes, pourquoi la logique incline-t-elle la pensée vers un réalisme des classes si évident chez Frege: « le mathématicien ne peut créer arbitrairement quelque chose, aussi peu que le géographe; lui aussi doit seulement découvrir ce qui est là et lui donner un nom.»

La distinction du sens commun.

Au risque de paraître terriblement « pion », j'éprouve le besoin de préciser un peu le sens des termes ici visés. J'emprunte leur signifi-

cation au sens commun et, dans cette tentative sémantique, je voudrais faire ressortir quelques-uns des sens les plus courants de ces deux infinitifs. On pourrait exiger une définition rigoureuse. Si souhaitable qu'elle soit, cette définition préalable serait dangereuse, elle réintroduirait quelques-uns des a priori que je cherche justement à éviter; et quant à croire que les choses se peuvent soumettre à une définition rigide, ce serait, comme l'enseigne l'histoire de la science, se placer dans un des âges révolus de l'intelligence. Cette définition n'est possible qu'a posteriori et se trouvera être toujours perfectible. Mieux vaut donc partir du sens commun où tout le monde se comprend. Caus et Papin ont découvert la force expansive de la vapeur d'eau et ont inventé la machine à vapeur. Christophe Colomb a bénéficié de l'invention des caravelles pour découvrir l'Amérique. Le télescope est une invention, en tant que moyen de grossir l'apparence des objets, où l'on a tiré parti de découvertes d'optique, concernant la réfraction des lentilles. Le télescope a permis à Galilée de découvrir les satellites de Jupiter et les taches solaires. Les ondes hertziennes, la radioactivité, la déviation par le soleil des rayons lumineux provenant des étoiles, la diffraction des électrons par les cristaux, sont des découvertes qui prennent leur véritable signification dans le cadre des constructions de la théorie physique. Prises isolément, ce ne seraient que de simples constatations. Les réclames lumineuses, le gramophone, la T. S. F. sont des inventions rendues possibles par un grand nombre de découvertes antérieures. Un état-major invente son chiffre et cherche à découvrir celui de l'ennemi. Dans les sciences appliquées, on invente donc un moyen nouveau et l'on découvre de nouvelles propriétés. Le *dictionnaire philosophique* de M. A. Lalande se fait l'interprète de cette acception du mot « inventer »: « production de synthèse d'idées nouvelles; combinaison nouvelle de moyens en vue d'une fin. » Malheureusement, il n'analyse pas le sens de découvrir. C'est évidemment mettre en lumière, en évidence, quelque chose de nouveau. Il est souhaitable que ce quelque chose soit isolable du reste comme l'Amérique, et non seulement d'une île particulière, d'un continent de grandeur insoupçonnable comme l'île de Colomb ou celle d'Hispañola. Nous retrouverons de tels touts dans les mathématiques. Nous avons en nous le sentiment du nécessaire et celui du contingent. A ce point de vue du sens commun, nous pouvons donc dire: la découverte se fait d'un élément nécessaire, l'invention d'un élément contingent,

qui aurait pu ne pas intervenir. L'Atlantide, le dragon, le serpent qui crache des flammes sont aussi des inventions avec toutes les chimères. Mais que l'on ne s'y trompe pas, ce sens péjoratif est à retenir ici. Un criminel invente une histoire pour se sauver, mais le juge l'accule à une contradiction et ainsi découvre le véritable auteur du crime. La première partie d'une démonstration par l'absurde est une invention dans le sens d'une chimère: j'admets non B et montre qu'il y a contradiction avec A qui est admis, j'en déduis donc B.

Inventer, d'après cette analyse, est un appel à l'imagination, une création de moyen, un pôle de condensation des idées. Découvrir est la mise en évidence de quelque chose de nécessaire non encore aperçu et parfois très caché. La découverte est beaucoup plus canalisée que l'invention. Les physiciens voient dans la mathématique pure un moyen d'expression, une langue bien faite. Comme dans tous les moyens d'expression il y a une invention. Les mathématiciens, dont le but est de mettre en relief les relations nécessaires entre les nombres, y verront au contraire une collection de découvertes. Les langues (français, allemand, esperanto . . .) à moins d'être péanéen, seront pour le mathématicien d'heureuses inventions en tant que moyen de s'expliquer; poursuivant ainsi la chaîne, les linguistes seront peut-être enclins à trouver d'heureuses découvertes dans la comparaison des langues. E. T. Bell a, paraît-il, à l'instar de l'Institut Gallupp, demandé à 300 étudiants si le géomètre découvre ou invente. Les futurs physiciens ont, presque tous, répondu: « Il invente », les futurs mathématiciens: « Il découvre.» Cela ne tient-il pas à cette nuance entre moyen et but? Cette distinction, nous la retrouverons au sein des mathématiques prises en elles-mêmes et non comme un langage pour d'autres sciences.

Les géomètres, en général, sauf lorsqu'ils se font philosophes, évitent ces deux termes. Ils paraissent redouter ces allusions à l'activité du sujet, et ne sont pas à leur aise dans cette ambiance subjective. Ils préfèrent éviter ce contact avec la psychologie. Aussi préfèrent-ils des termes plus conventionnels: soit un point, soient deux fonctions . . ., considérons, prenons, ou des termes plus précis tels que: construisons, lorsqu'il s'agit d'une véritable construction; admettons, lorsqu'il s'agit d'une véritable hypothèse; ou encore: introduisons: l'introduction dans la science des nombres imaginaires. Ce langage a l'avantage ou bien de ne rien trancher qui puisse être

le sujet d'un débat quelconque, ou d'être plus précis; mais il laisse cependant indéterminé le sens où les géomètres emploient le verbe « être » et il dissimule la part du contingent et du nécessaire dans l'activité de l'esprit. Il n'est pas interdit de chercher à pénétrer le sens de ces différents termes qu'une tradition millénaire a rendus cenventionnels.

La thèse que je voudrais défendre.

L'étude plus technique qui formera la seconde partie de ce travail ferait, je crois, ressortir les points suivants:

Quel que soit le rôle des intuitions sensibles, naïves, raffinées, opératoires, logiques, rationnelles, la soudaineté de la création, l'apport du subconscient, il est possible de démêler deux éléments: l'un est l'imagination d'actions et de moyens d'action, qui relève de l'invention; l'autre relève davantage de la logique, il est judicatoire et conduit à la découverte. Dans l'esprit du savant, au moment même de la recherche fructueuse, les deux actes d'inventer et de découvrir alternent très rapidement, au point d'être presque indiscernables et comme fondus ensemble. Cette étape de la création, merveilleusement décrite par H. Poincaré, rentre aussi dans celle que définit E. Leroy: « acte de synthèse créatrice où le tout préexiste aux parties, où l'on devine le but et les moyens d'une seule vue sommaire, où, comme le disait Pascal, on aperçoit la chose d'un seul regard et non par progrès de raisonnements. » Mais lorsque l'on cherche à justifier la vérité découverte, les éléments se séparent comme ils se séparent dans les exposés didactiques. L'action inventive précède et prépare la découverte. On connaît la démonstration du théorème de Pythagore sur quelque mur antique: les carrés figurent déplacés, mais encore reconnaissables, et au-dessous il est écrit: « Regardez et voyez. » Cette construction (invention), prépare une constatation qui sans elle eût été impossible. Il y a donc, dans le cas des démonstrations des théorèmes de la géométrie, une invention de procédés constructifs et l'aperception, découverte de rapports logiques, sous des formes diverses: identité, exclusion, implication, etc. Pour la géométrie élémentaire, je me crois en accord avec ce que dit Goblot sur le rôle des constructions. Je puis choisir telle ou telle construction pour démontrer le théorème de Pythagore, mais une fois cette construction faite, je découvre une propriété. Une

image me vient à l'esprit: une fois admises les règles du jeu d'échecs (conventions opératoires), chacun invente ses coups, au milieu de la partie une complexité cache l'issue, victoire ou défaite. Les conséquences lointaines des coups sont imprévisibles et chacun se sent libre. Que la partie se simplifie par l'élimination d'un grand nombre de pièces ou pour toute autre raison, et l'un des joueurs découvre qu'il peut gagner. La liberté et les inventions de l'autre diminuent en vertu de cette simplification du jeu.

L'invention conditionne la découverte, dans ce sens qu'il n'y a pas pour l'intelligence humaine de rapports à apercevoir sans éléments à rapprocher. A. Fouillée le dit pour l'ensemble des sciences et je crois que c'est spécialement vrai en mathématiques: « Toute découverte, non fortuite, présuppose, il est vrai, une invention; mais toute invention n'a de valeur que si elle aboutit à une découverte. » En mathématiques, la primauté, pour ainsi dire, est accordée à la découverte; l'invention seule ne serait qu'un jeu en tant qu'action. L'économie de la pensée veut que l'on obtienne un résultat intéressant avec un minimum d'action. Certaines parties de l'analyse supérieure se prêtent très bien à cette floraison de découvertes. C'est qu'en général le terrain a été préalablement préparé et les propriétés logiques sont disposées comme pour une guerre éclair. En mathématiques, les moyens opératoires sont canalisés vers le fait à apercevoir, l'invention est infléchie vers la découverte. L'inverse paraîtrait être un relâchement de l'intelligence, un amusement et manquerait le but qui est de connaître des rapports certains. Se contentant d'agir, l'esprit n'atteindrait pas à la dignité que confère la connaissance des vérités immuables. Dans la technique: cryptogrammes, locomotives, l'utilité joue le rôle de principe directeur. Une analyse de la genèse de la notion d'espace conduirait à distinguer, là aussi, deux pôles, l'un moteur correspondant à des actions, l'autre coordinateur. Dans le groupe des déplacements, les solides sont aperçus comme des invariants en tant qu'ensembles solidaires de sensations persistantes. M. Piaget poursuit, comme on sait, de profondes analyses sur le rôle de l'intelligence sensori-motrice qui précède l'intelligence elle-même. Inventer, c'est choisir, c'est discerner l'utile, ce qui est fécond en résultats (vérité). Dans ce sens, toute la géométrie d'Euclide est une grande invention tout émaillée de découvertes. Il ne me paraît pas faux d'affirmer ceci: dans tous les domaines des mathématiques, sauf peut-être dans la partie la plus primitive de l'arithmétique *nous*

inventons les définitions, nous découvrons les théorèmes. Bien que l'on soit, par des besoins pratiques ou par un souci de généralisation, sollicité à introduire la notion de dérivée ou celle d'intégrale, il n'y aurait aucune contradiction à ne pas le faire; on se priverait simplement d'un moyen puissant d'investigation dans le monde mathématique ou dans celui de la nature. Mais une fois admise la notion de dérivée, je ne puis plus faire que la dérivée du sinus ne soit pas le cosinus. Il y a dans cette relation entre les deux fonctions trigonométriques fondamentales un rapport nécessaire une fois la définition posée. Je pourrais ne jamais considérer de triangle, mais une fois la définition du triangle euclidien inventée, je découvre que les médianes se coupent en un même point. Il me semble donc que nous inventons la notion de triangle, bien qu'il y en ait d'imparfaits dans la nature ou dans les beaux-arts. C'est une synthèse d'idées, une construction faite avec trois droites. La propriété des médianes de comporter un point commun est une nécessité qui était, au début, plus ou moins cachée. On formule un théorème lorsqu'il y a précisément un rapprochement imprévu, une vérité remarquable à signaler. C'est comme un coup de cymbale qui scande le jeu continu des inventions et enregistre un résultat. De même que pour l'Amérique, il faut qu'un théorème forme un tout; il doit rappeler ou évoquer la définition des êtres qu'il concerne et faire surgir un rapport inattendu. Le langage dans lequel s'exprime un théorème est en général beaucoup plus simple que les êtres dont il rapproche les propriétés. Ce langage est plus voisin de la logique, de l'identité, ou des grandes catégories rationnelles: impliquer, être égal, prendre telle valeur, que les inventions: fonctions analytiques, espaces abstraits . . . dont le théorème énonce quelques propriétés. Peut-être que pour Dieu il revient au même d'inventer $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ et de découvrir toutes les propriétés des fonctions engendrées par cette série de Taylor; pour l'homme, il n'en est pas ainsi. Nous sommes de pauvres voyageurs dans l'ombre, obligés de tâter les murailles pour découvrir notre chemin. Nous nous créons des pôles de condensation des idées, sans savoir à l'avance quel résultat va pouvoir être aperçu. Dans le monde des idées possibles, nos inventions sont comme des gestes pour atteindre des atomes de vérité; mais le grand tout, l'esprit humain est loin de pouvoir le saisir comme un donné dans une aperception totale. Ce tout aurait-il un sens? Est-ce un donné? Les inventions futures sont, dans une certaine mesure,

contingentes, et les découvertes n'apparaîtront que dans la direction de ces inventions. Pour l'adapter aux mathématiques pures, je serais donc tenté de modifier, sans en diminuer la valeur, je l'espère, la pensée de L. Brunschvicg soulignée plus haut: la spécificité des mathématiques, c'est que les inventions s'y font découvertes grâce aux démonstrations.

Dans le flux de l'action inventive, les théorèmes recueillent la part des découvertes. Une fois cette action bien engagée, ce serait renoncer à la possibilité de faire des mathématiques, que de prendre le contre-pied d'un théorème. Les axiomes et postulats d'Euclide ont été suffisamment étudiés dans les ouvrages de philosophie pour que nous puissions être bref. Ce sont des inventions dans la mesure où ils contiennent un élément qui dépend de notre choix; dans la mesure où, avec Poincaré, on peut y voir des « conventions »; dans la mesure encore où ils contribuent à définir ou à construire des notions idéales, comme la droite, le plan, etc.; ce sont alors les définitions déguisées du même auteur. Ce seraient des découvertes expérimentales s'ils exprimaient des propriétés certaines de notre espace sensible, mais on sait qu'ils ne peuvent exprimer de telles propriétés qu'approximativement, à notre échelle. Dans le grand, système solaire, ce n'est probablement plus le cas et ces notions sont peut-être inadéquates à l'échelle atomique. Et pourtant, ces axiomes sont admis comme valables, quelle que soit l'échelle. L'accord pratique de cette géométrie avec nos expériences journalières, son utilité en architecture ou dans la science de l'ingenieur donnent à la géométrie l'apparence d'une découverte, mais c'est dans le sens de la physique dont la géométrie constitue un des premiers éléments. Au point de vue mathématique, cette découverte est de l'ordre de la commodité seulement, dans le sens où Poincaré prenait le mot « commode ». Par là, nous entendons que l'invention de la géométrie d'Euclide s'est révélée efficace dans un champ expérimental très étendu. Maintenant, si les axiomes et les postulats contiennent une grande part d'invention, les conséquences formulées dans les théorèmes sont des découvertes une fois ces axiomes admis, sans qu'il y ait lieu de s'en référer à l'expérience.

En Suisse, Ernest Naville dans *Logique de l'Hypothèse* a pressenti la révolution qui allait s'opérer dans la philosophie avec H. Poincaré, E. Boutroux, H. Bergson, dans le sens d'une libération d'un certain apriorisme intégral. Mais, au lieu de placer l'hypothèse, et par là

l'invention, dans les postulats, il la place, psychologiquement, dans les théorèmes. « On n'a pas remarqué que pour rattacher un théorème à ses antécédents logiques, il faut posséder ce théorème, et que pour le posséder, il est nécessaire de le supposer. » Mais le théorème est une conséquence inéluctable des axiomes, si ceux-ci forment un système complet. Si l'on veut voir de l'hypothètique quelque part, ce ne peut être en mathématiques qu'à la base du tout. Le reste est déduction rigoureuse. Si la mécanique rationnelle, et non les faits physiques qu'elle exprime, est contingente, c'est à cause de ses principes et non à cause des conséquence de ses principes. Quant au pragmatisme de M. Leroy et de son école, il se complaît trop à mon gré dans des inventions obscures. Si cet auteur avait insisté davantage sur l'élément découverte, comme il se présente en toute lumière dans les mathématiques, je le suivrais mieux. Les découvertes des pragmatistes relèvent de la commodité seulement, mais en mathématiques il y a des découvertes véritables.

Les notions premières.

Notre distinction s'atténue lorsque l'on se rapproche des notions premières, elle s'efface même complètement s'il s'agit des nombres entiers, de l'idée d'égalité, de correspondance, de transformation, de dépendance fonctionnelle. . . . Nous serions même tenté de caractériser les idées fondamentales par le fait qu'il est impossible de dire si nous les inventons ou découvrons. Le fait que nous les axiomatisons ne prouve pas ici que nous les inventions. Les deux pôles, action et constatation logique, viennent s'y confondre. Ces idées de nombre, d'ensemble . . . sont claires par elles-mêmes, une courte explication les suscite ou ressuscite dans chaque intelligence; sans que l'on aperçoive d'emblée toute leur portée, elles sont comme les sources inépuisables de notre science. A moins que l'on n'ait pris parti pour ou contre le réalisme, on ne peut dire si nous les inventons ou découvrons. Conformément au système de référence ici adopté, nous chercherions à éviter ce choix par une étude plus poussée des notions qui sont à la base de notre science et cela en mettant encore en évidence ce qui est opératoire et ce qui est judicatoire. Quelle qu'en soient l'origine et la genèse, ces notions sont transparentes et ne font qu'un avec le sujet pensant. Elles ne peuvent pas être prises comme objet, elles sont comme les nerfs de la pensée mathématique. Je ne sais

donc si nous inventons ou découvrons les nombres entiers, la question n'a peut-être plus de sens. Par contre, nous découvririons sans peine si le nombre 137 est entier ou décomposable. Nous inventons des classes de nombres ou des procédés pour nommer ou construire des nombres de plus en plus grands. C'est dans ce sens, sans doute, qu'il faut interpréter Poincaré, lorsqu'il dit: « Tous les nombres entiers que l'on a inventés et tous ceux que l'on pourra inventer un jour . . . » En résumé, sauf opinion philosophique préalable, la distinction entre invention et découverte s'estompe précisément lorsqu'on aborde les notions premières sans lesquelles il n'y aurait pas de mathématiques.

Conclusions.

Nous avons accompli une tâche d'écolier qui pourrait se poursuivre indéfiniment: dire ce qui, en mathématiques, correspond à deux termes évocateurs. Nous avons évité les a priori de la philosophie, évité aussi ou mis entre guillemets les termes: objectivité, réalité, exister, etc. parce que trop métaphysiques pris en eux-mêmes, et détachés de l'activité même de l'esprit. Ce n'est pas que nous refusions tout sens à ces expressions, mais nous voudrions que ces termes prissent une signification en rapport avec l'activité du technicien telle que nous tentons de la décrire. L'invention en mathématiques est apparue orientée vers l'action; elle réunit un matériel opératoire, une synthèse de moyens; la découverte est un enregistrement de rapports nécessaires. Si nous inventons des opérations et des définitions, nous découvrons des conséquences qui habituellement s'inscrivent dans les théorèmes. Cette distinction s'atténue s'il s'agit de la prise de conscience d'une notion première. On serait tenté de dire que les notions premières sont des idées innées; elles préexistent dans l'esprit, donc vous les y découvrez. Vous n'avez pas pu les inventer, elles étaient déjà là. Cet argument de la préexistence nous paraît trompeur. Ces notions ne sont pas dans la pensée avant qu'on y pense, mais elles se cristallisent semblablement dans toutes les intelligences mathématiques. Dans la seconde partie de cet exposé, nous croyons pouvoir en plus montrer que certaines écoles mathématiques se situent dans des extrêmes au point de vue ici adopté. Le cantorisme voulait découvrir sans inventer suffisamment; à l'opposé, le brouwerisme excelle en invention mais se

prive volontairement d'un moyen de découverte. Invention dont les résultats sont insuffisamment découverts d'un côte, présumée découverte sans action effective, tel est l'écueil des extrêmes. Les mathématiques progressent grâce à une juste proportion entre ces deux éléments que l'effort historique nous a appris à doser exactement.

Le réalisme est une tendance naturelle chez tous les savants. Ils sont tous portés à extérioriser un donné indépendant d'eux sur lequel ils travaillent, et ce n'est d'habitude qu'en se faisant philosophes qu'ils s'en prennent à mettre ce donné en doute. Pourrait-on déduire de notre analyse des motifs ou un flux de force qui justifieraient l'attitude réaliste?

Quant à l'idéalisme il n'a pas besoin d'une nouvelle analyse, car il n'est pas nécessaire d'établir que les mathématiques existent dans l'esprit; c'est leur existence en dehors de l'esprit, c'est le « platonisme » qui a besoin d'une justification. La croyance d'un Hermite, de Frege ou de Juvet en l'existence, indépendante de la pensée, des êtres mathématiques, semble avoir plusieurs sources. Les êtres géométriques sont susceptibles d'une représentation sensible; ils sont même parfois suggérés par cette représentation. Je ne puis voir un triangle que coloré. Puis je fais une abstraction et sais bien que la figure idéale n'est pas le triangle sensible, mais même idéalisé il est encore conçu comme extérieur à moi. L'esprit a aussi fait abstraction de lui-même et s'est considéré comme un intermédiaire, un simple transformateur entre le triangle sensible et le triangle en soi. Il serait bien intéressant d'entendre F. Gonseth à ce propos.

Une seconde source des opinions réalistes se dégage assez bien de notre système de référence: c'est précisément l'élément découverte, dans le sens de la constatation de rapports nécessaires et cachés. Nous ne pouvons affirmer qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. Il y a des structures propres, de la résistance à nos désirs, même dans les constructions de l'esprit, et certaines relations ne se dévoilent qu'après de longs efforts. Cette contrainte nous fait croire à un «non-moi» réalité indépendante de l'esprit. S'il n'y avait que découverte, on serait réaliste; s'il n'y avait qu'invention on serait idéaliste, et pragmatiste; la vérité vue sous le jour du pragmatisme, ne serait plus que la constatation d'une réussite étonnante. Nous savons que la découverte est plus que l'invention liée à des processus logiques. La logique serait-elle donc

la cause du réalisme? « Réalisme corrélat nécessaire du logicisme », dit M. Cavaillès. Quand la logistique avec Couturat et Russel prétendait être la seule mère des mathématiques, elle se complaisait, ou était acculée, à un réalisme des classes vraiment exorbitant. Ce réalisme est un refuge lorsque le matériel opératoire et l'action inventive font défaut. La tendance, manifeste chez Frege, Russel, Zermelo, à raisonner sur des classes insuffisamment définies, non construites, sur des ensembles insuffisamment inventés, exige une créance que ces classes et classes de classes, ensembles de choix, se soient déjà arrangés d'eux-mêmes dans toutes les perspectives possibles. L'intelligence n'aurait plus à faire ce classement, ces mises en correspondance effectives. Elle se contenterait de l'invoquer comme déjà fait.

Qui reconnaît la présence des deux éléments: invention et découverte, éprouvera le besoin de rejeter le dilemme idéalisme-réalisme. La mathématique pure sera précisément le lieu où la pensée s'enchaîne librement.

Quelques objections possibles.

a) On dira peut-être: Votre distinction entre invention et découverte est entièrement dominée par l'idée qu'on se fait des êtres mathématiques. S'ils n'existent que dans la pensée, vous les inventez. S'ils sont conçus comme des copies d'autres êtres qui existeraient en dehors de la pensée, vous les découvrez. Je ne puis souscrire à cette alternative, car même dans l'hypothèse où les nombres entiers sont une invention, je ne saurais faire que le double d'un carré soit encore un carré et l'on découvre l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Si l'esprit invente certains postulats, il n'est pas entièrement maître des conséquences; le nier, reviendrait à nier la consistance même de toutes les mathématiques.

b) On invente une question, on découvre la réponse. Dans un problème, on invente une donnée, on découvre la solution. En gros, je suis d'accord, mais c'est aux examens que cela se passe ainsi. Cette distinction s'appuie sur une science déjà constituée. Celui qui pose le problème en connaît déjà la solution. Car comme le dit si justement Poincaré, pour bien poser un problème, il faut l'avoir déjà résolu; il faut en effet avoir vérifié que la solution existe et si possible

qu'elle est unique. Si la théorie n'existait pas au préalable, nous ne savons pas si la donnée conduira véritablement à quelque chose. Elle peut être contradictoire en elle-même ou trop imprécise, et dans les deux cas c'est la théorie qui est à faire, et la question de la part de l'invention et de la découverte subsiste tout entière. Si cette interprétation de l'alternative est en gros exacte, si l'on se pose tout d'abord des questions et si l'on y répond plus tard, elle est trop expéditive.

c) Si j'admets le cinquième postulat d'Euclide P je puis démontrer le théorème T que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Si je postule T, je puis démontrer P. Donc, au cas où l'on verrait une invention dans un postulat et une découverte dans un théorème, la répartition (invention-découverte) serait relative aux hypothèses faites. Je suis tout à fait d'accord. Un livre peut être écrit à partir de l'axiome A et un autre à partir de l'axiome B et recouvrir la même partie de la science. Si j'invente A, je découvre B et inversément. J'ai alors découvert que deux corps d'axiomes sont équivalents, et mon acte de création de la théorie peut consister à poser A ou encore à poser B. Une proposition n'est pas en elle-même une découverte ou une invention; elle l'est relativement à l'ordre logique observé, relativement donc au déroulement de la théorie. Ce qui paraît invention dans le traité de Goursat peut paraître découverte dans le traité récent de N. Bourbaki. Mais je pense qu'il y a comme une somme invariante de découvertes et une somme invariante d'inventions, la place des éléments pouvant varier. J'introduis quelque chose et en déduis autre chose.

d) Si j'ai les théorèmes A, B, C, dans un exposé, je puis les disséquer: $A = A' + A''$, $B = B' + B''$, et les regrouper différemment: A', $A'' + B'$, etc. Il semble que je modifie ainsi le contenu des découvertes; oui, mais il est certain que c'est au delà des différentes transcriptions que je dois penser l'invariant de découverte ou d'invention.

e) Je suis tout à fait d'accord que dans l'acte même du grand mathématicien qui crée une théorie, les deux éléments sont fondus au début dans une seule et même intuition raffinée. Mais les éléments se séparent bientôt. C'est Poincaré, ne prenant pas la peine de vérifier ce qui lui apparaît dans un trait de génie. C'est Riemann et son affirmation concernant une certaine fonction en rapport avec la distribution des nombres premiers.

f) Je préférerais à votre distinction étudier d'une manière approfondie la notion d'existence en mathématiques, qui paraît dominer le débat. Je suis tout à fait d'accord d'étudier cette notion. Mais elle a déjà fait l'objet récemment d'une foule de travaux. On trouvera la bibliographie sur ce sujet dans une conférence faite à Genève par A. Fraenkel « Sur la notion d'existence en mathématiques ». (Voir *Enseignement mathématique*, 1934.) Voir aussi Ghéréa: « Existences » Revue de Mét. et de Mor. 1940. Mais ici encore, une infinité de nuances sont à faire qui vont du simple « il existe » jusqu'à la construction effective et terminée de l'objet dont on affirme l'existence. Il y a des nombres que l'on ne pourrait définir qu'avec un nombre infini de mots, des nombres qui ne sont pas calculables, même pas approximativement, ceux au contraire dont on est assuré de pouvoir donner la valeur à moins de ε près au moyen d'un nombre fini d'opérations. La dépendance entre ce nombre d'operations et ε étant précisée. Sans nier le moins du monde l'intérêt des discussions issues de l'antinomie ou de l'intransigeance brouwerienne, je préfère ici changer de système de référence pour voir sois un jour nouveau ces subtiles distinctions à faire.

Reprise de l'argumentation d'un point de vue plus technique.

Pour mettre à l'épreuve les distinctions précédentes, je me demanderai la part de découverte et d'invention dans le domaine des fonctions fuchsiennes ou plus simplement des fonctions elliptiques. Poincaré, lorsqu'il relatait cette période mémorable de son activité, disait de préférence: invention (Voir *Science et Méthode).* C'est d'ailleurs en général son habitude, et il ne craignait pas le contact avec la psychologie. Mais, comme de son aveu il se proposait, au début de ses recherches dans ce domaine, de démontrer qu'il n'y avait aucune fonction de cette sorte, il y a bien eu à un certain moment découverte des fonctions fuchsiennes. Il serait aisé de dire qu'il y a invention des fonctions fuchsiennes et découverte de leur existence. Je m'y refuse le mot existence qui fait ici illusion. Il faut y regarder de plus près. Transportons-nous pour cela dans le domaine plus simple des fonctions elliptiques que l'on trouve dans tous les traités d'analyse. On aura plus de facilité à suivre le développement de la théorie. Legendre avait obtenu bien des résultats au sujet des intégrales elliptiques de 1786 à 1825. L'existence des inverses de

ces intégrales était assurée, au moins localement, par des théorèmes généraux. Mais l'inversion n'était pas faite et le caractère de double priodicité des fonctions inverses n'était pas aperçu. Abel, en 1826 a, le premier, aperçu cette double périodicité et en cela il y a découverte. Maintenant, il y a une part d'invention dans la construction directe à partir des séries comme le fait Weierstrass pour la fonction elliptique p(u). Sans doute ces développements pourraient être obtenus au moyen de l'intégrale elliptique classique, mais ce serait après quelques détours. Il y aurait alors découverte du développement de p(u). Mais si l'on cherche pour elle-même une fonction doublement périodique aux périodes données comme semble l'avoir fait Weierstrass, il y a alors invention dans l'idée de les engendrer par une série de fonctions rationnelles. Presque aussitôt on découvre qu'une série convergente portant semblablement sur un point du parallélogramme des périodes et sur tous ses homologues par la substitution fondamentale fournirait une fonction invariante par cette substitution. Il ne resterait alors qu'à prouver la convergence de la série pour achever la démonstration de l'existence de ces fonctions. On sait que des fonctions triplement périodiques ne peuvent pas exister, découverte négative.

Lindemann a découvert la transcendance de π, mettant ainsi fin à toute recherche sur la quadrature du cercle. Il y a donc incontestablement des découvertes en mathématiques, même si les nombres ou les figures géométriques ne sont que des inventions. Certains rapports s'imposent absolument, même s'il a fallu des siècles pour les apercevoir. Y a-t-il incontestablement des inventions? Prenons tout d'abord des exemples très extrêmes. Différents géomètres ont inventé différentes notations vectorielles. Leibniz a inventé sa notation de la dérivée, Newton la sienne. Que l'une de ces notations se soit révélée meilleure qu'une autre, plus utile, plus suggestive, c'est là une découverte mais dans l'ordre de la commodité seulement. Le troisième vecteur défini comme produit vectoriel à partir de deux autres est une invention. Que cette introduction soit suggérée par des propriétés connues en mécanique ou en électro-magnétisme, cela n'importe pas. Je puis faire de la géométrie avant la mécanique et alors cette création d'un vecteur à partir de deux autres, suivant une règle déterminée, est bien une invention. La dérivée, définie comme limite du quotient de deux infiniment petits liés entre eux, est une invention. Rien ne m'oblige à l'introduire et le problème des

tangentes ne fait que la suggérer. Mais le fait, une fois cette définition admise, qu'il existe des fonctions qui ne sont dérivables en aucun point, est une grande découverte qui défie même notre intuition sensible. Courbes qui n'admettent de tangente en aucun point. Qu'une découverte soit grande ou petite n'aura à l'avenir pas d'intérêt et nous omettrons de le signaler. La soustraction, pour être pratiquée sans réserve, exige l'introduction des nombres négatifs, la résolution des équations du second degré, l'introduction des nombres imaginaires. Ils sont introduits par ces opérations. Mais on voit que leur introduction libérerait ces opérations de toute entrave. On prend alors la résolution de les admettre sans réticence, on spécifie les règles de leur maniement, la règle des signes par exemple. On en fixe la signification opératoire dans quelques axiomes ou postulats. En cela on invente l'arithmétique des nombres entiers positifs et négatifs et celle des nombres complexes. Le nombre complexe est devenu un nouveau pôle de condensation des idées, à partir duquel a pu s'édifier plus tard la théorie des fonctions de variable complexe. C'est une synthèse de deux nombres réels qui étend le champ de l'analyse. J'y vois une invention. Si la résolution des équations algébriques à coefficient réel est l'acte d'origine des nombres complexes, l'axiomatique de ces nombres est leur acte de naissance. L'introduction des nombres irrationnels par la coupure de Dédekind est presque une création. Elle est si extraordinaire, qu'elle a donné lieu à quelques objections. L'axiomatique du continu, conçu comme l'ensemble de tous les nombres réels rationnels et des coupures est une construction, bien que le continu géométrique, la vision d'un segment de droite, l'intuition sensible elle-même aient guidé et inspiré cette axiomatique.

Les intégrales au sens de Riemann, au sens de Lebesgue, etc., sont des inventions. Il est vrai qu'elles ont des actes d'origine; l'on a été sollicité de les introduire à la suite des difficultés rencontrées dans la série de Fourrier. Leur acte de naissance s'est écrit lorsque, dépassant le rôle de servantes, l'on eût conscience de leur parfaite autonomie, lorsqu'elles ont été conçues axiomatiquement comme une synthèse de propriétés, théorèmes de la moyenne, du partage, etc., généralisant l'addition. Ensuite sont venues des découvertes, comme le fait que la dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à la fonction sous le signe somme, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle. Le concept de fonction analytique a évidemment son acte d'origine dans

les développements par la formule de Taylor des transcendantes élémentaires réelles. Mais l'acte de naissance consiste à poser comme base de recherche la série de puissance, série de Taylor, dans le but d'étudier toutes les fonctions ainsi engendrées. Lorsque Viète et Descartes tracent les axes ils crèent une correspondance; mais le fait que le plan répond à une équation du premier degré et les quadriques à des équations du second degré est une incontestable découverte dans cette perspective de la géométrie analytique. La représentation sensible facilite en géométrie pure ou analytique la recherche; elle suggère parfois les résultats. Mais cela n'a rien à voir ici. L'espace à quatre dimensions, l'espace à n dimensions, que la géométrie analytique permet d'engendrer sont autant de créations. Le fait que ces espaces sont possibles, c'est-à-dire ne sont pas contradictoires, est une belle découverte. L'espace à une infinité dénombrable de dimensions est une invention qui s'est émaillée de découvertes, surtout le jour où Hilbert demandait que là encore la forme pythagoricienne de la distance eût un sens. Alors un grand nombre de propriétés géométriques visuelles, l'inégalité triangulaire, les théorèmes sur les projections, se généralisent.

On sait que von Neumann introduit un espace E par les cinq postulats suivants: l'espace E a une infinité de dimensions; il est complet, c'est-à-dire admet le critère interne de Cauchy pour la convergence; il est métrique, on peut y définir une distance; il est séparable, c'est-à-dire que tous ses éléments sont points d'accumulation d'une infinité dénombrable d'éléments spéciaux. Ces éléments obéissent au calcul algébrique linéaire. Voici une belle synthèse de moyens.

On crée ainsi l'espace E sous réserve qu'il ne soit pas contradictoire. On démontre ensuite que l'espace fonctionnel et l'espace d'Hilbert satisfont aux cinq axiomes. On découvre ainsi que E n'est pas vide. Certes, les cinq axiomes ci-dessus ont été historiquement dégagés par dissection de ce qui est essentiel dans l'espace à une infinité de dimensions. Or, E se prête à recouvrir et la théorie des équations intégrales, et celle des équations linéaires à une infinité d'inconnues. Il y a là une invention étayée sur une grande expérience, une grande connaissance des espaces d'Hilbert et fonctionnel déjà très étudiés. Il y a une création de ce que M. Lautmann appellerait, je crois, un domaine à structure propre.

Chacun peut inventer une transformation ponctuelle, par exemple

l'inversion. On doit découvrir les transformations qui conservent les fonctions harmoniques.

Nous inventons une famille d'opérations et découvrons qu'elles forment un groupe. Nous inventons un groupe et découvrons sa structure. La découverte est beaucoup plus canalisée.

Le nombre ε, arbitraire mais fixe (arbitrairement petit), est d'un dynamisme intellectuel avéré. Il a éclairci les mystères qui régnaient encore dans le calcul infinitésimal. Il domine actuellement la dialectique des infiniment petits. C'est une invention que ε, mais le fait que par ce moyen on peut, sans rien perdre des récoltes antérieures, définir la limite est assurément une découverte.

La notion d'ensemble au sens général de Cantor n'est, pensons-nous, ni une invention ni une découverte. Il y a, bien entendu, introduction d'une notion primitive, il y a découverte que cette notion est tout de même trop vaste et qu'il faut la restreindre un peu, sinon on se heurte à des antinomies. La limitation tentée et partiellement réalisée par Zermelo, Fraenkel, von Neumann a permis depuis lors de ne plus se heurter aux antinomies.

Une correspondance univoque et réciproque particulière établie entre deux ensembles, si elle est possible est toujours une construction, donc une invention, mais le fait que le nombre cardinal des deux ensembles est le même, quelle que soit la correspondance établie, est une découverte. Quant à l'idée de correspondance en général, je ne saurais la classer. Mais je ne puis, à moins d'être d'un réalisme certain, la supposer établie entre deux ensembles si aucun mathématicien ne l'a jamais réalisée. Ce serait un acte de foi, une créance sur les choses en soi. Encore mois pourrais-je concevoir que si une infinité d'ensembles sont supposés exister, du même coup existeraient tous les ensembles de choix (théorème de Zermelo), c'est-à-dire tous les ensembles contenant un élément de chacun des ensembles primitifs. Il n'y a pas de construction, pas assez d'invention sous ces mots.

Notre distinction a été établie sans postuler quoi que ce soit sur le concept d'existence. Permettrait-elle d'apporter un éclaircissement sur l'emploi du verbe être? Dans les extrêmes, l'invention qui est constructive correspond à l'existence brouwerienne ou « intuitionniste ». S'il s'agit d'un nombre, elle s'accompagne de la détermination exacte ou approximative, avec un resserrement aussi bon que l'on veut. La découverte dans les extrêmes également se

confine dans le pur « il existe » un nombre qui . . . sans que l'on soit assuré de pouvoir le calculer, même approximativement. Les démonstrations par l'absurde, nous l'avons vu, commencent par l'invention d'une chimère; comme celle-ci se révèle contradictoire, l'affirmation se renverse par la force de la seule logique, du principe du tiers exclu. On sait que la non-existence d'un être est contradictoire, mais cela ne permet pas de déterminer où il se trouve dans le continu mathématique. On s'en tient à la proposition purement existentielle, qui est souvent la pierre de touche de ces démonstrations-là. La découverte est dans ces cas l'enregistrement de l'échec d'une invention. Toute la partie inventive s'y déroulait sur le mode hypothétique, d'où l'absence de construction, de détermination de l'être. Les mathématiques classiques, dans l'emploi qu'elles font du principe du tiers exclu, supposent un semi-réalisme qui, à l'extrême, serait celui du logicisme. Si l'intuitionnisme brouwerien devait disparaître, notre foi réaliste en serait renforcée.

Je tiens à remercier MM. A. Reymond, H. Reverdin, J. de la Harpe, L. Féraud, F. Fiala, de leurs conseils ainsi que le groupe de Genève de la Société de philosophie et le cercle mathématique de Lausanne; ils verront que j'en ai profité.