Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift

Band: 33 (1923)

Heft: 2

Artikel: Uneigentliche geometrische Raumelemente : nach einem Referat, gehalten an der 26. Versammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer in Zug, 8. Oktober 1922

Autor: Grossmann, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788416

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Uneigentliche geometrische Raumelemente.

Nach einem Referat, gehalten an der 26. Versammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer in Zug, 8. Oktober 1922.

Von Prof. Dr. M. Grossmann.

Vertrautheit mit dem Begriffe der sog. uneigentlichen oder unendlich-fernen Raumelemente ist die unerlässliche Grundlage für das verständnisvolle Anwenden geometrischer Erkenntnisse auf geometrische Konstruktionen. Es zeigt sich immer wieder, dass hier für den jugendlichen Geist eine Schwierigkeit liegt, deren Überwindung besondere Aufmerksamkeit von seiten des Lehrers erfordert und voraussetzt, dass dieser selbst vertraut sei mit der wissenschaftlichen Einschätzung dieser Begriffsbildungen.

Die Geometrie der Alten kennt nur den Punkt als Raumelement, die Figuren setzen sich aus Punkten zusammen. Erst später erkannte man, dass auch die gerade Linie und die Ebene als selbständige Raumelemente zum Aufbau geometrischer Figuren verwendet werden können, und erst die Entwicklung der projektiven Geometrie zu Anfang des letzten Jahrhunderts setzte diese geometrischen Raumelemente dem Punkt völlig ebenbürtig zur Seite. Dabei gelten in der projektiven Geometrie die Verknüpfungspostulate zwischen den geometrischen Elementen völlig ausnahmslos: zwei Punkte haben immer eine Verbindungsgerade, zwei Ebenen haben immer eine Schnittgerade, eine Gerade hat immer mit einer Ebene einen Schnittpunkt. Die Geometrie des Strahlenbündels, deren Elemente die Vollstrahlen und Ebenen durch einen Punkt sind, ist ein anschauliches Beispiel für diese ausnahmslose Verknüpfungsmöglichkeit, während in der euklidischen Geometrie der Ebene oder des Raumes bekanntlich Ausnahmefälle auf Schritt und Tritt zu berücksichtigen sind. So hat in der euklidischen Geometrie eine Gerade nur dann mit einer Ebene einen Schnittpunkt gemein, wenn sie nicht zu dieser Ebene parallel ist usw.

Es ist nun gelungen, durch Begriffserweiterung diese Ausnahmen zu beseitigen und diese Entwicklung der perspektivischen Raumanschauung geht auf Desargues zurück. Zwei parallele Gerade haben die nämliche Richtung und setzt man stets „uneigentlicher oder unendlich-ferner Punkt“ statt dieses Begriffes „Richtung“, so kann man die Ausnahmen beseitigen. Dann ist eine Gerade immer durch zwei Punkte bestimmt; denn der Fall, dass eine Gerade durch einen Punkt und ihre Richtung bestimmt ist, subsummiert sich dann im erweiterten Begriffssystem unter den allgemeinen Fall. Ebenso haben parallele Ebenen die „Stellung“ gemein, und man kann den Sonderfall paralleler Ebenen beseitigen, wenn man stets den erweiterten Begriff einführt, wonach man parallele Ebenen, die also die Stellung gemein haben, als solche ansieht, welche eine „uneigentliche oder unendlich-ferne Gerade“ gemein haben. Man ordnet so jeder Geraden einen und nur einen uneigent-

lichen oder unendlich-fernen Punkt zu, jeder Ebene eine und nur eine unendlich-ferne oder uneigentliche Gerade, somit dem Raum eine uneigentliche oder unendlich-ferne Ebene. Die perspektivische Raumanschauung enthält also eine bestimmte Stellungnahme zum Raumproblem und ist nur mit der euklidischen Geometrie vereinbar. Der Lehrer muss sich aber der Willkür bewusst sein, die darin liegt: der euklidischen Geometrie steht bekanntlich die nichteuklidische logisch ebenbürtig zur Seite. Das euklidische Parallelenpostulat ist die Grundlage der Möglichkeit der Einführung der perspektivischen Raumanschauung. Durch diese Begriffserweiterung durch Einführung der uneigentlichen Raumelemente wird der euklidische Raum zum projektiven, da im erweiterten Begriffssystem die Verknüpfungspostulate ausnahmslos gelten. Ganz anders liegen die Verhältnisse in der nicht-euklidischen Geometrie. In der hyperbolischen Geometrie, wie sie Gauss, Bolyai und Lobatschefskij entwickelt haben, gilt das euklidische Parallelenpostulat nicht; dort werden jeder Geraden zwei unendlich-ferne Punkte zugeschrieben, die unendlich-fernen Punkte der Ebene bilden nicht eine Gerade, wie in der euklidischen Geometrie, sondern eine Kurve, einen Kegelschnitt und die Gesamtheit der unendlich-fernen Punkte des Raumes bilden eine Fläche zweiten Grades. Die projektiven Beziehungen der Figuren zu dieser absoluten Fläche zweiten Grades ergeben die metrischen Beziehungen im nichteuklidischen Raum. Noch stärker mit den Gewohnheiten der perspektivischen Raumanschauung kollidieren die Verhältnisse in der elliptischen Geometrie, die auf Riemann zurückgeht, da hier die absolute Fläche zweiten Grades imaginär ist. Die Massverhältnisse in der Geometrie des Bündels sind ein anschauliches Beispiel dieser dritten denkbaren Möglichkeit: das Bündel enthält keine uneigentlichen, unendlich fernen Elemente, Vollstrahlen oder Ebenen und daher sind die Formeln der Bündelgeometrie, z. B. die trigonometrischen Formeln des Dreikants so verschieden von denen der ebenen (euklidischen) Trigonometrie.[1])

Gefordert werden muss, dass der Schüler in der perspektivischen Raumanschauung heimisch ist und mit den uneigentlichen Elementen konstruieren kann, als wären es eigentliche. Der Lehrer aber sollte sich der Willkür bewusst sein, die im euklidischen Parallelenpostulat liegt, da manche Hemmungen des Schülers sich auf diese Willkür zurückführen lassen. Die mangelnde Vertrautheit vieler Schüler mit den uneigentlichen Elementen äussert sich in Unsicherheit der gedanklichen und konstruktiven Operationen mit solchen. So wird es vielen schwer, mit der unendlich-fernen Tangente der Parabel zu operieren, als wäre sie eine eigentliche. Auch fällt es vielen schwer, die uneigentliche Gerade der Ebene als gegeben zu betrachten, sobald man instrumentelle Hilfsmittel zum Ziehen von parallelen Geraden

---

[1]) Zur Einführung in die nichteuklidische Geometrie seien genannt: Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie, Leipzig, Teubner; Schur, Grundlagen der Geometrie, Ebenda; Klein, Autogr. Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Ebenda.

hat. Besonders Mühe macht es aber, einzusehen, dass die Gesamtheit der unendlich-fernen Punkte des Raumes eine Ebene, die uneigentliche Ebene erfüllt. Nur selten gelingt hemmungslos der Schluss, dass z. B. eine Raumkurve 3. O. drei Asymptoten hat: denn da eine solche Raumkurve nach Definition in jeder Ebene drei Punkte hat, muss sie auch in der unendlich-fernen Ebene drei Punkte haben. Bei derartigen Schlüssen oder Konstruktionen versagt gewöhnlich die Sicherheit in der perspektivischen Raumanschauung.

Kleine Mitteilungen.

Schule und religiöse Erziehung. In der Stadt Zürich wurde ein Gesuch der römisch-katholischen Vertreter in der Zentralschulpflege, den Unterricht in biblischer Geschichte und Sittenlehre auf die Randstunden zu verlegen, um hiedurch den katholischen Kindern die Dispensierung von diesem Unterricht zu erleichtern, mit allen gegen die römisch-katholischen Stimmen abgelehnt. Zu diesem Beschlusse äussert sich in nichts weniger als schul- und lehrerfreundlichem Sinne Nationalrat F. Bopp in der „Bülach-Dielsdorfer Wochenzeitung". Es heisst dort u. a.:

„Was hätte es der Zürcher Schule geschadet, die den jüdischen Schülern das Schreiben am Samstagvormittag inmitten der Schule erlässt, wenn sie auch die katholischen Schüler aus dem Bibelunterricht der Schule entlassen hätte? Die gehen hernach doch zu ihrem Pfarrer, dem sie mehr glauben als dem Lehrer, und der es ihnen anders als dieser sagt; nützt es dann der Autorität des Lehrers und der Schule etwa? Oder der Religion der Schüler überhaupt? Keines von beiden. Wohl hat das Zürcher Schulgesetz ein schönes Wort für den Bibelunterricht in der Schule und die Art, wie er Andersgläubigen erteilt werden soll. Aber das schöne Wort ist eine — Phrase; es wäre eine solche und bliebe sie, selbst dann, wenn die idealsten Seelen in der Lehrerschaft es üben wollten. Ich weiss aber nicht, ob diese menschlich-religiösen Idealgestalten in unserer Lehrerschaft die Mehrheit bilden; sicher ist aber, dass es ihrer manchen, nur allzu manchen gibt, dem gegenüber religiöse Eltern berechtigte Scheu tragen, ihm ihre Kinder anzuvertrauen. Mag es sich um äussere Kenntnisse und Fertigkeiten handeln, wohlan; aber Seelenbildner gibt es nicht viele, Seelenverderber vielleicht mehr. Um aber von praktisch fühlbareren Folgen zu reden: es ist ein Unsinn, bei jeder Wahl und Abstimmung mit gewaltigen Mitteln unter den Erwachsenen den Kampf zu führen gegen die Vertreter verhängnisvoller Lehren, in denen wir aber ruhig unsere kommende Generation erziehen lassen. Und wir zwingen mit den Mitteln amtlicher Gewalt selbst die Einsichtigen dazu, die sich gegen solchen Wahnsinn sträuben. Wahrlich: das müssen wir schon bekennen: die Katholiken sind konsequenter als wir, und die Orthodoxen von Basel hatten wenigstens den Mut, der uns mangelt."

Die Lehrmittelnot an deutschen Schulen. In der Reichsverfassung ist zwar die Unentgeltlichkeit der Lehrmittel für Volksschüler vorgesehen; die arge Teuerung und Verschuldung macht aber diesen Artikel in der Verfassung, wie noch so manchen andern, zur platonischen Gebärde. Da die Eltern der Schüler in der Hauptsache für die Lehrmittel aufkommen müssen, so ist die Benützung von Schulbüchern aufs äusserste eingeschränkt worden. Die Kinder sind genötigt, sich im Unterricht mit dürftigen Notizen