Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 29 (1919)
Heft: 2

Artikel: Geometrische Darstellung einer Gedankenkette
Autor: Pólya, Georg
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-789310

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GEOMETRISCHE DARSTELLUNG EINER GEDANKENKETTE.*) VON GEORG PÓLYA.

Die Sprache besitzt eine grosse Anzahl bildlicher Ausdrücke, um die verschiedenen Momente unserer Gedankengänge zu kennzeichnen. So spricht man z. B. von einer „Schlusskette" oder einer „Gedankenkette". Man stellt sich dabei offenbar das einzelne Glied einer Gedankenreihe, die sich von der Voraussetzung zu der Folgerung hinzieht, als einen Ring in einer Kette vor, stark und zugleich gelenkig sowohl mit dem vorangehenden wie mit dem nachfolgenden Ringe verbunden, so dass die Gesamtheit aller Glieder sich ununterbrochen vom ersten Ausgangspunkte bis zum letzten Schluss hinzieht. Noch öfter denkt man sich die Verbindung zweier Gedanken als einen Weg oder als eine Brücke dargestellt. Man sagt mindestens von dem einen oder dem anderen grossen Mann, er hätte zwischen zwei Wissensgebieten einen neuen Weg angebahnt oder eine neue Brücke geschlagen. Am häufigsten denkt man sich aber wohl die Verbindungslinie zweier Gedanken als einen Faden. Man spricht von dem Faden eines Beweises, den man weiterspinnen, fallen lassen, wieder aufnehmen und auch abschneiden kann. Im allgemeinen besitzt aber ein Beweis mehrere Fäden, die sich auf die mannigfaltigste Weise verzweigen und wiedervereinigen können, indem sie sich durchkreuzen, verknoten und miteinander verschlingen. Es kann dabei zu solcher Verwirrung kommen, dass der Beweisführer selbst den richtigen Faden nicht mehr herausfindet. Um so mehr bedarf der aufmerksame Leser oder Hörer eines Leitfadens, um das Gewirr abzuwickeln. Soll aber der Beweis richtig und stichhaltig sein, so müssen seine Fäden von den ersten Anknüpfungspunkten sich ununterbrochen und zusammenhängend bis dahin ziehen, wo sie dann zum letzten Schlusse zusammengefasst werden.

Ähnliche metaphorische Ausdrücke finden sich in allen gebildeten Sprachen. Diese Metapher rücken uns immer näher und näher einer ganz bestimmten geometrischen Darstellung, die am Ende sich uns unwiderstehlich aufzwingt. Das Spinngewebe verfestigt sich zu einer deutlichen geometrischen Form, die ich Ihnen vorführen will. Anstatt Redeweisen will ich Ihnen eine klare geo-

*) „Rathausvortrag", gehalten in Zürich den 22. November 1917.

metrische Figur geben, die alle diese Redeweisen erst recht verständlich macht, anstatt Metapher präzise Definitionen, an Stelle von bildlichen Ausdrücken ein wirkliches geometrisches Bild.

Wenn ich nun Ihnen meine geometrischen Bäume vorführen will, deren Verzweigungen die Verzweigungen der Schlussfolgerungen nachahmen sollen, so muss ich das an einem Beispiel tun, und ich kann nicht umhin, ein mathematisches Beispiel zu wählen, sei es auch ein Beispiel der einfachsten Art. Ich wähle mir eine simple Aufgabe der Schulgeometrie, nämlich die folgende: von einem geraden Kreiskegelstumpf ist die Mantelfläche zu berechnen. Sie können sich einen Zuckerhut in der Mitte durchgesägt denken, und dann ist die Frage, wie viel Papier ist zur Bedeckung der krummen Seitenfläche nötig. Bekannt ist dabei die Höhe des Zuckerhutstumpfes und die Radien der Grundfläche und der Deckfläche.

Aus diesen drei, etwa direkt gemachten Längenabmessungen wollen wir nun die Mantelfläche bestimmen. Ich werde übrigens die Aufgabe ziemlich ungeschickt anfassen.

Wie die Figur Ia zeigt, bezeichne ich mit R den Radius des Grundkreises, mit r den des Deckkreises, mit h die Höhe des Kegelstumpfes. Diese Grössen sind bekannt. Die unbekannte Mantelfläche bezeichne ich mit F. — In der Figur Ib sind die drei bekannten Grössen durch drei Punkte unten, die unbekannte Grösse durch einen oben dargestellt. Zwischen Bekanntem und Unbekanntem befindet sich leerer Raum, den wir zu überbrücken haben.

Die Aufmerksamkeit konzentriert sich auf das Unbekannte F und erzeugt einen Einfall, etwa den folgenden: F ist die Differenz zweier vollen Kegelmantelflächen M und m, wie die Figur IIa zeigt. Dadurch wird die Ermittelung von F auf die von zwei neuen Grössen zurückgeführt. Diese Zurückführung erweckt Vertrauen, denn die neu eingeführten beiden Grössen sind von gleicher und einfacherer Natur als F. — Diese Zurückführung wird in Figur IIb dadurch angedeutet, dass der bisher in Frage stehende Punkt F mit den beiden neu eingeführten M und m durch je eine Linie verbunden wird.

Jetzt kommt es darauf an, M und m zu ermitteln, auf diese noch offenstehenden Punkte konzentriert sich die Aufmerksamkeit. Sie ruft in Erinnerung, dass M durch Grundradius R und Mantellinie L eines Vollkegels ausgedrückt werden kann, und ähnlicherweise m durch r und l (vgl. Figur IIIa). Dadurch sind die bisherigen offen stehenden Punkte M und m auf zwei neue offene Punkte L und l zu-

rückgeführt, doch man meint, sich am guten Wege zu befinden, weil zugleich die erste Verbindung mit dem Bekannten gewonnen ist. Die Figur IIIb zeigt den momentanen logischen Sachverhalt auf ersichtliche Weise und gibt feste Form mehreren bildlichen Ausdrücken, die sich eben zwanglos einstellten.

Jetzt sind wieder zwei Punkte in Schwebe: L und l. Man bemerkt aber leicht die Proportion $L : l = R : r$, die in Figur IVa hervorgehoben ist. Dass die Relation zwischen den vier Grössen eben eine Proportion ist, darauf kommt es nicht so sehr an. Von unserem Standpunkte aus ist nur wichtig, dass aus den zwei schwebenden Punkten der eine, etwa L, auf den anderen, l, und auf bekannte Grössen, R und r zurückgeführt werden kann. Die durch diese neue Zurückführung entstandene logische Situation stellt die Figur IVb dar. Darin gibt es nur einen offenen Punkt l.

Das Wesentliche an den noch folgenden Figuren ist nun ohne weiteres zu begreifen: die eine Serie von Figuren hebt die Grössen hervor, die im betreffenden Stadium des Gedankenganges eben im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen, während die Parallelserie von Bildern das logische Resultat resumiert und die durch jene Aufmerksamkeitskonzentration erlangte logische Verbindungen auf ersichtliche Weise registriert. Mit jedem Schritt werden neue Zwischenglieder eingeführt. Zwar hängt das neu eingeführte Glied und mit ihm vorderhand der ganze Gedankengang in der Luft, aber man hat das Gefühl, dass man vorwärts kommt. Die Hoffnung bewahrheitet sich auch, und mit dem letzten Schritt wird das letzteingeführte Zwischenglied restlos durch Bekanntes ausgedrückt. Die Einzelheiten sind nicht so wichtig, sind aber auch mühelos zu begreifen. Der Schritt V führt eine neue Grösse x ein, während l mit Hülfe von Pythagoras aus x und r berechnet wird. In dem Schritt VI kommt die Proportion $x : r = h : d$ vor, und jetzt handelt es sich einzig und allein um die Ermittlung von d. Mit dem VII. und letzten Schritt wird aber auch d als $= R - r$ gefunden, und damit der Gedankengang abgeschlossen.

So zieht sich endlich lückenlos das Gewebe der logischen Verbindungen vom Gegebenen zum Gesuchten hin, der logische Baum ragt von den Wurzeln bis zum Gipfel, die logischen Adern und Fasern tragen die Schlussfolgerung von den ersten Anknüpfungspunkten bis zum letzten Schluss.

Wenn man jetzt zur Berechnung schreitet, dann wird man von dem Gegebenen ausgehend zuerst diejenigen Grössen berechnen, die

unmittelbar durch das Gegebene ausgedrückt sind, dann die nächsten, und im ganzen durchläuft man die Schlusskette in entgegengesetzter Richtung, als sie eben aufgebaut wurde. Dieser Durchlaufssinn ist in Figur VIII dargestellt. Letztere veranschaulicht, wie das Gesuchte durch alle Mittelglieder hindurch endlich durch das Gegebene bestimmt wird. (Daher veranschaulicht dieselbe Figur auch die mathematische Durchführung dieser Bestimmung, die Elimination.)

Die gewonnene Darstellungsweise ist natürlich auf mannigfaltige andere Arten von Gedankengängen anwendbar. Ich habe ein geometrisches Beispiel gewählt, nur um Bestimmtheit und zugleich hinreichende Verwicklung zu haben. Aber irgendwelche Schlüsse, Berechnungen und Pläne lassen sich auf ähnliche Weise in einem Diagramm aufzeichnen.

Betrachten wir z. B. den uns allen bekannten Robinson auf seiner Insel. Er wollte aus irgendeinem Grunde durch einen Bach. Aber der Bach ist angeschwollen, hat sich nach dem letzten Wolkenbruch in einen Wildbach verwandelt, er ist zu tief und zu reissend, um das Durchwaten zu riskieren. Jetzt kommt aber Robinson der Gedanke, einen Baumstamm zu stürzen, so dass er quer über den Bach zu liegen kommt. Dazu musste er aber Seil und Axt haben. Robinson denkt weiter und weiter nach, und weil er erfinderisch und praktisch ist, knüpft er seine letzten Gedankenfäden an die Realität, an das Gegebene an. Die einzelnen Punkte des Diagrammes, das seine Überlegung darstellen würde, stellen das Durchqueren des Wildbachs, das Stürzen vom Baumstamm, die Axt, das Seil usw. dar. Ist er mit der Überlegung fertig, dann schreitet er zur Tat, und verwirklicht seine Einfälle in umgekehrter Reihenfolge, als er sie entdeckt hat — ebenso wie in unserem vorangehenden Falle die geometrischen Grössen in umgekehrter Reihenfolge berechnet wurden, als sie nach und nach in die Analyse eintraten.

Um der Realität noch näher zu kommen, betrachten wir die Schwierigkeiten, denen man bei Bewerbung um eine Stelle ausgesetzt ist. Um Missverständnissen vorzubeugen, wird aber gut sein, den Schauplatz anderswohin zu verlegen, etwa nach dem Land Liliput, das Ihnen aus einer berühmten Reisebeschreibung wohl bekannt sein dürfte. Die Sachlage ist so: jemand bewirbt sich um eine gewisse Stelle bei den Liliputaner Staatseisenbahnen, und die Entscheidung über sein Gesuch hängt von einem mächtigen Direktor ab. Um den Direktor für seine Sache günstig zu stimmen, will er verschiedene einflussreiche Persönlichkeiten in Bewegung setzen. Bei dem einen

wird wohl ein Empfehlungsschreiben genügen; den andern ist mit andern Gründen beizukommen, die wir hier lieber nicht zu genau betrachten wollen. Woher aber das Empfehlungsschreiben holen? Und er überlegt sich den Plan weiter und weiter, bis er endlich zu sicheren Stützen im engsten Familien- und Freundeskreise gelangt. Wollten wir den ausgehegten Plan indiskreterweise durch ein Diagramm darstellen, so würden darin die Knotenpunkte die verschiedenen Protektoren und Gönner bedeuten. Die ersten Anknüpfungspunkte sind etwa der Schwager, die Tante und die sonstige Sippschaft, der Endpunkt der besagte Direktor der Liliputaner Staatseisenbahnen, die Zwischenpunkte die Vermittler. Die Linien stellen aber die Wege dar, die zum Herzen der verschiedenen Gönner führen sollen, und nach allen Zwischenstationen zum Herzen des allmächtigen Direktors. Wenn der sorgenvolle Bewerber nach Feststellung des Planes diese Wege dann wirklich betreten will, so kann er allerdings zu seinem Leidwesen erfahren, dass seine Fäden nicht so fein und fest gesponnen sind, wie diejenigen eines mathematischen Schlusses: sie können reissen, und vielleicht an der heikelsten Stelle. Und, wie der erwähnte berühmte Reisende uns versichert und ausdrücklich hervorhebt, kann sogar im Lande Liliput vorkommen, dass alle Stricke reissen.

Aber nicht nur so schwierige Sachen wie die Berechnung der Mantelfläche eines Kegelstumpfes oder die Erwerbung einer Stelle an den Liliputaner Bahnen, führen auf solche Diagramme. Wie gesagt, lässt sich jeder Gedankengang auf seinen Zusammenhang hin durch ein ähnliches Diagramm darstellen: die Berechnung irgendeiner Grösse, die Aufstellung irgendeines Planes, die Lösung einer Schachaufgabe, die geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, die funktionale Abhängigkeit von irgendwelchen Variablen. Nur, wenn die einzelnen Glieder zu verschwommen und unsicher oder der Zusammenhang zu einfach ist, dann wird die geometrische Darstellung zu plump und anstössig.

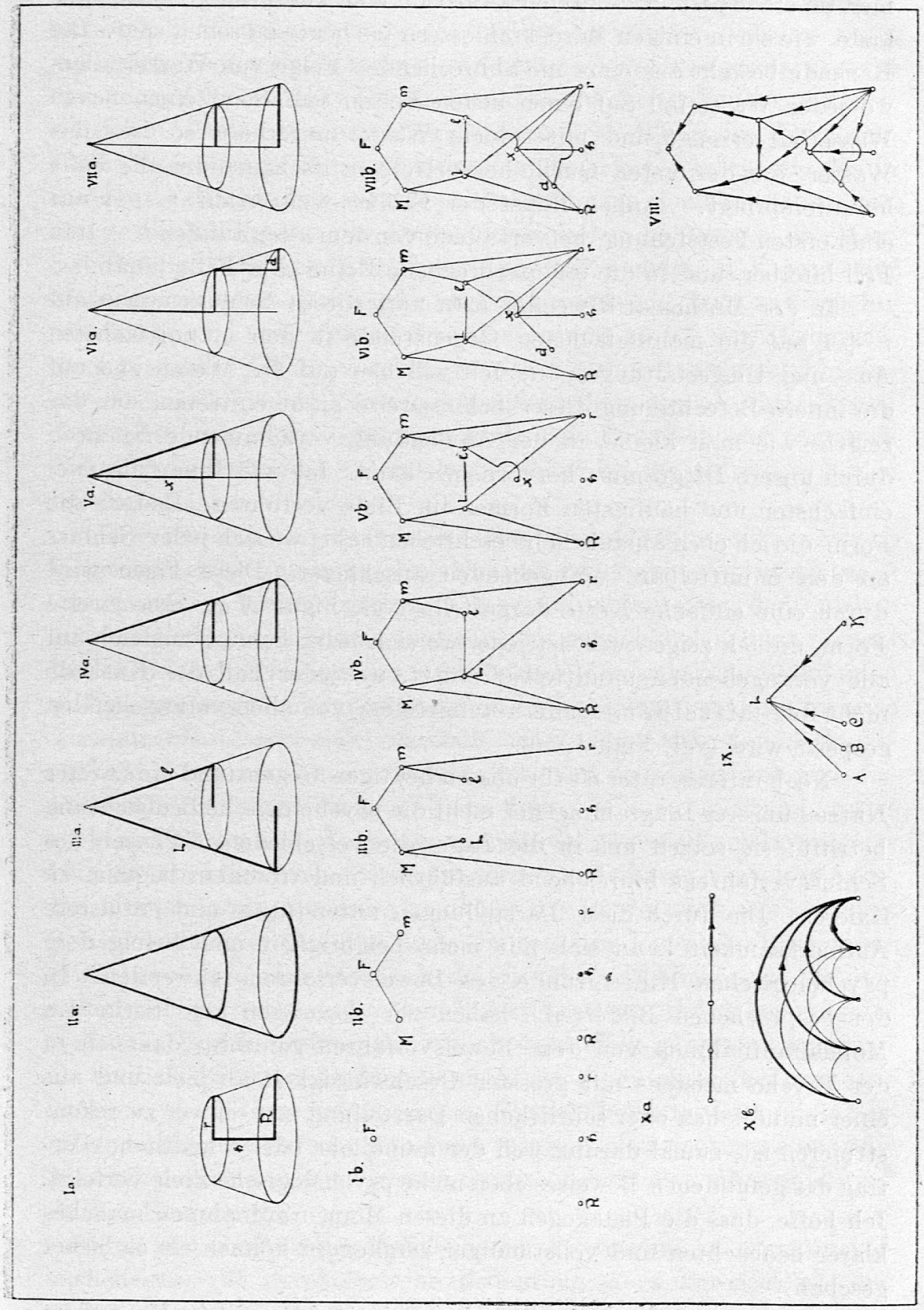
Die Bedeutung der ganzen Veranschaulichung wird uns am besten eingehen, wenn wir zuerst die mannigfaltige Bedeutung eines Elementardiagramms bei verschiedener Beschaffenheit des Gedankenganges untersuchen. Als „Elementardiagramm“ bezeichne ich ein solches, das keine Zwischenpunkte hat, es besteht nur aus einer gewissen Anzahl Ausgangspunkten A, B, C, ... K und aus einem einzigen Endpunkt L (vgl. Figur IX). Stellt das Diagramm eine Schlussfolgerung dar, so bedeuten die Anfangsglieder die Prämissen,

das Endglied die Konklusion. — Handelt es sich um die Berechnung einer Grösse, so stellen $A, B, \ldots K$ gegebene oder schon berechnete Grössen dar, aus denen der Wert von L unmittelbar zu ermitteln ist. — $A, B, \ldots K$ stellen unabhängige Variable, L eine von ihnen abhängige dar in dem Diagramm eines funktionalen Zusammenhanges. — Ein anderes Mal sind die Anfangsglieder gegebene oder schon konstruierte Stücke, das Endglied ein daraus unmittelbar konstruierbares Stück, wenn der Gedankengang einer geometrischen Konstruktion analysiert wird. — Bei einem praktischen Plan bedeuten $A, B, \ldots K$ erreichte oder doch als schon erreicht betrachtete Posten, während das Endglied L mit Hülfe von $A, B, \ldots K$ erreichbar sein soll. Allerdings an dieser letzten Stelle, wo die Zusammenhänge nicht mit Sicherheit, sondern nur mit Wahrscheinlichkeit anzuknüpfen sind, könnten wir, um unser Bild zu vervollständigen, den verschiedenen Fäden verschiedene Dicke, verschiedene Tragkraft zuschreiben.

Welchen Vorteil bringen aber die so eingeführten Diagramme, wozu sind sie gut, was erläutern sie? Über das innerste Wesen der Gedankengänge geben sie uns keinen Aufschluss. Das Diagramm hebt zwar die Analogie zwischen den Prämissen und der Konklusion einerseits, zwischen den unabhängigen Variablen und der abhängigen Variablen anderseits hervor, und mehrere andere Analogien von dieser Art, aber es sagt etwa nicht, worin die Berechtigung dieses oder jenes Schlusses oder eines Schlusses überhaupt liegt. Das Diagramm veranschaulicht nur den Zusammenhang der einzelnen Schlüsse und der einzelnen Abhängigkeiten, aus denen sich die Schlusskette oder das volle System von Abhängigkeiten auf dieselbe Weise aufbaut, wie das vollständige Diagramm aus seinen einzelnen Elementardiagrammen.

Aber auch diese Veranschaulichung ist nicht ganz ohne Nutzen. Sie kann uns zuerst hie und da dazu helfen, die logischen Verhältnisse klarer zu überblicken.

Hier will ich nur ein Beispiel andeutungsweise erwähnen. In der Mathematik hat sich ein aus mehreren Gründen äusserst bemerkenswertes Schlussverfahren ausgebildet, der Schluss durch vollständige Induktion, anders auch der Schluss von n auf $n + 1$ genannt. Da ich Sie nicht mit einem eng wissenschaftlich-technischen Beispiel langweilen will, kann ich vorderhand nur mit einer etwas oberflächlichen Beschreibung dienen: denken Sie sich eine unendliche Reihe von Schlüssen, die von jedem Fall zum nächsten Fall auf ähnliche Weise fortschreitend, jeden beliebigen Fall in ihre Gewalt zu bekom-


Ia.
IIa.
IIIa.
IVa.
Va.
VIa.
VIIa.
Ib.
IIb.
IIIb.
IVb.
Vb.
VIb.
VIIb.
VIII.
IX.
Xa
Xb.

men im stande ist. Oder denken Sie sich eine kunstvoll gebaute Kaskade, wie sie in einigen Barockschlössern bis heute zu sehen sind. Die Kaskade besteht aus einer nie abbrechenden Folge von Wasserfällen, wo jeder Wasserfall auf einen neuen Felsen auffallend einen neuen Wasserfall erzeugt und mit seinem Wasser unterhält, so dass das Wasser, aus der ersten Quelle hervortretend, nacheinander alle Fälle hinunterspringt. Ähnlich fliesst der Schluss von n auf $n + 1$ aus einer ersten Feststellung, hervortretend von dem n-ten auf den $n + 1$ten Fall hinüber, und so die ununterbrochene Reihe aller Fälle hinab.

In der Mathematik wendet man nun diesen Schluss von n auf $n + 1$ auf die mannigfachsten Gegenstände in den mannigfachsten Aus- und Umgestaltungen an. Ich will hier auf das Wesen und auf die innere Berechtigung dieser Schlussweise nicht eintreten, nur das zeigen, wie man kleine, in der Anwendung vorkommende Nüancen durch unsere Diagramme hervorheben kann. Ich will Ihnen die zwei einfachsten und häufigsten Formen im Bilde vorführen. Erstens die Form, die ich eben ausführlich beschrieben habe, wo sich jeder Schluss an den unmittelbar vorangehenden anschliesst. Diese Form wird durch eine einfache Kette dargestellt (vgl. Figur *X a*). Die zweite Form, die ich zeigen will, ist jene, wo sich jeder Schluss zugleich auf alle vorangehenden unmittelbar stützt, wo jeder Fall der Kaskade nicht nur mittelbar, sondern unmittelbar von allen vorangehenden gespeist wird (vgl. Figur *X b*).

Noch interessanter ist für unsern heutigen Gegenstand ein zweiter Nutzen unserer Diagramme, der mehr die psychologische Beobachtung betrifft: sie setzen uns in die Lage, die verschiedenen Phasen des Schlussverfahrens hinreichend ausführlich und trotzdem bequem zu fixieren. Die durch diese Darstellungen unterstützte und entlastete Aufmerksamkeit kann sich mit mehr Leichtigkeit und Erfolg dem psychologischen Hintergrunde des Beweisverfahrens zuwenden. In der besprochenen Bilderreihe haben wir sozusagen eine Serie von Momentaufnahmen von dem Beweisverfahren gemacht, das sich in der Psyche meistens mit grösster Geschwindigkeit abspielt und aus einer mündlichen oder schriftlichen Darstellung nur schwer zu rekonstruieren ist, zumal darum, weil der mündliche oder schriftliche Vortrag des gefundenen Beweises eben nicht psychologische Ziele verfolgt. Ich hoffe, dass die Pädagogen an diesen Momentaufnahmen manches klarer beobachten und vollständiger zergliedern können als es bisher geschah.

Ich will zuerst ein sehr einfaches Beispiel betrachten. Man pflegt

progressive und regressive Beweisgänge oder Gedankengänge zu unterscheiden, hie und da auch darüber zu streiten, welcher Gang vorzuziehen sei, welcher mehr naturgemäss sei, der progressive oder der regressive? Der Unterschied bezieht sich offenbar auf den zeitlichen Aufbau des logischen Diagrammes. Wenn die Figur vom Gesuchten ausgehend, gegen das Gegebene hin wächst, wie das in unserem Falle geschah, dann spricht man von einem regressiven Gang. Wenn hingegen der Aufbau des logischen Baumes bei den Wurzeln anfängt, und mit Erreichung des Gipfels endet, d. h. wenn der Gedankengang von den gegebenen Stücken ausgeht, auf das Gesuchte hin strebt und mit dessen Erreichen endet, so ist der Gedankengang progressiv. Wie wir sehen, betrifft dieser Unterschied nicht den eigentlichen logischen Zusammenhang, sondern nur die Zeitfolge, in der er gefunden oder vorgetragen wird: Bei der Ansicht der fertigen Figur ist es belanglos, in welcher Reihenfolge die einzelnen Linien hineingezeichnet wurden.

Was nun den Streit regressiv—progressiv betrifft, so ist zuerst zu bemerken, dass ausser regressivem und progressivem Aufbau noch manche andere denkbar sind: z. B. wenn mal an dem einen, dann an dem anderen Ende etwas hinzugefügt wird, bis es glücklich gelingt, die von beiden Seiten gegeneinander strebenden Fäden richtig zu verknüpfen und zu vereinigen. In den einfachsten Fällen kommt wohl der logische Zusammenhang regressiv zustande, man tastet sich von dem Gesuchten und Unbekannten zurück, bis man an Gegebenes und Bekanntes stösst. So wuchs z. B. in dem von uns eingehend untersuchten Fall der logische Baum vom Gipfel zu den Wurzeln hin, was bei einem gewöhnlichen Baum ein etwas sonderbares Verhalten wäre. Bei komplizierten Schlüssen geschieht die Entdeckung des logischen Zusammenhanges, das Zustandekommen des logischen Diagramms etwa wie folgt: man hat sich die einzelnen Schlüsse, die zu dem vollen Schluss nötig sind, schon längst überlegt, und dabei meistens noch eine Unzahl andere, wenn auch wohl nicht ganz ausführlich — als endlich die rettende Idee kommt, die sie zu einer Schlusskette zusammenfasst: man hat eine grosse Anzahl Elementardiagramme vorrätig, aus denen auf einmal etwas, wie ein elektrischer Schlag, die passenden zu einem geschlossenen System verschmilzt. Dieses „etwas" ist die Eingebung.

Ich will noch an der Hand unserer Diagramme zu erklären versuchen, was die psychologische Bedeutung eines Beweises ist, und woher die Schwierigkeit herrührt, mathematische Beweise zu ver-

stehen. Diese Schwierigkeit ist manchmal bei sonst ganz verständigen Leuten fast unüberwindlich gross, wie manche Eltern erfahren haben, deren Kinder höhere oder weniger hohe Schulen besuchen.

Wenn jemand als Leser oder Hörer einem etwas langatmigen mathematischen Beweise folgt, dann befindet er sich in ähnlicher Lage, als wenn er sich mit Hülfe einer kleinen Taschenlampe in einem grossen, finsteren Saal zurechtfinden müsste. Eine kleine Umgebung kann er mit voller Schärfe beleuchten, und mit Leichtigkeit überblicken, aber er muss die vielen einzeln beobachteten Stücke mit Anspannung seines Gedächtnisses festhalten und ein Bild vom Ganzen, von den grossen Verhältnissen erlangt er nur durch einen Aufschwung seiner Phantasie. Wir sehen es noch an der einen Serie unserer Bilder, wie die Aufmerksamkeit die einzelnen Teile der analysierten Figur nacheinander beleuchtet. Das richtige Auffassen der einzelnen, einfachen Teile gelingt auch jedermann ohne weiteres, das wirklich Schwierige ist, den Zusammenhang nicht zu verlieren. Jeder Schüler könnte, wenn er wollte, alle Einzelheiten eines mathematischen Vortrages begreifen. Aber nicht bei jedem Schüler ist die geistige Spannkraft durch Interesse genügend genährt, um die Einzelheiten auch zusammenzufassen. Die einzelnen Knoten in unserem logischen Gewebe anzuknüpfen, hat keine Schwierigkeit, die eigentliche Leistung ist, sich im Gewirr der Fäden nicht zu verlieren, den Zusammenhang festhalten, den Faden verfolgen und richtig entwickeln.

Wenn der Mann, den wir vorher im finsteren Saal beobachtet haben, anstatt seiner kleinen Taschenlampe einen grossen Leuchter hätte, so könnte er mit einem Blick die ganze Situation durchschauen. Ein höheres Wesen, das in seinem ausgedehnteren Bewusstsein alle Tatsachen auf einmal vereinigen könnte, hätte unsere komplizierten Schlussverfahren nicht nötig, für ihn wäre alles evident. Wir Menschen mit unserem beschränkten Bewusstsein haben aber die Anspannung unseres Gedächtnisses und die Konsequenz unserer Logik nötig, um nicht aus dem Auge zu verlieren den Zusammenhang des Ganzen, dessen einzelne Teile wir mühsam nacheinander abgetastet haben, um uns nach und nach zu einer Art Anschauung des vollen Tatbestandes aufzuschwingen, wovon unsere Aufmerksamkeit mit einem Male eigentlich nur geringe Stücke in allen Einzelheiten scharf beleuchten kann.

Man hat schon gesagt, dass die Wissenschaft ihren Ursprung der Schwäche des menschlichen Gedächtnisses verdankt: denn wäre unser Gedächtnis genug stark, dann könnten wir darin alle Einzelheiten

ohne weiteres aufbewahren, und die Anordnung und Systematisierung des Stoffes, die Zusammenfassung zu allgemeinen Gesetzen, kurz die ganze Tätigkeit der Wissenschaft wäre überflüssig. Ähnlicherweise könnte man sagen, dass die Logik ihren Ursprung der Mangelhaftigkeit unserer Aufmerksamkeit verdankt. Denn wäre unsere Aufmerksamkeit nicht so eng, wie sie ist, könnten wir damit beliebig ausgedehnte Gebiete, beliebig verwickelte Figuren mit einem Male in allen Einzelheiten überschauen, so wäre uns alles evident, anschaulich offenbar, und es wäre überflüssig, die Überzeugung von irgendeiner Wahrheit uns durch langwierige Beweise künstlich und mühsam zusammenzuzimmern.

Wir schwache Menschen jedoch, wenn wir mit unseren kleinen Lichtchen grosse Dinge beleuchten wollen, können wir das nur nach und nach tun, und wir müssen uns durch die wirren Fäden langer Schlüsse mühsam emporwinden.

Meine Damen und Herren! Als ich mich der Aufgabe unterzog, Ihnen etwas über mein Fach, über Mathematik, zu sagen, da war ich dessen wohl bewusst, dass meine Aufgabe schwierig, fast unlösbar ist. Der Weg, auf dem die Mathematiker ihre verschiedenen Ziele verfolgen, könnte manchen gar trostlos vorkommen: von den einfachsten und trivialsten Tatsachen ausgehend, erzeugen sie eine solche Komplikation, in der nur einigermassen sich zurechtzufinden jahrelanges Studium erforderlich ist. Um die Komplikation zu bewältigen, entwickeln die Mathematiker Schlüsse, die Zähigkeit und Verschlagenheit in jedem Mischungsverhältnis vereinigen, aber Aussenstehende mehr als alles übrige abschrecken. Ich wollte Ihnen, meine Damen und Herren, mindestens diesen einen Teil unserer Tätigkeit, das Schliessen, so gut ich konnte, näher bringen und Sie damit befreunden. Ich ging aus von geläufigen bildlichen Ausdrücken und verdichtete diese bildlichen Ausdrücke zu einem deutlichen, wirklichen, geometrischen Bilde. Ist meinen Zeichnungen gelungen, Ihnen die rätselhafte Kunst des Schliessens einigermassen näher zu bringen, so erachte ich meine Mühe nicht als verloren.