Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 4 (1894)
Heft: 2

Artikel: Mathematik und Naturwissenschaft in einigen Wechselbeziehungen
Autor: Wild, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-789265

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Mathematik und Naturwissenschaft in einigen Wechselbeziehungen.

Von J. Wild.

Der Trieb zu vergleichen und zu messen ist uns allen eigen. Wie oft hört man die heranwachsende reifere Jugend die Frage aufwerfen: „Wer ist der grösste Dichter, Maler, Komponist?“ Schon die Jünger Christi fragten: „Wer ist der Grösste im Himmelreich?“ So vergleichen wir Konkretes mit Konkretem, Abstraktes mit Abstraktem, ja sogar Konkretes mit Abstraktem. Nennen wir nicht den Ton süss, schmelzend, herb, rauh? Geben wir nicht der Farbe Ton und Temperatur? „Welch himmlischer Anblick!“ rufen wir aus, sobald sich uns beim Erreichen eines mühsam erklommenen Berggipfels eine ungeahnte Fernsicht plötzlich eröffnet. Diese Tätigkeit des Messens und Vergleichens, die sich selbst da noch regt, wo jeder Masstab fehlt, zählt zu denjenigen Tätigkeiten des Jünglings, die seiner Phantasie am meisten entsprechen. Erst der gereiftere Forscher setzt dieser poetischen Tätigkeit Schranken; er bestimmt vor allem das Mass, mit dem er messen soll; denn bei ihm lässt sich ein Ding nur wieder durch ein dem ersten gleichartiges messen.

So haben sich denn schon im Altertume die Anfänge einer eigenen Wissenschaft des Messens gebildet, deren Studium seither von den Gelehrten aller Zeiten gepflegt und auch gefördert wurde. Diese heute stolz dastehende, wohl ausgebildete Wissenschaft hat zum Ausgangspunkte das *Zählen*. Der elementare Teil der Mathematik, der auch in den Kreis unserer allgemeinen Bildung mit hineingezogen worden ist, beschäftigt sich mit dem Messen der Dinge durch ein unmittelbar gegebenes Mass und erscheint daher als eine ganz äusserliche Tätigkeit, die am wenigsten geeignet zu sein scheint, die Natur der Dinge ergründen zu helfen. Die einfachsten Sätze über Kongruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit der Flächen- und Körperräume und einige Rechnungsoperationen, die sich nicht sehr weit von den 4 Spezies des bürgerlichen Rechnens entfernen, bilden

die sogenannte Elementarmathematik oder ungefähr gleichbedeutend damit die mathematische Wissenssphäre unserer abgehenden Mittelschüler.

Es erweist sich aber im weitern die Mathematik auch fähig, an der Ergründung der Natur und der Dinge teil zu nehmen. Nicht, wie einzelne Philologen jetzt noch etwa glauben mögen, an der äusserlichen und inhaltslosen Quantität müht sie sich ab, sondern auch die Qualität macht sie sich zum Gegenstande ihrer Forschung; gar vieles, was uns als Qualität erscheint, hat sich durch verbesserte Methoden in eine Reihe quantitativer Bestimmungen auflösen, also durch Zahlen sich mehr oder weniger vollständig bestimmen lassen. — Das Geschäft des Messens erscheint, wie schon bemerkt, als etwas Mechanisches und Äusserliches, sobald der Masstab, mit dem gemessen werden soll, bekannt ist, selbst wenn es mitunter viel Scharfsinn erfordert, sehr grosse und sehr kleine Dimensionen mit grosser Genauigkeit zu messen oder zu berechnen. Erheben wir uns indessen mit der Mathematik eine Stufe höher, so finden wir sie beschäftigt, den Masstab erst zu *schaffen*, nach welchem die Grösse gemessen werden kann. Denken wir uns eine gesetzmässig gebildete krumme Linie, etwa eine Ellipse (Fig. 1), so finden wir sie an verschiedenen Stellen verschieden stark gekrümmt; offenbar ist die Krümmung am grössten an den Punkten A und B, an den Punkten C und D aber, die sich am nächsten gegenüber stehen, am kleinsten. Jedermann wird die Frage verständlich finden: wie gross ist die Entfernung der am weitesten von einander entfernten Punkte? oder: welchen Umfang hat die Ellipse?

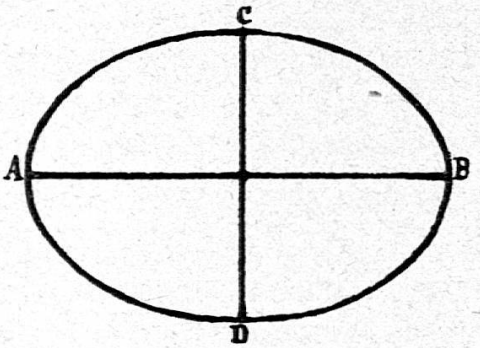


Fig. 1.

Die wenigsten aber wagen die Frage zu tun, wie krumm ist die Linie in irgend einem Punkte? denn die meisten werden glauben, die Krümmung sei eine Qualität der Kurve, lasse sich also nicht durch Zahlen ausdrücken. — Der Kreis, der bekanntlich in allen seinen Punkten gleiche Krümmung hat, bildet hier den Masstab. Aus Fig. 2 ist zu ersehen, dass die Krümmung eines Kreises von seinem Radius abhängt; diese Krümmung nimmt um so mehr ab, je grösser der Radius oder Halbmesser wird, und wenn derselbe über alle Grenzen, d. h. unendlich gross geworden ist, hat der Kreis gar keine Krümmung mehr, er ist in eine Gerade übergegangen. Für jeden Punkt einer solchen Kurve lässt sich auf mannigfache Art* mit grosser Schärfe ein Kreis berechnen und zeichnen,

* Vergl. C. Cranz, Dr., Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung; Stuttgart 1886.

der sich an dieser Stelle inniger an sie anschmiegt als jeder andere denkbare Kreis. Wir nennen diesen Kreis *Krümmungskreis*. So ist in Fig. 3 für den Punkt B der Ellipse der Krümmungskreis durch den stärker markirten Bogen angedeutet; der Krümmungshalbmesser des Punktes B ist also RB. Wenn sich demnach für 2 Ellipsenpunkte die Krümmungshalbmesser verhalten wie n: 1, so schreiben wir der Ellipse im letztern Punkt eine n mal so grosse Krümmung zu als im erstern. So ist man also in den Stand gesetzt, von den Krümmungen einer Linie in Zahlen zu sprechen.

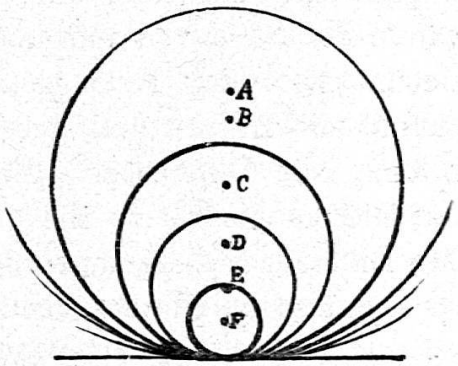


Fig. 2.

Durch fortgesetzte Bemühungen, Qualitäten zu messen, ist es den mathematischen Wissenschaften möglich geworden, auch ein Mass für die Kräfte zu finden. An der sogenannten Schwerkraft soll versucht werden zu zeigen, mit welchem Masse die Mathematik die Kräfte misst. Das Gesetz der allgemeinen Schwere lehrt nämlich: „Alle Materie zieht sich an proportional der Masse, und die Kraft der Anziehung nimmt im gleichen Verhältnis ab, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt.“ Zum Messen der Schwerkraft, sowie auch jeder andern Kraft ist die Untersuchung gewisser Differenzen oder Unterschiede erforderlich. Spielen dieselben schon im bürgerlichen Leben oft eine grosse Rolle, so dass ihre Erkenntnis und detaillirte Auffassung unmittelbar mit dem, was wir Bildung nennen, in Zusammenhang gebracht wird, so wächst ihre Bedeutung fast ins Unglaubliche in der Mathematik. Nur der Reichtum der Zahlen ist unerschöpflich genug, ihre unendliche Mannigfaltigkeit zu bezeichnen. Für unsern Fall gestaltet sich ihre Anwendung folgendermassen: Betrachten

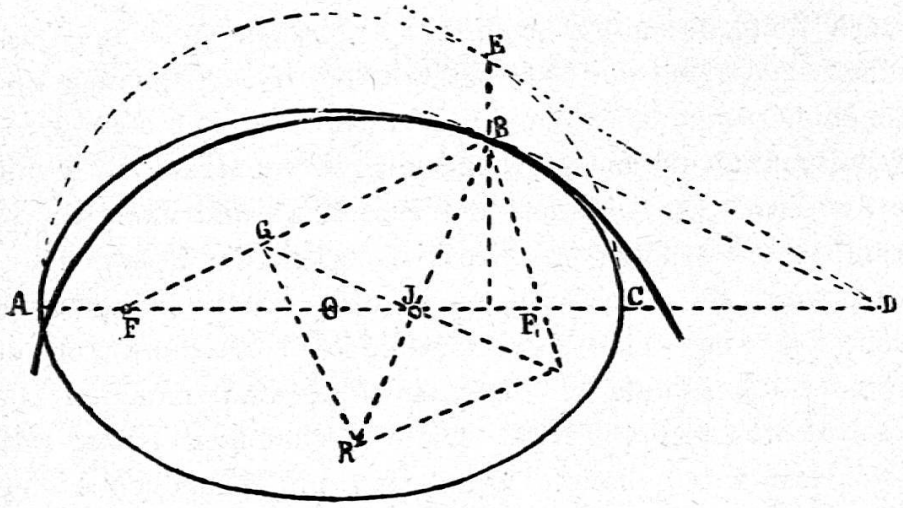


Fig. 3.

wir z. B. zwei Körper, etwa die Erde und einen Stein, der von einem erhöhten Punkt aus dem freien Fall überlassen wird. Man kann nun die Frage aufwerfen, wie gross ist in einem bestimmten Augenblicke die Geschwindigkeit des Steins, d. h. wie viel Meter würde der Stein von nun an pro Sekunde zurücklegen, wenn die Anziehungskraft der Erde plötzlich aufhörte, auf ihn einzuwirken. Um hierauf die Antwort zu geben, muss man seine Zuflucht nehmen zur Bildung von Differenzen. Man misst für zwei sehr wenig von einander verschiedene Zeiträume die durchlaufenen Wege s_1 und s_2 und dividirt ihre Differenz $s_1 - s_2$ durch den Unterschied der dazu verwendeten Zeiten $t_1 - t_2$; alsdann gibt der Quotient der Wegdifferenz durch die Zeitdifferenz oder $\frac{s_1 - s_2}{t_1 - t_2}$ die Geschwindigkeit um so genauer an, je kleiner die Differenzen waren, mit denen man operirte; denn bekanntlich wird bei der geradlinig gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit gefunden, indem man den Weg s durch die zum Zurücklegen desselben nötige Zeit t dividirt also $v = \frac{s}{t}$. Je kleiner aber die Differenz der oben verwendeten Zeiträume angenommen wird, desto eher darf die Bewegung des Steins in jener sehr kurzen Zeitdauer als gleichförmig angesehen werden. — Verlangt man endlich die Grösse der Kraft zu wissen, welche in einem ganz bestimmten Augenblick auf den Stein einwirkt, so bestimmt man wieder für sehr nahe Zeitpunkte die entsprechenden Geschwindigkeiten, dividirt ihre Differenz dv durch die Differenz der Zeiträume und findet so, um wie viel innerhalb einer Sekunde die Geschwindigkeit der Bewegung zugenommen hätte, wenn sie gleichförmig gewachsen wäre. Dieser so erhaltene Quotient gibt nun eine ganz bestimmte Vorstellung von der Grösse der Kraft, die jetzt auf den Stein einwirkt, wenn man ihn noch mit der Masse des Steins multiplizirt. Diese Rechnungen hätten vollkommen richtige Resultate geliefert, wenn man mit unendlich kleinen Differenzen hätte operiren können.

Allein wir dürfen bei diesem Gegenstande nicht länger verweilen, als uns erlaubt ist, haben wir ja schon unbewusst die Schwelle der Differentialrechnung betreten, deren Hauptgegenstand jene unendlich kleinen Differenzen und das Aufsuchen ihrer gegenseitigen Verhältnisse ausmachen. Durch sie steigt man vom Messen des Raumes und der Zeit auf zum Messen der Geschwindigkeit und Kraft.

So hat sich denn der Mathematiker den Weg zum Studium der Physik gebahnt, die im grossen und ganzen nur eine Bewegungslehre im weitesten Sinne ist.

I. Wir gelangen zunächst zu Erörterungen, welche die Stellung der Naturwissenschaften zur Mathematik und die *Einflüsse* der *letztern* auf *erstere* betreffen.

Die Mathematik hat von jeher ihre Dienste den Bedürfnissen des Lebens sowohl als den Wissenschaften gewidmet, ganz besonders der Wissenschaft von der Natur. Denn das, was man im eigentlichen Sinne Naturwissenschaft nennt, ist die Kenntnis der Beziehungen zwischen den Erscheinungen der Natur und ihren Ursachen; diese Beziehungen werden aber mit Hilfe der Mathematik erforscht, d. h. durch eine Methode, wo bei allen Quantitäts- und Raumverhältnisse betreffenden Fragen vollkommen exakte Schlüsse unter Anwendung konventioneller Symbole gezogen und zu allgemeinerer Anwendung ausgearbeitet werden, zu welcher Abteilung nur der Mathematiker Zutritt hat. Die nächst niedrigere Abteilung der Naturwissenschaft beobachtet die Erscheinungen, teilt sie ein und sucht auf induktivem Wege die obwaltenden Gesetze aufzustellen. Da sie aber nicht imstande ist zu bestimmen, ob diese Gesetze notwendige Resultate der Wirkung physikalischer Kräfte sind, so bleibt sie so lange bloss empirisch, bis sie durch eine höhere Wissenschaft richtig interpretirt wird. So vergleicht der englische Forscher Curch in der Quarterly Review 1876 den Mathematiker mit dem erfahrnen Künstler mit Plan und Richtscheit, dem die Handlanger die erforderlichen Bausteine und den Mörtel zurecht legen, und auch Schlömilch sagt: „Es ist ohne weiteres einleuchtend, dass man ein Naturgesetz nicht einmal präzis aussprechen, geschweige denn verstehen kann, ohne von den mathematischen Bestimmungen räumlicher, zeitlicher und graduell verschiedener Grössen Gebrauch zu machen.“

Die schon jetzt vorhandene und noch mehr sich verbreitende Herrschaft der Mathematik in fast allen Teilen der Physik und zum Teil auch in den übrigen naturwissenschaftlichen Disziplinen gestatten ihr die Träger jener Disziplinen willig, und selbst der Naturphilosoph kann sie ihr nicht mehr streitig machen. Wäre es auch nicht die Masse des Mondes etc., wie wir es glauben, sondern so wie es Hegel auffasst, der wasserlose Krystall, der sich an unserm Meere gleichsam zu integriren, den Durst seiner Starrheit zu löschen sucht und daher Ebbe und Flut bewirkt: der Mathematiker untersucht nicht, ob dieser Vergleich so tiefsinnig ist, als er spielend erscheint; aber er will wissen, wie hoch dieser Durst des Mondes das Meer in unsern Häfen aufsaugt, und diese Zahl von Metern vermag niemand aus dem philosophischen Bilde zu entnehmen. Und doch sind es nur diese numerischen und geometrischen Bestimmungen allein, die einen praktischen Wert und ein wahres, allgemein verbreitetes

Interesse haben. Wäre die oben betonte Abklärung der durch Beobachtung und Experiment gefundenen Tatsachen schon von jeher gepflegt worden, dann wäre es nicht möglich gewesen, dass in der Stadt Berlin unter den bedeutenden Mathematikern und grossen Naturforschern ein phantasiereicher Mann, wie der Professor Steffens (Naturforscher und Dichter, † 1845), seinen Zuhörern Fabeln über die Gesetze der Pendelschwingungen vortragen durfte und fast zweihundert Studirende so arg verblenden konnte, dass sie den Diamanten als einen zu sich selbst gekommenen Kieselstein und die Zunge der Wirbeltiere als einen Tintenfisch anstaunten.

Die Naturwissenschaften sind zur exakten Behandlung ihrer Probleme auf die tätige Mithilfe der Mathematik angewiesen. Vieles Unbegreifliche von ehemals erscheint gegenwärtig als ein mehr oder weniger einfaches Problem der Mathematik.

Die Mathematik erfährt in den verschiedenen Naturwissenschaften verschiedene Stufen der Anwendung. Als *erste* oder *unterste* Stufe möchte ich die Anwendung der *Skala*, d. h. der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 ... u. s. f., in der jede Zahl als Ordnungszahl aufgefasst wird, aufstellen. Es ist allbekannt, dass die Mineralogie die von ihr zu untersuchenden Naturkörper nach der Härte, als einem oft wichtigen Unterscheidungsmerkmal, in Ermanglung einer Härte-Einheit in 10 verschiedene Rangstufen einordnet; diese sogenannte Härteskala heisst:

1. Talk	3. Kalkspath	5. Apatit	7. Quarz	9. Korund
2. Gyps	4. Flusspath	6. Feldspath	8. Topas	10. Diamant.

Die obigen Zahlen haben hier gar nicht die Bedeutung von Messungsresultaten; sie geben nicht den numerischen Betrag dieses oder jenes Masses an; sie haben lediglich nur die Bedeutung von Ordnungszahlen. Wenn also ein in Untersuchung stehendes Mineral den Feldspath noch ritzt, von Quarz aber geritzt wird, so sagen wir, es liegt dessen Härte zwischen 6 und 7.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der sogenannten elektrochemischen Spannungsreihe von Berzelius. Der positive oder negative Charakter eines Stoffes vom Standpunkte des Galvanismus aus ist daran erkennbar, dass derselbe bei der Elektrolyse an der positiven, bezw. negativen Elektrode erscheint. Dieser Charakter der Elemente ist rein relativ, abhängig von der Natur des andern Stoffes. So z. B. scheidet sich Jod von Wasserstoff und den Metallen als negativer, aus Chlorjod als positiver Bestandteil aus. Demgemäss hat Berzelius * die chemischen Elemente

* Berzelius, Lehrb. 5. Aufl. I. 118.

in eine Reihe gebracht, in welcher jedes derselben dem frühern gegenüber als positiv erscheint, mit dem spätern als negativ. Wir lassen diese Reihe folgen mit der Bemerkung, dass sie weniger auf direkten galvanischen Zerlegungen beruht, als auf dem Verhalten der Elemente in den chemischen Verbindungen. Die Ordnungszahlen werden hier weggelassen.

Sauerstoff	Molybdän	Osmium	Cadmium	Didym
Schwefel	Wolfram	Iridium	Cobalt	Lanthan
Selen	Bor	Platin	Nickel	Yttrium
Stickstoff	Kohlenstoff	Rhodium	Eisen	Beryllium
Fluor	Antimon	Palladium	Zink	Magnesium
Chlor	Tellur	Quecksilber	Mangan	Calcium
Brom	Tantal	Silber	Uran	Strontium
Jod	Titan	Kupfer	Cerium	Baryum
Phosphor	Kiesel	Wismuth	Thorium	Lithium
Arsen	Wasserstoff	Zinn	Zirkon	Natrium
Chrom	Gold	Blei	Aluminium	Kalium
Vanadin				

Als *zweite* Stufe reiht sich die der *darstellenden Geometrie* oder die Stufe des *naturwissenschaftlichen Zeichnens* an. Wohl könnte hier der Einwand erhoben werden, — Zeichnen ist doch nicht Mathematik. — Und doch gehört zur Anfertigung einer richtigen, auch für andere verständlichen Zeichnung eines Naturobjektes *mehr* als die blosse mechanische Fertigkeit, gerade und krumme Striche ziehen zu können; es kommt nämlich noch hinzu die Fähigheit, das Verhältnis der Dimensionen des abzubildenden Dinges richtig zu beurteilen, sowie auch die räumliche Anordnung seiner Teile klar zu erfassen, um sie mit den Mitteln der Projektionslehre für andere verständlich in einer Ebene bildlich darzustellen. Gute Abbildungen sind für den gereiften Verstand oft vermögend, das dargestellte Naturobjekt zu ersetzen. Mit Recht legt man daher heute grossen Wert auf sorgfältig und mit Verständnis entworfene Abbildungen; denn von denselben hängt nicht bloss zum guten Teil das innere Verständnis der dargestellten Lagen- und Grössenbeziehungen der Objekte ab, sondern auch ein Teil des Interesses, mit dem sich der Studirende an das Studium der bezüglichen Erscheinungsformen macht. Man hat daher in der neuern Zeit angefangen, der Notwendigkeit des Freihandzeichnens nicht nur für den Künstler und Handwerker, sondern für jeden gebildeten Menschen mehr Rechnung zu tragen, teils durch Förderung der Literatur darüber, teils durch sorgfältigere Pflege dieses Faches im Schulunterrichte.

In der Botanik stellt man den Bau der Blüte eines Liliaceengewächses dar, wie Fig. 4 zeigt. Ein solches Blütendiagramm kann je nach dem Zwecke, dem es dienen soll, verschieden konstruirt werden. Manche erblicken darin eine freiere Zeichnung eines wirklichen Querschnittes der Blüte und geben darin nicht bloss die Zahl und Stellung, sondern annähernd auch die Form, Verwachsung, Grösse und gegenseitige Deckung der Blütenteile an. Diese nach wirklichen Blütenknospenquerschnitten angefertigten Zeichnungen enthalten aber manches, was für gewisse Betrachtungen als unnötig erscheint. Will man ausschliesslich die Zahl und Stellung der Blütenteile versinnbildlichen, um die Vergleichung zahlreicher Blüten in dieser Hinsicht zu ermöglichen, so ist es am ratsamsten, alle Diagramme oder Projektionen nach einem bestimmten, einfachen Schema zu entwerfen. Die Querschnitte der Axengebilde (Stengel, Zweig, Blütenaxe), welche Seitenglieder tragen (Blätter), sind als konzentrische Kreise gezeichnet und zwar so, dass der äusserste Kreis dem untersten, der innerste dem obersten Querschnitt entspricht; auf diese Kreisperipherien trägt man die Anheftungsstellen der Seitenglieder ein und wählt für die verschiedenen Blattformen verschiedene Zeichen; die Blätter der Hüllkreise sind durch Kreisbogen dargestellt und zwar ist behufs schnellerer Orientirung an denen des Kelches eine Art Mittelrippe angedeutet. Die Staubblätter sind durch Staubkolben- oder Antherenquerschnitte bezeichnet, während der Stempel durch einen einfachen Querschnitt des Fruchtknotens dargestellt wird. — Durch Vergleichung solcher Diagramme gewinnt man gemeinsame theoretische Diagramme, die von den Botanikern als Typen bezeichnet worden sind. Auf analoge Art kann auch ein ganzes System blattbildender Sprosse durch eine Horizontalprojektion veranschaulicht werden.

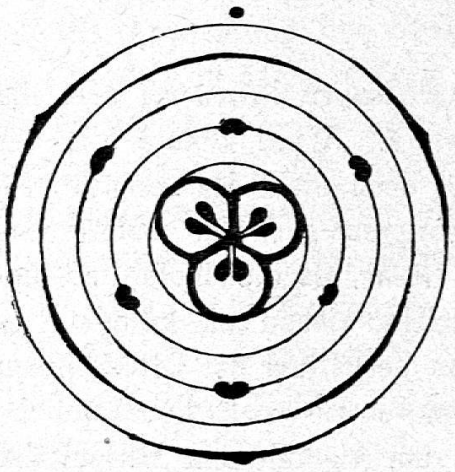


Fig. 4.

Ganz besondern Wert hat ein verständnisvolles Zeichnen in demjenigen Teile der Mineralogie, der von der Morphologie der unorganischen Naturkörper handelt, nämlich in der Krystallographie. Wenn nicht Modelle in genügender Zahl vorhanden sind, so ist eine nach den Regeln der darstellenden Geometrie ausgeführte Zeichnung noch das einzige Mittel, um dem bedrängten Vorstellungsvermögen zu Hilfe zu kommen. Nicht geringere Bedeutung haben solche exakt ausgeführte Darstellungen auch in der Anatomie des Menschen- und Tierkörpers.

Als *dritte* Stufe bezeichne ich zunächst die Anwendung des *heterogenen Polynoms* oder des *summarischen Symbols,* in welchem die verschiedenen Teile eines Naturganzen symbolisch in additivem Sinne zu einer Summe neben einander gestellt werden. Es kann nämlich das oben besprochene Blütendiagramm wenigstens zum Teil durch einen aus Buchstaben und Zahlen zusammengesetzten Ausdruck ersetzt werden. Die Formel $K_3\ C_3\ A_{3+3}\ G_3$ entspricht beispielsweise dem Diagramm der Liliaceen (Fig. 4) und bedeutet, dass jeder der beiden Hüllkreise, nämlich der äussere (K) und der innere (C), aus 3 Gliedern besteht, dass sich das Andröceum, d. h. die Gesamtheit der männlichen Geschlechtsorgane aus zwei dreigliedrigen Kreisen 3+3, das Gynäceum, d. h. die Gesamtheit der weiblichen Geschlechtsorgane der Pflanze, wieder aus *einem* solchen aufbaut; die Formel $K_0\ C_3\ A_{3+3}\ G_3$ entspricht der Blüte von Bambusa

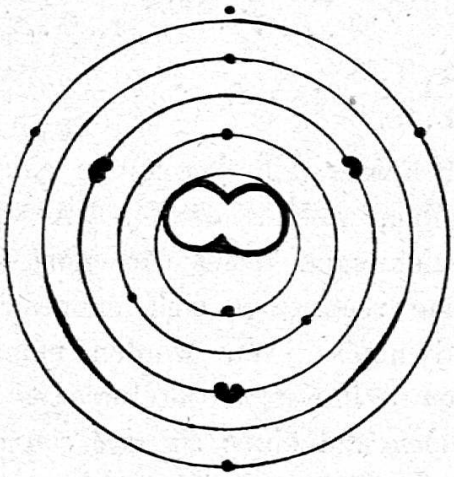


Fig. 5.

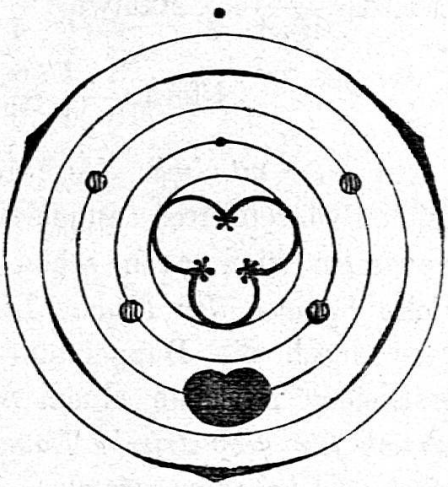


Fig. 6.

und unterscheidet sich von der ersten Formel nur durch den Partialausdruck K_0, der sagt, dass der äussere Perigonkreis abortirt ist. Die Formel $K_2\ C_2\ A_{2+2}\ G_2$ gibt die Zahlenverhältnisse der Blüte von Majanthemum bifolium oder der zweiblättrigen Schattenblume, $K_3\ C_3\ A_{\bar{1}+0}\ G_3$ die der Orchideenblüte (Fig. 6), wo $A_{\bar{1}+0}$ bedeutet, dass der innere Kreis des Andröceums in allen Gliedern abortirt, dass im äussern Kreise dagegen die beiden hintern fehlgeschlagen, während das vordere äussere sich vollständig entwickelt. $K_0\ C_{\bar{2}}\ A_{3+0}\ G_2$ entspricht der gewöhnlichen Grasblüte, siehe Fig. 5. $K_4\ C_4\ A_{4+4}\ G_4$ und $K_5\ C_5\ A_{5+5}\ G_5$ ist die symbolische Darstellung der Zahlenverhältnisse der aus 4 oder 5 gliedrigen Kreisen bestehenden Blüte der Einbeere oder Paris quadrifolia. — Diese und die meisten andern Formeln von monokotyledonischen Blüten lassen sich in den allgemeinen Ausdruck $K_n\ C_n\ A_{n+n}\ G_{n\ (+n)}$ vereinigen. Die Klammer (+n) am Schlusse der Formel gibt an, dass zuweilen noch ein

zweiter Kreis von Fruchtblättern vorkommt. Der nicht zu unterschätzende Vorteil solcher Blütenformeln vor Diagrammen ist der, dass sie einer weitergehenden Verallgemeinerung fähig sind, indem man die bestimmten Zahlen durch allgemeine Zahlzeichen, nämlich durch Buchstaben ersetzt.*

Ganz analogen Formeln begegnen wir in der Zoologie beim Studium der Säugetiere; man denke hierbei an die sogenannten Zahnformeln. Wenn dort z. B. als symbolische Darstellung der Zahnverhältnisse von *Sus* (Eber) $\frac{3.1.7}{3.1.7}$ angegeben wird, so heisst das, es folgen sowohl im Ober- als Unterkiefer von der vertikalen Symmetrieaxe aus nach beiden Seiten derselben aufeinander: 3 Schneidezähne, 1 Eckzahn und 7 Backenzähne. In ähnlicher Weise hat man als Zahnformeln für:

$$\text{Mensch } \frac{2.1.5}{2.1.5}, \text{ Maulwurf } \frac{3.1.7}{4.1.6}, \text{ Hund } \frac{3.1.6}{3.1.7}, \text{ Maus } \frac{1.0.3}{1.0.3},$$

$$\text{Pferd } \frac{3.1.6}{3.1.6}, \text{ Ziege } \frac{0.0.6}{4.0.6} \text{ u. s. f.}$$

Auf *diese nämliche Stufe* rechne ich ausser dem bereits an einigen Beispielen vorgeführten summarischen Symbol, welches als $K_3\, C_3\, A_{\ddot{1}+0}\, G_3$ in gewissem Sinn auch schon Lagenbeziehungen ausdrückt, noch das spezielle *Symbol der Lage.* Dieser Name rechfertigt sich meines Erachtens durch die Doppelnatur dieses Symbols. Wir werden nämlich unterscheiden zwischen einem *Symbol von arithmetischem Charakter als Ausdruck für geometrische Lagenbeziehungen* und einen *Symbol von geometrischem Charakter*, welches *arithmetische Grössenbeziehungen* zu veranschaulichen sucht. Ich begnüge mich damit, von jeder Art ein Beispiel zu nennen. — Zu den Symbolen der ersten Gattung rechne ich in erster Linie diejenigen Zahlen, welche der Botaniker kurz als Divergenzen bezeichnet und welche Aufschluss geben über die Stellungsverhältnisse seitlicher Glieder einer Pflanze an gemeinsamer Axe, wobei unter Axe jedes an seiner Spitze fortwachsende Glied verstanden werden soll, welches Seitensprosse hervorbringt, also z. B. eine Wurzel mit Seitenwurzeln, ein Zweig mit Blättern u. s. w. Wenn nun z. B. angegeben wird, der Divergenzbruch für die Blattstellung irgend einer Pflanze sei $\frac{1}{3}$, so will das heissen, die betreffenden Seitensprosse sind spiralig an der Axe angeordnet, derart, dass, von einem bestimmten an gerechnet, das drittfolgende sich unmittelbar über dem ersten befindet und dass, um von

* Bei den vorangehenden botanischen Erörterungen habe ich mich vorwiegend an „Sachs“ gehalten.

dem letztern zum erstern zu gelangen, ein und nur ein Rundgang um die Axe erforderlich ist. Ebenso bedeutet die Blattdivergenz $\frac{3}{8}$, dass man von einer bestimmten Blattstelle ausgehend, der Spirale der Anheftungsstellen folgend, drei Umgänge um den Zweig zu machen hat, um wieder zu einem unmittelbar über dem Ausgangspunkte gelegenen Blatte zu gelangen, welch letzteres, vom ersten aus gezählt, das achtfolgende ist. Als solche Divergenzbrüche erscheinen am häufigsten:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89}, \frac{55}{144}, \frac{89}{233}, \frac{144}{377}, \frac{233}{610},$$

Diese einzelnen Divergenzen sind alle nach einem und demselben Gesetz gebildet. Bezeichnen wir drei solche auf einander folgende Glieder der Reihe mit

$$\frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \quad \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}},$$

so ist

$$P_{n+2} = P_n + P_{n+1} \text{ und}$$
$$Q_{n+2} = Q_n + Q_{n+1}$$

Braun hat bemerkt, dass diese Divergenzen die Näherungswerte des unendlichen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots \text{ in inf.}}}}}$$

sind, welche sich mehr und mehr dem Werte

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

nähern. Im weitern fiel es auf, dass letzterer Ausdruck identisch ist mit der Länge des grössern Abschnittes beim sogenannten *goldenen Schnitt*. Auch die übrigen in der Natur vorkommenden Divergenzen lassen sich nach Al. Braun zu Reihen vereinigen, welche sich allgemein aus den Näherungswerten von Kettenbrüchen der Form

$$\cfrac{1}{m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots\ldots}}}}$$

darstellen.

Wenden wir uns jetzt zu den oben angekündigten geometrischen Symbolen dieser Stufe. Es lassen sich speziell in der organischen Chemie in der Gruppe der aromatischen Verbindungen die Konstitutionen von gewissen Kohlenstoffatomgruppen am übersichtlichsten durch geometrische Darstellungen veranschaulichen, so z. B. die Gruppe C_6 im Benzol (Fig. 7) und die Gruppe C_{10} im Naphthalin $C_{10}H_8$ (Fig. 8), welches aus 2 Benzolkernen besteht, die 2 Kohlenstoffatome gemeinsam besitzen. Näheres darüber auf der vierten Stufe.

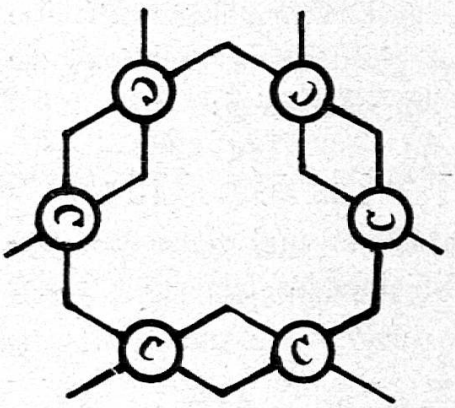


Fig. 7.

In neuerer Zeit haben verschiedene Chemiker zur Erklärung der Eigenschaften einer Verbindung die räumliche Lagerung der Atome im Molekül herangezogen. Es ist wohl selbstverständlich, dass die Bausteine des Moleküls, d. h. die Atome — sofern solche überhaupt anzunehmen sind — in irgend einer räumlichen Anordnung vorhanden sein müssen, welche möglicherweise

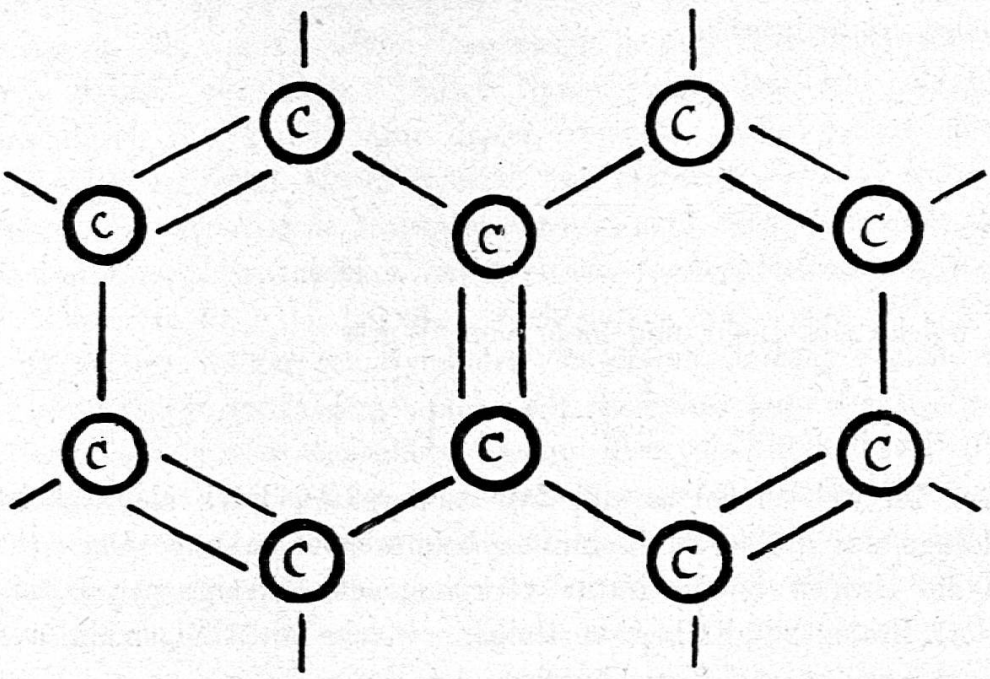


Fig. 8.

Veranlassung zu kleinern Abweichungen in den Eigenschaften strukturidentischer Moleküle geben kann. So äussert sich z. B. Dr. J. Wislicenus: „Ich selbst sah mich bei meiner Arbeit über die Paramilchsäure genötigt, den Satz auszusprechen, dass die Tatsachen dazu zwingen, die Verschiedenheit isomerer Moleküle von gleicher Strukturformel durch

verschiedene Lagerung ihrer Atome im Raum zu erklären und damit offen für die Berechtigung der Chemie einzutreten, geometrische Anschauungen in die Lehre von der Konstitution der Verbindungsmoleküle hereinzuziehen."

Von besonderem chemischen Interesse ist in dieser Richtung eine Hypothese von van't Hoff,* durch welche allgemein das optische Drehungsvermögen einer Substanz mit der chemischen Struktur in Zusammenhang gebracht wird. Nach dieser Hypothese hat man sich die 4 Affinitäten des Kohlenstoffatoms gegen die Ecken eines Tetraeders gerichtet zu denken, dessen Schwerpunkt von dem Kohlenstoffatom selbst eingenommen wird, wie Fig. 9 zeigt, und in dessen Ecken die mit ihm verbundenen Radikale liegen. Solange nun von den letzteren noch 2 untereinander identisch sind, so lässt sich durch das Tetraeder wenigstens noch eine Symmetrieebene legen. Sind aber alle 4 mit dem Kohlenstoff verbundenen Radikale verschieden, so existirt keine Symmetrieebene mehr; daher die Bezeichnung „asymmetrisches Kohlenstoffatom". Van't Hoff und Le Bel zeigten, dass die optische Aktivität und die an sie geknüpfte Isomerie nur solchen organischen Verbindungen eigen ist, welche ein oder mehrere asymmetrische Kohlenstoffatome enthalten.

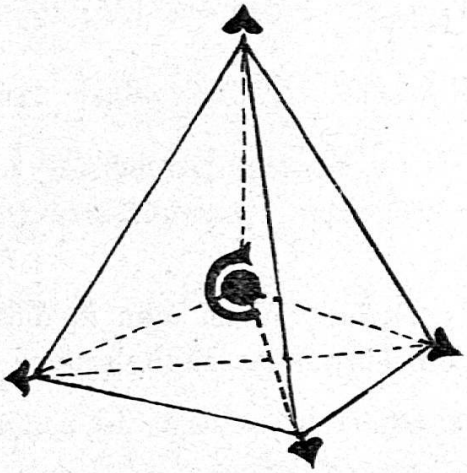


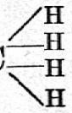
Fig. 9.

Auf der *nächst höhern (vierten) Stufe* finden wir die sogenannte *chemische Formel*, welche uns über die qualitative Beschaffenheit, bezw. über die Atomgruppirung, in denjenigen kleinsten Teilchen der Körper belehrt, die noch frei für sich im Raum existiren können, nämlich der Moleküle. Es ist diese Formel *deshalb* auf eine höhere Stufe, zu stellen als z. B. die Blütenformel bei den Pflanzen, weil sie schon gewisse Substitutionen zulässt, wie wir sofort zu zeigen versuchen wollen.

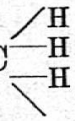
Es hat die neuere Chemie die Atome mit je einer gewissen Zahl von sogenannten Valenzen ausgestattet unter Zugrundelegung der Vorstellung, dass diese Affinitätseinheiten eines Atoms sich binden mit denen eines andern Atoms; so weiss z. B. der Chemiker, dass sich ein Atom Wasserstoff direkt mit höchstens einem Atom irgend eines andern chemischen Elementes verbinden kann, was er dadurch ausdrückt, dass er

* Vergl. J. H. van't Hoff: La chimie dans l'espace; Rotterdam 1875 und W. Meyerhoffer: Stereochemie. Leipzig und Wien 1892.

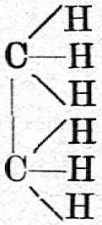
hinter das Atomzeichen H noch einen Horizontalstrich setzt, also H—. Das Kohlenstoffatom hat 4 solche freie Valenzen C≡ und kann sich daher mit 4 Wasserstoffatomen verbinden, welche Verbindung sich darstellt in der Form



oder CH_4 (Sumpfgas oder Methan). Denken wir uns daneben die Atomgruppe

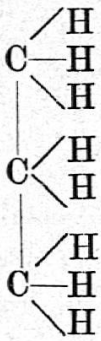


oder CH_3, so hat dieselbe noch eine freie Valenz, welche entweder durch ein einwertiges Atom, oder durch eine andere einwertige Atomgruppe, wie der Chemiker sich ausdrückt, gesättigt werden kann. So kann also in CH_4 ein Atom Wasserstoff durch die einwertige Atomgruppe CH_3 ersetzt werden, wodurch der Körper



oder C_2H_6

entsteht. Wenn man in diesem neuerdings ein Atom Wasserstoff durch die einwertige Methylgruppe CH_3 ersetzt, so entsteht

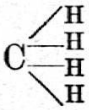
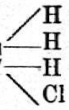
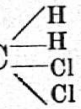


oder C_3H_8.

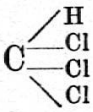
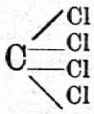
Dieser Vorgang der Substitution kann weiter fortgesetzt werden und dabei wird man sehen, dass je zwei aufeinanderfolgende Glieder der hiedurch entstehenden Reihe die konstante Differenz CH_2 ergeben. Nachdem man sich überzeugt hatte, dass die Glieder dieser Reihe einander sehr ähnlich sind, so hat man es für zweckmässig gefunden, die organischen Verbinbungen in solche Reihen zu bringen, und hat dieselben als „homologe Reihen" bezeichnet, von denen jede durch ihr allgemeines Glied der Zusammensetzung nach charakterisirt ist. Unsere oben begonnene Reihe hat als allgemeines Glied $C_n H_{2n+2}$. Andern Reihen entsprechen die allgemeinen Glieder:

$$C_n H_{2n},\ C_n H_{2n-2},\ C_n H_{2n-4} \text{ etc.}$$

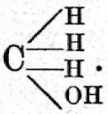
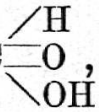
Lässt man die heute noch nicht in dieser Weise gruppirbaren Substanzen ausser acht, so darf wohl gesagt werden, diese Reihen bilden das Skelett der organischen Chemie. Werden die einzelnen H-Atome in CH_4 durch Chloratome ersetzt, so entstehen der Reihe nach


oder CH_4,

oder CH_3Cl,

oder CH_2Cl_2,

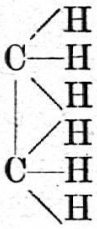
Methan Monochlormethan Dichlormethan


oder $CHCl_3$,

oder CCl_4

Chloroform Tetrachlormethan.

Wird ein Wasserstoffatom in CH_4 durch die einwertige Hydroxilgruppe O—H ersetzt, so entsteht ein Alkohol, nämlich  . Wenn in einem solchen Alkohol 2 H-Atome, die an Kohlenstoff gebunden sind, durch 1 O-Atom ersetzt werden, so resultirt eine Säure, im vorliegenden Falle die Ameisensäure  , ein Körper, der sich fertig gebildet in den Ameisen und Brennesseln vorfindet.

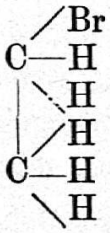
Jedes Glied der oben vorgeführten Reihen ist solcher Substitutionen fähig. So liefert die Substitution bei der Einführung in das Methan



eines Atoms Chlor:

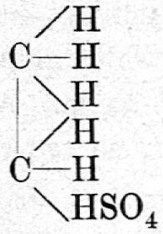
oder Äthylchlorid

oder Monochloräthan

eines Atoms Brom:

oder Äthylbromid

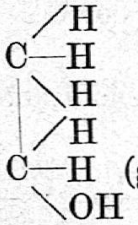
oder Monobromäthan

der einwertigen Gruppe HSO_4:



oder Äthylschwefelsäure

der einwertigen Gruppe OH:



Äthylalkohol (gewöhnlich. Weingeist)

u. s. w.

Führen wir noch den Kohlenwasserstoff an, der für die Reihe der aromatischen Körper den Ausgangspunkt bildet, das Benzol C_6H_6, dessen Konstitution wir uns in Figur 7 veranschaulicht haben. Es bilden dort die Atome einen geschlossenen Zyklus derart, dass darin ein Atom mit dem einen benachbarten durch *einfache*, mit dem andern benachbarten durch *doppelte* Bindung zusammenhängt.

Ersetzen wir in C_6H_6 ein H-Atom durch:

ein Chloratom,	so entsteht	C_6H_5Cl	oder	Monochlorbenzol
die OH Gruppe,	„ „	C_6H_5OH	„	Phenol oder Karbolsäure
„ NO_2 „	„ „	$C_6H_5NO_2$	„	Nitrobenzol
„ NH_2 „	„ „	$C_6H_5NH_2$	„	Amidobenzol oder Anilin
„ COOH „	„ „	C_6H_5COOH	„	Benzoësäure.

Doch verzichten wir auf weitere Beispiele dieser Art, die sich zu Hunderten und Tausenden aufzählen liessen. —

Der Begriff der Substitution ist ein mathematischer Begriff, der besagt, dass statt einer Grösse eine andere gleichwertige an deren Stelle gesetzt werde, z. B. statt 2 der gleichwertige Ausdruck 5—3 etc. Das mathematische Element der Substitution kommt hier auf dieser Stufe nur insofern zur Geltung, als allerdings für ein einwertiges Atom ein anderes einwertiges oder allgemeiner für ein n-wertiges Atom oder eine n-wertige Atomgruppe eine andere n-wertige Atomgruppe gesetzt wird; es ist aber trotzdem nicht die reine math. Substitution; denn der Endwert, d. h. das resultirende Molekül, ist hier ein anderes geworden, mit Eigenschaften ausgestattet, welche das ursprüngliche nicht besass und umgekehrt. Die chemische Substitution gewährt vor allem eine sehr bequeme Übersicht über die Verbindungen sowohl als über die chemischen Prozesse selbst; ja, sie lässt uns Körper als denkbar erscheinen, die noch kein Menschenauge gesehen. Diese organische Chemie könnte die Erde mit einer neuen

Welt von organischen Wesenheiten bekleiden, wenn sie alle darstellen wollte, welche sich durch die angedeutete Substitution ableiten lassen. Aber diese bloss möglichen Körper bilden keine irdische Welt, welche den Raum beengt, sondern nur eine solche, die in Gedanken existirt, auf den Wink des Chemikers erscheint, der Technik, Medizin, Physik etc. sich dienstbar macht und auf des Chemikers Geheiss wieder als solche verschwindet.

Doch nicht bloss die Operation der Substitution kennt die Chemie; sie kann auch der identischen Gleichung nicht mehr entbehren. Es ist dem Chemiker möglich geworden, die Erscheinungen seiner Wirkungssphäre durch Gleichungen auszudrücken. Nehmen wir als Beispiel die Untersuchungsmethode, deren sich der Mineraloge bedient, um festzustellen, ob ein ihm vorgelegtes Kalkmineral Kohlensäure enthalte. Ein Tropfen Schwefelsäure auf das Mineral gebracht, dasselbe braust auf, und genannter Forscher ist überzeugt, dass er es mit einem Karbonat zu tun hat. Der Chemiker drückt diesen ganzen Vorgang aus durch die Gleichung.

$$Ca\,CO_3 + H_2\,SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2\,O$$

d. h. die Schwefelsäure verdrängt die schwächere Kohlensäure, und es entsteht Kalziumsulphat, Kohlendioxyd und Wasser. Vorstehende Gleichung ist eine identische sowohl in bezug auf die ganze Anzahl der in Reaktion getretenen Atome als auch auf die Anzahl der Atome jeder Spezies; sie lässt sich sogar in mehrere identische Gleichungen zerlegen, nämlich

$$\left.\begin{array}{rcl} Ca_1 & = & Ca_1 \\ C_1 & = & C_1 \\ O_3 + O_4 & = & O_4 + O_2 + O_1 \\ H_2 & = & H_2 \\ S_1 & = & S_1 \end{array}\right\} + \text{ oder addirt}$$

Atomzahl 12 = Atomzahl 12, woraus auch das Gesetz der Materie herausgelesen werden kann, dass die Atome weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig sind oder kürzer gesagt: die Materie ist konstant.

Betreten wir nun die *nächste Stufe (5.)*, die Stufe der *Naturkonstanten* oder des *physikalischen Messens.*

Unter Naturkonstanten verstehen wir ganz bestimmte Zahlenwerte, ausgedrückt in irgend einer benannten Einheit, welche sich beim Messen der Erscheinungen ergeben, die sich an einem ganz bestimmten Stoff oder einer Kombination von Stoffen oder endlich in einem Apparat abspielen. Solche Konstanten sind z. B. das spezifische Gewicht der Körper, die Atomgewichte der Elemente, die Beschleunigung der Schwere, welch

letztere besagt, ein frei fallender Körper habe nach der ersten Sekunde seiner Bewegung die in cm. ausgedrückte Geschwindigkeit

	unter 45⁰	*0⁰*	*90⁰*
nach Schmidt (1829)	980,5902	978,0470	983,1334
nach Pouillet (1853)	980,6057	987,1029	983,1085

Das Gebiet dieser Konstantenbestimmung in der Natur ist unermesslich. Man denke an die verschiedenen Elastizitäts-Konstanten, die Konstanten der Kapillarität, die Zusammendrückbarkeits-Koëffizienten der Flüssigkeiten, die Reibungs- und Diffusions-Konstanten, die Ausdehnungs-Koëffizienten, die Konstanten der Schall-, Licht- und Elektrizitäts-Geschwindigkeit, die Brechungsindices in der Optik u. s. w.

Diese Konstanten haben für den Naturforscher den doppelten Wert einmal mit ihrer Hilfe neue Bestimmungen ausführen, d. h. neue Konstanten gewinnen zu können, anderseits auch die Identität gewisser Konstanten mit schon vorhandenen nachzuweisen und damit sogar gerichtliche Untersuchungen auszuführen. So z. B. unterscheidet sich nachweisbar das menschliche Blut nur durch die Grösse seiner Blutkörperchen von demjenigen der meisten Säugetiere, von denen fast ausnahmslos die in Frage kommenden Spezies sämtlich *kleinere Blutkörperchen* haben. In Brückes Physiologie finden sich folgende Angaben für den Durchmesser der Blutkörperchen in Bruchteilen eines Millimeters:

Elephant $\frac{1}{108}$	Schwein $\frac{1}{166}$
Walfisch (Balaena boops) $\frac{1}{122}$	Ochse $\frac{1}{168}$ bis $\frac{1}{180}$
Mensch $\frac{1}{126}$	Pferd $\frac{1}{181}$
Seehund (Phoca vitulina) $\frac{1}{129}$	Schaf $\frac{1}{209}$
Hund $\frac{1}{139}$	Ziege $\frac{1}{253}$ etc.

Die Erkennung und Messung der Blutkörperchen in noch frischem, flüssigem Blut unter dem Mikroskope bietet keine Schwierigkeit. Dagegen wird die Untersuchung bedeutend erschwert bei eingetrocknetem Blut, in welchem die Blutkörperchen zu strahlig gerunzelten Sternchen eingeschrumpft sind. Struve in Tiflis hat in Georgien, wo noch die Blutrache herrscht und Räubereien nicht selten sind, hunderte von gerichtlichen Untersuchungen ausgeführt an den verschiedensten verdächtigen Objekten

nach der angedeuteten Richtung hin. * — Auch die Wellenlänge des Lichtes, d. h. das Spektrum eines Körpers kann zur Bestimmung seiner Natur verwendet werden, und aus geringen Unterschieden des prismatischen Flammenbildes sagt der Chemiker die Existenz noch unbekannter Elemente voraus und reiht sie in sein System ein.

Die Untersuchung aller dieser Konstanten, von der Wellenlänge einer bestimmten Lichtsorte bis zu den Ergebnissen der Öchslinschen Weinprobe an einem bestimmten Jahrgang „Neftenbacher oder Bernecker" etc., ist oft im stande, einen vorgelegten Körper mit einem bereits bekannten zu identifiziren. Hierauf beruht nicht zum geringsten Teile die Untersuchung der Nahrungs- und Genussmittel. Es liegt wohl darin ein deutlicher Beweis dafür, dass die *Zahl* mit ihren verschiedenen Benennungsarten sehr geeignet ist, die Natur vieler Dinge zu kennzeichnen.

Dabei haben wir uns ganz unbewusst scheinbar den Anschauungen einer alten philosophischen Schule oder eines philosophischen Systems genähert, nämlich dem Pythagoräismus. Die Grundanschauung der pythagoräischen Philosophie ist nach Zeller in dem Satz enthalten, dass die Zahl das Wesen aller Dinge, dass alles seinem Wesen nach Zahl sei. Auch Aristoteles sagt wiederholt, nach pythagoräischer Ansicht beständen die Dinge aus Zahlen oder aus den Elementen der Zahlen; die Pythagoräer sollen nach Zeller in den Zahlen sogar den Stoff und die Eigenschaften der Dinge gesucht haben. Anderseits sagt Aristoteles auch, die Pythagoräer liessen die Dinge durch Nachahmung der Zahlen entstehen. Es scheint hier noch keine scharfe Unterscheidung zwischen Erscheinung und Stoff vorgenommen worden zu sein. Anknüpfend an das Walten bestimmter Zahlen und Zahlenverhältnisse in der Welt der Erscheinungen und wohl auch an den uralt-symbolischen Gebrauch gewisser Zahlen kamen die Pythagoräer ganz allgemein zu dem Satze: „Alles ist Zahl." Aus der Natur dieses pythagoräischen Zahlenprinzips folgt aber sofort, dass die Durchführung desselben auf dem Gebiete der Dinge in eine trockene gedankenlose Symbolik verlaufen musste, nach welcher z. B. 1 den Punkt, 2 die Linie, 3 die Fläche, 4 den Körper, 5 die Beschaffenheit desselben bedeutete; die Gerechtigkeit sollen die Pythagoräer bald auf die Zahlen 3, 4, 5, bald auf die Zahl 9 zurückgeführt haben. Was an dieser einseitigen Zahlenmystik als wahrer Kern erscheint, ist, was wir oben schon ausgesprochen haben, dass in den Naturerscheinungen Zusammenhang und Gesetzmässigkeit walte, welche in Mass und Zahl dargestellt werden könne. —

* Beiträge zur gerichtlich-chemischen Untersuchung blutverdächtiger Flecken von Struve; siehe Virchows Archiv für path. Anatomie und Physiologie. 1880.

Nach der Ermittlung der für bestimmte Fälle gültigen Messungsresultate, die bei der Wiederkehr der nämlichen Erscheinungen unter den nämlichen Bedingungen numerisch identisch gleich ausfallen müssten, handelt es sich darum, diese gefundenen Resultate in möglichst anschaulicher Form aufzuzeichnen, und wir können daher diese zu betretende *Stufe* bezeichnen als die *Graphik naturwissenschaftlicher Messungsresultate.* Nehmen wir als Exempel die nach den Versuchen von Regnault aufgestellte Tafel für Wasserdampf, wo in der mit + t bezeichneten Kolonne die Temperaturen verzeichnet sind, und wo E den jeweils dazugehörigen Sättigungsdruck bedeutet.

+ t	E mm.	+ t	E mm.
0⁰	4,600	120⁰	1491,280
10⁰	9,165	130⁰	2030,28
20⁰	17,391	140⁰	2717,63
30⁰	31,548	150⁰	3581,23
40⁰	54,906	160⁰	4651,62
50⁰	91,982	170⁰	5961,66
60⁰	148,791	180⁰	7546,39
70⁰	233,093	190⁰	9442,70
80⁰	354,643	200⁰	11688,96
90⁰	525,450	210⁰	14324,80
100⁰	760,000	220⁰	17390,36
110⁰	1075,370	230⁰	20926,40

Vergleicht man die folgenden Zahlen der ausführlichen Tafel von Regnault:

Temperatur	Sättigungsdruck	Zunahme per Grad
0	4,600	0,340
100	760,000	27,590
200	11688,96	245,41
230	20926,40	375,92

so sieht man, wie sehr der Einfluss der Temperatur auf die Zunahme des Sättigungsdruckes steigt. Diese Reihe von Zahlenwerten der Tafel ist für das Intervall von 0⁰ bis 100⁰ in Fig. 10 graphisch dargestellt. Die Werte des Sättigungsdruckes, ausgedrückt in mm., sind in gleichen Abständen als Lote auf einer horizontalen Geraden aufgetragen. Die Endpunkte der Lote wurden durch eine Linie, die sich der Lage der Punkte möglichst anpasst, verbunden. Diese Kurve, 4,6 bis 760, gibt

ein anschauliches Bild von den verschiedenen Zahlenwerten des Sättigungsdruckes und lässt auch leicht erkennen, wie sehr der Einfluss der Temperatur auf die Zunahme des Sättigungsdruckes steigt. Ein Blick genügt, um zu erkennen, wie und wo die Werte steigen oder fallen, ob schnell, ob langsam und wo die kleinsten und grössten Werte liegen. So lassen sich auch die Wirkungen anderer Kräfte, z. B. die des Luftdruckes etc. oder auch der Gang der Temperatur am Tage, im Monat, im Jahr leicht graphisch darstellen. So ist z. B. in Fig. 11 der Gang der Temperatur, welcher durchschnittlich in der letzten Woche des Juli 1886 in St. Gallen täglich stattfand, konstruirt worden. Das Thermometer zeigte, von 12 *h.* nachts anfangend bis 12 *h.* nachts, zu je 2 Stunden durchschnittlich 13, 11, 11, 13, 15, 18, 21, 23, 23, 20, 17, 15, 13° Réaumur.

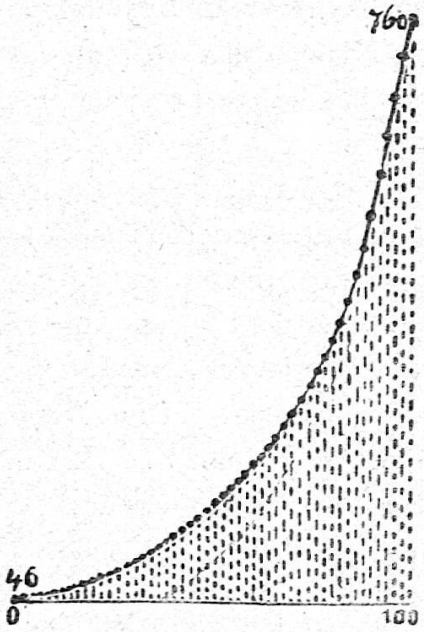


Fig. 10.

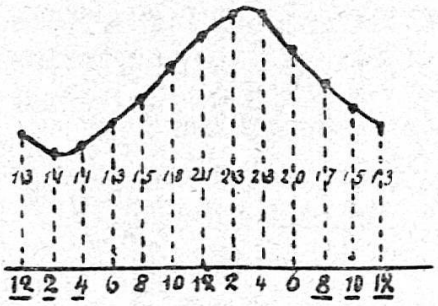


Fig. 11.

Das Minimum trat um $3^1/_2\,h$ morgens ($10^1/_2{}^0$), das Maximum (24^0) nachmittags um $3\,h$ ein.

Auf analoge Weise kann die Sterblichkeit einer Stadt als veränderlich mit der Jahreszeit dargestellt werden; ebenso der Verlauf einer Krankheit, die Intensität des Auftretens einer Epidemie, die Zahl der Eheschliessungen in den verschiedenen Jahren, die Fruchtpreise etc. etc.

Obgleich diese Darstellungen die Inkorrektheit haben, dass die Lote und ihre gegenseitigen Abstände nicht durch dasselbe Mass gemessen sind, d. h. gemessen werden können und man daher die Kurven nach Belieben mehr oder weniger gestreckt zeichnen kann, indem man die Abstände der Lote grösser oder kleiner wählt, so geben die Linien doch von dem Verlaufe der betreffenden Erscheinung ein übersichtliches Bild. Die in Fig. 10 und 11 dargestellten Grössen gingen *kontinuirlich* in einander über; es wird jedoch die graphische Darstellung vielfach auch bei *diskontinuirlichen* Zahlwerten angewendet. So ist z. B. in Fig. 12 die

Zahl der Elementarschüler auf je 10,000 Einwohner in den wichtigsten Kulturstaaten graphisch dargestellt.

Ein streng mathematisches Gesetz lässt sich in den meisten solchen Kurven nicht auffinden; denn es fehlt der bestimmte funktionelle Zusammenhang zwischen dem Lote und seinem jeweiligen Abstande von einem auf der Horizontallinie gewählten Anfangspunkt.

So hätten wir denn endlich die oberste Sprosse in der Stufenfolge der Anwendungen der Mathematik in der Naturwissenschaft erklommen; ich bezeichne sie als den *Ausdruck des Naturgesetzes durch das Mittel der Analysis;* es ist kurz gesagt, die Stufe der *mathematischen Physik.* — Nichts in der Natur geschieht gesetzlos. Alles ist vollkommen bestimmt; sagt ja schon das Buch der Weisheit: „Alles ist geordnet mit Mass, Zahl und Gewicht, und die Gesetze sind ohne Wandel.“ Damit ist schon klar ausgedrückt, dass die dadurch ausgesprochenen Naturgesetze nur *mathematisch aufgefasst* werden können. Die Natur, sagt Plato, übt immer Mathematik. In manchen Fällen ist es dem Forscher gelungen, der Natur die ganz bestimmte Funktion zwischen Ursache und Wirkung abzulauschen, und es wird, wie Gauss sagt, der Triumph der Wissenschaft sein, wenn es dereinst gelingt, das bunte Gewirr der Erscheinungen zu ordnen, die einzelnen Kräfte, von denen sie das zusammengesetzte Resultat sind, auseinander zu legen und einer jeden Sitz und Mass nachzuweisen. — So leitet die Astronomie, die bestausgebaute von den Naturwissenschaften, ihre Träger auf den beschwerlichen Pfaden langwieriger Rechnungen zur Entdeckung nie geschauter Planeten und Kometen; so erblicken wir jetzt Neptun am Himmel dank der Rechnungen zweier Mathematiker (Leverrier und Adams).

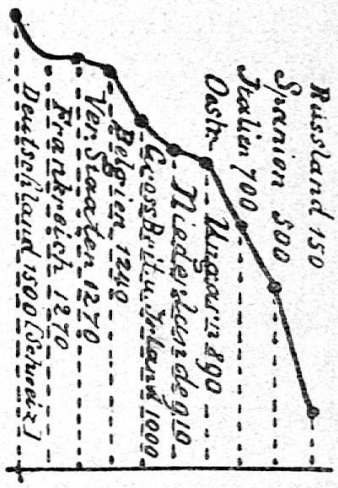


Fig. 12.

Als Grundlage dient der mathematischen Physik die analytische Mechanik, welche als eine Lehre von den Bewegungen im weitesten Sinne des Wortes betrachtet werden kann. So lässt sich das Newtonsche Gravitationsgesetz durch die Gleichung ausdrücken $P = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \gamma$ und in ähnlicher Weise viele andere Gesetze. Die stetige Wirkung der Kräfte, die diese und andere Bewegungen hervorbringen, lässt sich als eine Reihen-

folge stossweise wirkender Kraftäusserungen begreifen und berechnen, welches Pulsiren der Naturkräfte selbst gleichsam ein Bild der in uns stets wechselnden Gedanken- und Vorstellungsreihen ist. Die von Descartes in das Stadium der Kurven und Flächen eingeführten analytischen Gleichungen oder, dass ich es kurz sage, die Lehren der analytischen Geometrie sind nicht bloss der Anwendung auf Geometrie und Mechanik fähig; ihre Anwendung erstreckt sich auch auf allgemeine Erscheinungen. Die Differentialgleichungen für die Verbreitung der Wärme drücken die allgemeinsten Bedingungen aus und führen die speziell physikalischen Fragen auf rein analytische Probleme zurück.

K. v. Raumer fasst diese verschiedenen Stufen der Anwendung kurz zusammen, wenn er sagt: „Die Mathematik ist Wurzel und Blüte der Gesetzlehre der Natur und ebenso der Künste. Sie offenbart das Gesetz der Krystalle, der chemischen Mischungen, der Zahl der Blütenblätter und Staubfäden, der Gestalten, Grössen und Bewegungen der Gestirne; sie ist der Geist der Festigkeit mächtiger Münster, der Geist der Harmonie in der Musik, sie gibt dem Maler Mass und Ordnung, sie lebt im Hexameter Homers und in den Chormassen der Tragiker."

Anhangsweise ist hier noch die Anwendung der Mathematik auf die Lehre vom Menschen zu erwähnen; ich denke hier keineswegs an die vielen schon erkannten Gesetze seines Bewegungs-Mechanismus,* nicht an einzelne Kapitel der Physiologie, es müssten diese ja auf frühere Stufen verwiesen werden, ich denke vielmehr an den menschlichen Geist selber, an die Denkprozesse. Es darf hier nämlich nicht verschwiegen werden, dass Herbart und nach ihm Drobisch einen Versuch gemacht haben, die Mathematik auf Psychologie anzuwenden. Weiter hat im Jahr 1877 Dr. E. Schröder eine Schrift unter dem Titel: „Der Operationskreis des Logikkalkuls" veröffentlicht, worin er eine durchaus elementare Methode entwickelt, die Probleme der deduktiven Logik mittelst Rechnung zu lösen. Seit jener Zeit sind in dieser Richtung noch weitere Schritte getan worden, besonders durch den Amerikaner S. Peirce sowie durch die umfassendere bezügliche Schrift von Dr. E. Schröder: „Vorlesungen über die Algebra der Logik" (exakte Logik).

Es muss jedoch an dieser Stelle noch konstatirt werden, dass die Geschichte von Männern berichtet, welche in verkehrter Weise das meiste Wissen gewaltsam zu mathematisiren versuchten.

---

* Siehe u. a. Meyer, Dr. Herm., Prof., Statik und Mechanik des menschlichen Fusses; Jena 1886.

Von den Beispielen hiefür, die Raabe in seinen Schriften anführt, sollen zwei vorgeführt werden, welche auf Rechnung der im Anfang unseres Jahrhunderts sich breit machenden Naturphilosophie zu setzen sind:

1. „Es wurde der ganze Inhalt der Heilkunde in die mathematische Formel $\sqrt[n]{(a^x)^n} = a^x$ zusammengefasst, womit gesagt werden sollte, wenn die Arznei die Krankheit aufhebt, so wird der Patient auf seinen Normalzustand vor der Krankheit gebracht", was jedenfalls auch ohne diese mathematische Formel begreiflich gewesen wäre.

2. Ein anderer Philosoph derselben Richtung erklärte die Existenz des vorhandenen moralischen Übels wörtlich wie folgt: „Die Existenz des moralischen Übels ist eine Folge der Schiefe der Verhältnisse der uns umgebenden Dinge zu uns selbst. Diese Schiefe der Verhältnisse aber ist eine Folge der Schiefe der Ekliptik. Wenn einst in späterer Zeit bei vollendeterer Weltenentwicklung die Schiefe der Ekliptik ihr Ende erreicht haben wird, dann wird mit ihr die Schiefe unserer Ansichten oder das moralische Übel sein Ende erreichen."

II. Wir gehen jetzt zum zweiten, ungleich kleinern Teil unserer Erörterungen über, nämlich zu den *Einflüssen der Naturwissenschaft auf die mathematischen Disziplinen.*

Da die Mathematik über die höchsten Fragen, die den Menschen hienieden interessiren, keine Auskunft zu geben vermag, so werden die Leistungen und Fortschritte derselben vielfach, ganz besonders in einigen deutschen Staaten, von den Vertretern eines durch lange Jahre gross gezogenen Schul-Philologentums im Bewusstsein ihrer eigenen grossartigen Schöpfungen sehr geringschätzig angesehen. Oft haben auch die ersten auf der Schule gelehrten Elemente der Mathematik es nicht vermocht, diese ganze Wissenssphäre vor dem Vorwurf der Trockenheit zu schützen, und in der Tat würde dieser Vorwurf nicht ganz unbegründet sein, wenn das, was gemeinhin unter Mathematik gewöhnlich verstanden wird, sie selbst auch wirklich wäre. Gerade da, auf der Stufe, wo die Jugend sich mit ihr zu befassen anfängt, muss die Mathematik mit dem Leben in Verbindung treten, mit den Verhältnissen in der Natur Fühlung behalten und nicht sich der auf dieser Stufe schon möglichen Anwendungen entschlagen. Die Naturwissenschaft liefert reichliches Material für zu ermittelnde Grössenbeziehungen, und so gewinnt unsere Wissenschaft gleich anfangs beim jugendlichen Geist an Interesse. Wir betonen also, dass eine nicht allzu weitgehende Anlehnung an die Verhältnisse in Natur und Technik geeignet sei, im jugendlichen Geist Interesse für Mathematik zu erwecken.

Aber auch der gereifte Forscher wird durch Naturprobleme oft auf ganz neue Gesichtspunkte für seine Wissenschaft geführt. Das tiefeingehende Studium der Natur bildet sogar eine ergibige Quelle für mathematische Entdeckungen, indem es ein Mittel ist für die Vervollkommnung der Analysis selbst und zur Auffindung derjenigen Grundlehren derselben, die vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus am wichtigsten sind. So gehören z. B. die Gleichungen für die Bewegungen der Wärme, die für die Vibrationen tönender Körper etc. einem vor verhältnismässig noch kurzer Zeit erschlossenen Gebiete der Analysis an.

Auch die Beschäftigung mit den Wahrscheinlichkeiten hat der Mathematik schon zu ganz ansehnlichen Leistungen Anlass gegeben. Sobald nämlich der Mathematiker sich an die Ergründung der Naturgesetze machte, mussten ihm zwei Umstände hindernd entgegentreten: 1. die Unzuverlässigkeit sinnlicher Wahrnehmungen und 2. die Unmöglichkeit einer wirklich absoluten Bestimmung von Zeit- und Raumgrössen. Mannigfaltigkeit ist die Natur der Fehlerquellen, auf welche bei der Erwerbung von Kenntnissen Bedacht zu nehmen ist. Ganze Kapitel, ja sogar selbständige Schriften sind schon erschienen über *Sinnestäuschungen*. Auch unser Gedächtnis wird zuweilen untreu, ja wir machen Rechnungsfehler; kurzum, wir dürfen auch hier sagen: „Es irrt der Mensch, so lang er strebt.“ Selbst die Wahrheit ist nicht immer zugleich wahrscheinlich, sonst hätte nicht Jahrhunderte lang das ptolemäische Weltsystem das herrschende sein können. Aber trotz all dieser Irrtümer, über die wir nie hinauskommen können, liegt doch in den Wahrnehmungen, d. i. den Erfahrungen ein Fünkchen Wahrheit. Wie weit dieses Körnlein von Wahrheit sich hat herausschälen lassen, das sucht die Wahrscheinlichkeits-Rechnung durch Zahlen darzustellen, wird ja doch das Verlangen nach Wahrheit, wo es möglich ist, durch Zahlen am vollständigsten gestillt. Die reine Mathematik hat hier als Einheit die absolute Gewissheit anerkannt, nach der die fragliche Grösse der Hoffnung des Eintretens eines von mehreren gleich möglichen Ereignissen, oder der kleinste Fehler den man bei der Wahl eines aus Messungsresultaten berechneten Mittelwertes gemacht hat, berechnet werden kann. Unsere Urteile zeigen nach dieser Richtung hin die verschiedensten Grade innerer Überzeugung, welche zum Teil auch sprachlich zum Ausdrucke gebracht werden können. Vom Werte Null ausgehend, führt uns die Zahlenreihe sukzessive durch die verschiedensten Abstufungen bis zur vollendetsten Überzeugung, mit der wir von der Existenz des eigenen Ich reden. *

---

* Vergl. den Ausspruch von Descartes: „Ich denke, also bin ich.“

Als Einflüsse der Naturwissenschaft auf die Mathematik hätten wir daher zu verzeichnen:

1. Die Naturwissenschaften sind imstande, den ersten Unterricht in der Mathematik zu beleben und interessanter zu gestalten;
2. das gründliche Studium der Natur bildet eine Fundgrube für mathematische Entdeckungen.

Die Mathematik hat sich aber schon zeitig vom Dienste der menschlichen Bedürftigkeit frei gemacht, hat sich losgerissen von der Erforschung der Himmelsräume und ihren eigentlichen Gegenstand in die Welt der Gedanken verlegt.

Zum Schluss wollen wir noch der Vorteile und der veredelnden Einflüsse gedenken, welche das gleichzeitige Studium beider Kategorien von Wissenschaften gewährt. Viele derselben liegen auf der Hand. Es liegt die Zeit noch nicht allzu fern, in der ungewöhnliche Regengüsse oder sehr lange anhaltende Dürre, ein Komet mit sehr langem Schweife, die Verfinsterungen, Nordlichter überhaupt ausserordentliche Erscheinungen als Zeichen des himmlischen Zornes angesehen wurden, heraufbeschworen durch die Verbrechen der Erde. Erzeugt es dagegen heute nicht ein wohltuendes Gefühl der Sicherheit, wenn wir eine im Kalender angezeigte Sonnen- und Mondsfinsternis zur angegebenen Zeit sich pünktlich einstellen sehen? was so sicher zum voraus bestimmt werden kann, dass ein Kaiser des himmlischen Reiches (China), nämlich Tschung-Khang, seine zwei Hofastronomen Hi und Ho, welche im Wohlleben die Berechnung der am 22. Oktober 2137 vor Chr. eintretenden totalen Sonnenfinsternis versäumten, so dass sich also diese letztere unangemeldet einstellte, hinrichten liess. Weichen nicht kindische Besorgnisse, wenn der vom Astronomen vorausgesagte Anzug eines in noch weitentfernten Himmelsräumen befindlichen Kometen durch Beobachtung sich bewahrheitet? * — Wer in heutiger Zeit dahinlebt, ohne um die Erfolge der Mathematik oder die Resultate neuerer Naturforschung zu wissen, kann unmöglich die von ihnen beherrschte Gegenwart richtig verstehen, und dessen Leben gleicht dem eines fremden Wanderers in noch unbekannten Kontinenten.

„Wenn Hegel in einer Gymnasialrede sagen durfte: „Wer die Werke der Alten nicht gekannt hat, hat gelebt, ohne die Schönheit zu kennen,“ so dürfen wir vielleicht mit mindestens eben so grossem Recht ausrufen: Wer die Mathematik und die Resultate der neuern Naturforschung nicht gekannt hat, hat gelebt ohne die Wahrheit zu kennen.“

---

* Man denke an den von Halley und Clairaut angekündigten Durchgang eines Kometen für den Anfang des Jahres 1759.

Wie viele für den Menschen höchst notwendige Kenntnisse sind durch glückliche Kombination von Mathematik und Naturlehre gewonnen worden: Kenntnisse aus der Schiffahrtskunde, Geographie, Technik, Mechanik, Optik etc. „Wer gab," sagt Herrschel, „zuerst der Chirurgie die Kühnheit, ein lebendiges Auge zu öffnen, um dem wegen zu grosser, durch keine Linse aufzuhebender Erhabenheit der Hornhaut Erblindeten wieder zum Lichte seiner Augen zu verhelfen? War es nicht die zuvor durch die Mathematik erlangte Kenntnis von den Gesetzen des Sehens?"

Aber nicht bloss das Verständnis der Gegenwart und ihrer Kultur wird durch das gemeinsame Studium unserer Disziplinen ermöglicht, nicht bloss haben diese den Menschen gelehrt, die Bedürfnisse für das Leben auf eine seiner würdigere Weise zu befriedigen, sondern es liegt im Studium beider auch ein gleich begeisterndes Gefühl. Für die Naturforschung wird mir dies wohl ohne weiteres zugestanden werden, ansonsten ich auf das Leben und die Werke Göthes verweisen würde; dass aber auch die Mathematik in dieser Beziehung keineswegs zurücksteht, dafür zeugen die Worte Fouriers, eines der grössten französischen Mathematiker. Er sagt: „Die Mathematik bildet sich nur allmälig weiter, aber sie wächst auf und fusst mitten unter den unaufhörlichen Schwankungen und den Irrtümern des menschlichen Geistes. Ihr Attribut ist die Klarheit, sie vereint getrennte Erscheinungen und entdeckt das geheime Band, welches sie vereinigt. Wenn Luft und Licht und die wogenden Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus uns zu entfliehen scheinen, wenn die Körper fern von uns in die Unermesslichkeit des Raumes gestellt sind, wenn der Mensch das Schauspiel des Himmels verflossener Jahrhunderte schauen und die Wirkungen der Schwere und Wärme tief im ewig unzugänglichen Innern unsers Erdballs erforschen will, dann ruft er die mathematische Analysis zu seiner Hilfe herbei. Sie verkörpert den unfühlbaren Stoff und fesselt die flüchtige Erscheinung, sie ruft die Körper aus der Unendlichkeit des Himmels und erschliesst uns das Innere der Erde. Sie scheint eine Kraft des menschlichen Geistes, die bestimmt ist, uns für die Unvollkommenheit der Sinne und für die Kürze unsers Lebens zu entschädigen. Ja, was noch bewunderungswürdiger ist, sie befolgt einen und denselben Gang im Studium dieser Erscheinungen, sie erklärt alle durch dieselbe Sprache, fast als ob sie die Einheit und Einfachheit im Plane des Weltalls bezeugen wollte."