Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift

Band: 33 (1923)

Heft: 3

Artikel: Zur Behandlung der uneigentlichen Elemente im Mittelschulunterricht : Referat, gehalten an der 26. Versammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer in Zug, 8. Oktober 1922

Autor: Mettler, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788420

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

natürlichen Rückbildung der Rachenmandel vorarbeiteten. Die Operation dauert gewöhnlich nur wenige Minuten; sie kann bei kräftigen Kindern ohne Narkose ausgeführt werden, bei ängstlichen und nervösen Kindern ziehen wir meist vor, dieselbe in einer leichten Bromäthylnarkose auszuführen. Vom zwölften Jahre an lässt sich dieselbe bei vernünftigen Kindern auch in Lokalanästhesie machen. Nicht selten sind wir genötigt, mit der vergrösserten Rachenmandel auch die beiden Gaumenmandeln zu entfernen, da diese oft ebenfalls Ursache der Mundatmung des Kindes sind, dagegen weniger schädlich auf das Gehörorgan einwirken, als erstere.

Der Erfolg der Operation ist meist ausgezeichnet, die Kinder blühen nach derselben oft förmlich auf; nicht selten aber tritt trotz gelungener Rachenmandeloperation bei vielen Kindern nicht sofort die normale Nasenatmung auf. Sie atmen, besonders wenn gleichzeitig die Nase in ihrer Entwicklung zurückgeblieben ist, oft aus alter Gewohnheit noch monatelang durch den Mund. In diesem Falle sind wir gezwungen, mit den Kindern während längerer Zeit systematisch Atemgymnastik zu treiben. Wir erreichen aber nur dann ein gutes Resultat, wenn diese unter pädagogischer Leitung mit Vorteil in rhythmischer Weise mit Metronom-Begleitung ausgeführt wird. Die Rachenmandeloperation wurde zum erstenmal von Professor Meyer in Kopenhagen ausgeführt, der dafür ein spezielles, ringförmiges Instrument empfahl. Sie stellt einen grossen Fortschritt in der Behandlung dieses Leidens dar, einen Fortschritt, der von allen Halsärzten der Welt anerkannt wird, und die den Erfinder durch Errichtung eines Denkmales geehrt haben.

Zur Behandlung der uneigentlichen Elemente im Mittelschulunterricht.

Referat, gehalten an der 26. Versammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer in Zug, 8. Oktober 1922.

Von Professor Dr. E. Mettler.

Das gründliche und ausführliche Referat von Prof. M. Grossmann über die uneigentlichen Elemente in der Geometrie zeigt uns die Wichtigkeit und die Bedeutung derselben in der Wissenschaft. Es lehrt uns von neuem, dass die Geometrie übersichtlich und einheitlich wird, sobald die uneigentlichen Elemente den eigentlichen gleichberechtigt zur Seite gestellt werden. Die metrischen Eigenschaften werden allgemeiner, verständlicher, sobald sie projektiv gedeutet werden können.

Ich möchte als ein Ziel des geometrischen Unterrichtes der Mittelschule das hinstellen, dass die Schüler mit den uneigentlichen Elementen so arbeiten können, als wären es eigentliche; dass sie damit konstruieren können und dass sie die Nützlichkeit, die Bequemlichkeit im Arbeiten mit ihnen einsehen lernen; dass wir die Schüler

so weit bringen, dass es ihnen Freude macht, wenn sie in den Aufgaben oder in den theoretischen Ableitungen mit den uneigentlichen Elementen zu tun haben.

Sie wissen, das Erreichen dieses Zieles ist nicht einfach; es braucht Zeit, Mühe und — viele, viele Beispiele. Doch wissen Sie auch, dass die meisten Schüler mit Interesse an die Anwendung der uneigentlichen Elemente herangehen, dass sie oft nur zu früh davon wissen wollen und den Lehrer durch Fragen drängen, die im Interesse des Unterrichtes nicht beantwortet werden können.

Ich möchte nun im Folgenden skizzieren, wie im Geometrieunterricht der Mittelschule auf dieses Ziel hingearbeitet werden kann, auf welche Weise wir ihm stetig näher kommen können. Ich durchgehe dabei die einzelnen Teile des Geometrieunterrichtes, wie er in den Lehrplänen der meisten unserer Oberrealschulen verlangt wird.

Es ist selbstverständlich, dass da, wo ein propädeutischer Kurs an der Mittelschule dem eigentlichen Geometrieunterricht voran geht, die Existenz von uneigentlichen Elementen verschwiegen bleibt. Die Parallele wird hier wohl am besten als Linie gleichen Abstandes eingeführt und erklärt.

Gerade der Beginn des Planimetrieunterrichtes, wie wir ihn in den meisten Lehrbüchern behandelt finden, stellt an den Lehrer die grössten Aufgaben. Die Bücher strotzen zu Anfang von Grundbegriffen, Grundsätzen, die der Schüler sicher nicht fassen, begreifen und behalten kann ohne von den folgenden Kapiteln Kenntnis zu haben. Lietzmann bemerkt hierzu richtig: „Man darf im mathematischen Schulbuche nicht gleich von vorn anfangen.“ Wir werden nicht viel Zeit verlieren, um über die Grundbegriffe und Grundsätze mit den Schülern zu reden, denn da es eben Grundsätze sind, sind sie auch dem Schüler leicht verständlich, aber erst dann, wenn sie in Verbindung mit den Lehrsätzen auftreten, d. h. wenn sie in den eigentlichen Lehrstoff hineingenommen, nach und nach serviert werden. Wir wollen dem Schüler die Elemente wie Punkt und Gerade in die Hand geben, wie der Lehrmeister dem Lehrling die Werkzeuge gibt, ohne lange Erklärung, ohne umständliche Definition.

Und nun zum Parallelenaxiom. Sie wissen, wie viel über dieses Axiom geschrieben wurde. Sie wissen auch, dass der Lehrer gewappnet in die Schule geht, in der er das Parallelenaxiom zum erstenmal berührt und veranschaulicht.

Wenn der propädeutische Kurs die Parallele als Linie konstanten Abstandes eingeführt hat, so werden wir hier diesen Begriff, diese Mittel der Veranschaulichung fallen lassen müssen, denn logischerweise können wir nicht vom Abstande zweier Geraden sprechen, bevor wir die Parallelen eingeführt haben.

Das Parallelenaxiom kann bekanntlich auf verschiedene Arten eingeführt werden, ausgehend z. B. vom Begriff der Richtung, von gleichen Wechselwinkeln, von der Winkelsumme im Dreieck. Am häufigsten finden wir wohl die Veranschaulichung durch die um einen Punkt sich drehende Gerade, welche eine andere nicht durch diesen

Punkt gehende Gerade schneidet, solange sie nicht parallel ist. Diese Veranschaulichung erfordert einen Grenzübergang.

Der Begriff: Zwei Parallele schneiden sich nicht, möchte ich im Planimetrieunterricht als Fundament besitzen und dort auch bei dieser Erklärung bleiben. Ich meine, im Planiemetrieunterricht sollen die uneigentlichen Elemente nicht eingeführt werden, sondern die Parallelen sollten durch die Tatsache des Nichtschneidens festgelegt werden. Dieser Begriff muss bei der Veranschaulichung des Parallelenaxioms herausgearbeitet werden.

Sie werden mir sagen, dass das schön und recht sei, dass es aber meistens anders vor sich gehe, oder wenigstens nicht so reibungslos. Denn der Lehrer ist nicht allein und die Schüler sollen ja mitarbeiten. Sie stellen Fragen; sie bemerken, dass die Parallelen als Schneidende aufgefasst werden können — was meistens vorkommt —, wobei aber der Schnittpunkt unendlich fern liegt. Ein zweiter bemerkt aber auch schon, dass es in diesem Falle zwei Parallele gibt, weil links und rechts auf der Geraden ein unendlich ferner Punkt existiert. Diese Erfahrungen sind auch von Ihnen zur Genüge gemacht worden. Auf welchem Wege können wir die Schwierigkeiten umgehen? Höfler schreibt darüber: „Machen wir, wie wir wollen, auf das Parallelenaxiom in irgend einer seiner vielen geometrischen äquivalenten Fassungen werden wir stossen. Zwar wird der Lehrer jeder Versuchung, hier schon die Schüler mit der Möglichkeit oder Wirklichkeit einer nichteuklidischen Geometrie bekannt zu machen, infolge handgreiflicher didaktischer Rücksichten aus dem Wege gehen, mag er auch für seine wissenschaftliche Person noch so sehr ein Verehrer einer nicht-euklidischen Geometrie sein.“ Es ist klar, dass man dem aus dem Wege gehen soll, aber wie sich verhalten, wenn die Schüler fragen und mit voller Berechtigung wissen wollen, ob es nur rechts oder links und rechts einen unendlich fernen Punkt gebe? Der Grenzübergang muss alle denkenden Schüler auf diese Frage führen. Sie wissen, dass hier ein Stück Willkür in unserem Geometrieunterricht herrscht. Es trennt sich hier die euklidische von der nichteuklidischen Geometrie, und solche Grenzgebiete bergen Schwierigkeiten. Warum sollen wir in diesem Augenblicke nicht den Schülern zugestehen, dass vielleicht andere Möglichkeiten, die wir aber in diesem Momente nicht berücksichtigen oder weiter untersuchen wollen, auch vorhanden sein können? Der Takt des Lehrers wird in diesem Augenblicke ausschlaggebend sein; das Machtwort des Lehrers: „Ihr habt nun dies zu glauben“, wird heute hoffentlich nicht mehr gesprochen. Lassen wir dieses Stück Willkür; auf die nichteuklidische Geometrie können wir nicht eingehen. Aber wir wollen sagen, dass man vielleicht auf diesem oder jenem Wege weiter gehen kann, dass man aber wohl die Geometrie herausgreifen wird, deren Folgerungen mit unserer Erfahrung übereinstimmen; dass wir einmal dieses Axiom annehmen, weil es unter den betrachteten Fällen das einfachste ist und später einsehen werden, ob es richtig oder teilweise falsch ist; dass die Folgerungen daraus uns die Richtigkeit oder Falschheit desselben

erweisen werden, je nachdem sie mit unsern Erfahrungen und auf andern Wegen gewonnenen Anschauungen übereinstimmen oder nicht. Die eine oder andere Bemerkung wird da, je nach dem Alter der Schüler, viel leichter zum Ziele führen. Bei jüngern wird schon die Andeutung auf das Unheimliche des Unendlichfernen genügen, bei ältern können wir sagen, dass man vernünftigerweise sich auf das Einfachste beschränken muss. Wir wollen kurz sein, aber wenn wir gezwungen werden, wollen wir die Willkür eingestehen.

Der Grundsatz: „Zwei Parallele schneiden sich nicht," soll den Planimetrieunterricht beherrschen; alle Sätze, die vom Schneiden handeln, werden diese Ausnahmestellung der Parallelen enthalten. Doch wir werden auch in diesem ersten grossen Teil der Geometrie auf unser Ziel lossteuern, wir werden auf die uneigentlichen, auf die unendlich fernen Elemente hinarbeiten müssen. Dies geschieht nun meines Erachtens am besten, indem wir so viel wie möglich Grenzübergänge durchführen, unsere geometrischen Figuren nicht als starre, sondern als bewegliche denken und mit ihnen als solchen arbeiten; dass wir z. B. die parallelen Kreistangenten als den Spezialfall der von einem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten besprechen, wo dieser Punkt in unmessbare Ferne weggerückt ist. Dabei wollen wir aber gleich auf die Vereinfachung der Konstruktion hinweisen; das Beispiel dient zugleich, klar zu machen, dass der Kreis mit fortwanderndem Mittelpunkt sich immer mehr einer Geraden nähert. Bei der Behandlung der verschiedenen speziellen Vierecke können wir darauf hindeuten, wie immer mehr metrische Eigenschaften, Halbierungen, spezielle Winkel entstehen, je mehr die Parallelen berücksichtigt werden. — Dann bietet auch das Kapitel über proportionale Strecken, und das Teilverhältnis häufig Gelegenheit, um auf diesen Gedanken hinzuweisen. Nehmen wir nur die äussere Teilung einer Strecke und ihren Zusammenhang mit der innern Teilung; einzig dem Mittelpunkt der Strecke entspricht bei der äussern Teilung kein eigentlicher Punkt. Durch Grenzübergang kommen wir aber gerade bei diesem Beispiel unserer späteren Einführung sehr nahe; es wird jenem doch ein Punkt und zwar nur ein Punkt entsprechen. — Die graphische Aufzeichnung des Teilverhältnisses und anderer Abhängigkeiten diene nicht nur der Entwicklung des Funktionsbegriffes, sondern auch diesem speziellen Begriffe der uneigentlichen Elemente.

Die eigentliche Einführung des Begriffes der uneigentlichen Elemente geschieht, so denke ich mir, in der Stereometrie. Die Zentralprojektion wird hier das geeignetste Mittel hiezu sein. Wie würden unsere Sätze gerade in diesem Teil umständlich, schwerfällig, wenn hier nicht im Sinne der Vereinfachung und Vereinheitlichung diese Begrifferweiterung eingeführt würde? Auch lassen sich hier die Begriffe der Richtung einer Geraden und der Stellung einer Ebene genau herausarbeiten. Wir sagen, eine Gerade hat nur einen unendlich fernen Punkt, eine Ebene nur eine unendlich ferne Gerade. Indem wir z. B. die Schüler nach der Sonne zeigen lassen,

werden wir klar machen, dass ein unendlich ferner Punkt durch eine Gerade bestimmt, es aber gleichgültig ist, wo diese Bestimmungsgerade gelegt wird, wenn sie nur zu der angenommenen parallel ist. Bekanntlich benützen wir ja diese Eigenschaft bei der Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes, fussend auf der Erkenntnis, dass jede Gerade durch den Nordpol parallel zur Erdachse ist. Hier mag auch Erwähnung finden der Zusammenhang des Strahlenbündels mit dem Parallelstrahlenbündel.

Ein Rückblick, ob bei dieser Begriffserweiterung die früher eingeführten Sätze ihre Gültigkeit beibehalten haben, muss sich logischerweise anschliessen. Man fragt sich z. B.: „Ist eine Ebene durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte auch jetzt noch bestimmt, da einer oder zwei dieser Punkte als uneigentliche angenommen werden?“ Wir zeigen damit, dass alle projektiven Sätze ihre Gültigkeit beibehalten und sie ausnahmslos gültig sind. Ebenso haben wir auf die eingeführten metrischen Sätze zurückzukommen und haben zu zeigen, dass Sätze wie: „Zwei Punkte bestimmen eine Strecke von bestimmter Länge“, „Durch einen Punkt lässt sich auf eine Gerade immer eine Senkrechte ziehen, nicht mehr gültig sind, sobald die Punkte als uneigentliche angenommen werden. Es ist also auf jene Sätze aufmerksam zu machen, die nur für eigentliche Elemente gültig sind und vielleicht als falscher Satz der zu nennen, dass jede Gerade zur unendlich fernen Geraden parallel ist. Mit den uneigentlichen Elementen ist also mit derselben Vorsicht wie mit den unendlichen Reihen umzugehen.

Der erste Teil der Stereometrie steht mit dem ganzen Kurs in darstellender Geometrie in engster Verbindung — oder sollte es wenigstens —, indem wir dort die Sätze herleiten, die wir hier später brauchen. Hier wie dort öffnet sich ein weites Feld, um den Begriff der uneigentlichen Elemente zu klären und anzuwenden. Benützen wir eine Aufgabe über Transversalen: Es soll durch einen beliebigen Punkt diejenige Gerade gelegt werden, die zwei windschiefe Geraden schneidet. Nehmen wir diesen Punkt in zweiter Linie als uneigentlichen an, so haben wir damit auch die Aufgabe gelöst, zu einer Geraden die parallele Transversale zu konstruieren. — Auch der Winkel zweier windschiefer Geraden kann mit den uneigentlichen Elementen in Verbindung gebracht werden, indem durch zwei uneigentliche Punkte immer ein ganz bestimmter Winkel gegeben ist. Wenn wir in der Stereometrie oder in der darstellenden Geometrie Konstruktionen an Pyramiden- und Prismenflächen durchführen, so wollen wir bei jeder Aufgabe über eine Pyramidenfläche die entsprechende über die Prismenfläche angeben. Analog müssen wir die Einfachheit der Lösung jeder Zylinderaufgabe gegenüber der entsprechenden Kegelaufgabe hervorheben. Als Beispiele nenne ich die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit diesen Flächen und die Bestimmung der Selbstschattengrenze bei paralleler oder zentraler Beleuchtung. Indem wir den Punkt, durch den wir die Tangentialebenen an eine Kegel- oder Zylinderfläche legen, als uneigentlich

annehmen, ist zugleich eine zweite Aufgabe gelöst, nämlich die Bestimmung der Tangentenebenen parallel einer Geraden usw. Indem wir die Zylinderfläche als spezielle Kegelfläche auffassen und die gegebenen Elemente auch als uneigentliche annehmen, erleichtern wir dem Schüler die Arbeit; wir bringen Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit in sein Begriffssystem. Betonen wir dabei aber auch den Unterschied der beiden Flächen in bezug auf Symmetrieverhältnisse! — Dann die vielen Aufgaben über die Kugel! Es sei hier nur auf die Kugel mit uneigentlichem Mittelpunkt hingewiesen, die manchmal verschiedene Aufgaben als dieselbe zu bezeichnen gestattet und so dem Schüler eine Erleichterung mehr bringt; denken wir an das Appolonische Problem!

Meistens schliesst wohl der Unterricht in darstellender Geometrie auf der Mittelschulstufe mit der systematischen Behandlung der ebenen Schnitte der Kreiskegelfläche, mit der kollinearen Verwandtschaft. Die Spezialfälle der Kollineation geben dem Schüler einen Begriff von der Wichtigkeit und Nützlichkeit des Begriffes der uneigentlichen Elemente. Hier, wo in jeder Aufgabe, auf Schritt und Tritt der Begriff der uneigentlichen Elemente an ihn herantritt, liegt das Feld, wo bei einiger Betonung das Befremdende der uneigentlichen Elemente, wenn davon überhaupt noch etwas geblieben ist, dem Schüler unbedingt genommen werden kann.

Ich will kurz zurückgehen und auf die andern Kapitel des mathematischen Unterrichtes zu sprechen kommen. — Als einen absolut zugehörigen Teil des geometrischen Unterrichtes haben wir das geometrische Zeichnen, wo dessen Ergebnisse bildlich angewendet und mit Hilfe der Darstellung eingeübt und vertieft werden. Wir werden hier nicht versäumen, graphische Darstellungen ausführen zu lassen und Hand in Hand mit dem wichtigen Begriff der Funktion durch Grenzübergänge auf die uneigentlichen Elemente hinführen, oder, wenn sie schon vermittelt sind, sie weiter übend besprechen.

Ich begrüsse es im Hinblick auf die Behandlung der uneigentlichen Elemente, dass wir in Zürich den zweiten Teil des Planimetrieunterrichtes, die sogenannte neuere oder synthetische Geometrie, erst im dritten Schuljahr durchnehmen, zu einer Zeit, wo die Schüler die uneigentlichen Elemente schon kennen. Ich begrüsse dies, weil jetzt die planimetrischen Betrachtungen mit Hilfe dieser Begriffserweiterung durchgeführt werden können und so dem Schüler Erleichterungen im Denken zu Teil werden, die früher nicht bekannt waren. — Rückblicke in diesem Sinne werden dem Schüler Befriedigung geben und werden ihm trotz des noch jugendlichen Alters Einsicht verschaffen in den konsequenten Aufbau der Geometrie.

In diesen zweiten Teil des Planimetrieunterrichtes gehört die Behandlung des Doppelverhältnisses, der harmonischen Punkte und Strahlen, des vollständigen Vierecks und Vierseits, der Polarität in bezug auf einen Kreis usw. Wie lassen sich hier die Aufgaben vereinheitlichen und vereinfachen durch die Benützung des Begriffes des Unendlich-Fernen! Wie wird hier dem Schüler alles einfacher,

indem die metrischen Aufgaben als projektive gedeutet werden können! Nur ein Beispiel: Der projektive Begriff des Doppelverhältnisses geht durch Einführung des unendlich Fernen in den metrischen Begriff des Teilverhältnisses über; der Mittelpunkt einer Strecke tritt in engste Verbindung zum unendlich fernen Punkt der die Strecke enthaltenden Geraden.

Wie weit der Lehrer in der sphärischen Trigonometrie den Unterschied zwischen der Geometrie auf der Kugel und der euklidischen hervorheben soll oder kann, will ich hier nicht ausführen.

In der analytischen Geometrie der Ebene besitzen wir besonders bei der Behandlung der Kegelschnitte ein weiteres Gebiet zur Betonung des unendlich Fernen. Sehr lohnend wird in dieser Hinsicht der Vergleich der Brennpunkteigenschaften der Ellipse mit denjenigen der Parabel sein. Z. B.: Die Tangente halbiert den Winkel der beiden Brennstrahlen; bei der Parabel sind die einen Brennstrahlen parallel der Achse, da der zweite Brennpunkt unendlich fern liegt. Dann der Ort der Fusspunkte der Lote von einem Brennpunkt auf die Kurventangenten, der bei der Ellipse umgeschriebener Kreis, bei der Parabel Scheiteltangente wird, da der zweite Scheitelpunkt unendlich fern liegt. Weitere Beispiele gibt die Behandlung von Pol und Polare bei den Kurven zweiten Grades.

Die Betonung und die Berücksichtigung der uneigentlichen Elemente zeigt uns aufs neue, wie diese die Konstruktionen und ebenfalls die Berechnungen vereinfachen. Bei Grenzübergängen werden wir Punkte ins Unendliche wandern lassen, indem wir bei der Behandlung der Asymptoten das x und y des wandernden Punktes unendlich gross werden lassen und $\lim y/x$ entweder bestimmen, wenn die Asymptotenrichtungen gesucht werden oder geben, wenn der Punkt in einer bestimmten Richtung ins Unendliche rückt.

Ich wollte Ihnen an einigen Beispielen zeigen, wie häufig wir im Unterricht Gelegenheit haben, auf die uneigentlichen Elemente hinzuweisen. Ich glaube, dass, wenn wir, sofern die Zeit es erlaubt, dieses Ziel immer im Auge behalten, wir auch erreichen, dass die Schüler mit den uneigentlichen Elementen arbeiten und denken können, dass das Fremde, das Unheimliche, wenn wir so sagen wollen, das dem unendlich Fernen zuerst anhaftet, zum Verschwinden gebracht werden kann. Wir wollen uns dabei bewusst bleiben, dass die uneigentlichen Elemente als eine Begriffserweiterung eingeführt wurden zum Zwecke der Vereinheitlichung und Vereinfachung der Sätze und Aufgaben. Wir wollen den geometrischen Figuren ihre Starrheit rauben, und wenn wir auf diese Art arbeiten, vermitteln wir dem Schüler nicht nur Erkenntnisse, sondern fördern auch zielbewusst und kräftig das funktionale Denken.