Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift

Band: 34 (1924)

Heft: 4

Artikel: Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung : 1. Teil

Autor: Scherrer, F. R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-788632

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Täuschung, die in der Hoffnung auf dieses Ende bestanden hat. Zwar liegt die Enttäuschung über die Unvollendbarkeit eines Weges, den man mit grössten Erwartungen angetreten, vorläufig noch wie eine Depression auf den Gemütern. Sie hält die Forscher von der werktätigen Arbeit ein wenig ab, wirft sie aus der Betriebsamkeit der Realienforschung in die Kontemplation und Spekulation. Nichtsdestoweniger wächst dem Menschen aus dieser Wendung zur Anerkennung der metaphysischen Elemente des Lebens eine neue Art Stärke zu, und diese Energie, aus der Selbstreinigung der Geister geboren, kommt letzten Endes auch den Wissenschaften zugute."

(Schluss folgt.)

Die schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion der schweizerischen Landesvermessung.[1])

Für die Behandlung in Mittelschulen dargestellt von F. R. Scherrer (Küsnacht bei Zürich).

Die Landesvermessung und die Kartographie liefern Stoff zu einer Reihe von Aufgaben, die nicht nur mathematisch interessant, sondern zufolge ihrer Bedeutung für die Kultur geeignet sind, die Aufmerksamkeit auch solcher Schüler zu fesseln, die keine Vorliebe für die Mathematik haben.

In allen Mittelschulen wird man sich im mathematischen Unterricht auf die Besprechung der wichtigsten Kartenprojektionen beschränken müssen, zu denen wohl in erster Linie die Projektionsmethoden gehören, die im eigenen Lande zur Anwendung gelangen.

Die offiziellen schweizerischen Kartenwerke wurden bisher nach der Bonneschen Projektionsmethode entworfen, so benannt nach dem französischen Ingenieur Rigobert Bonne, der von 1727 bis 1795 gelebt und diese Projektion zwar nicht erfunden, aber empfohlen und auch selbst verwendet hat. Auf der Dufourkarte im Massstab 1 : 100,000 wurde sie analog wie in Frankreich als modifizierte Flamsteedsche Projektion bezeichnet. Das Kartenbild wird nach dieser Projektionsmethode folgendermassen hergestellt:

Man wählt im Innern des darzustellenden Landes als Kartenmittelpunkt einen Punkt M, dessen geographische Koordinaten mit grosser Genauigkeit bestimmt werden können. (Bei uns ist das ein Punkt im Keller der alten Sternwarte in Bern, die jetzt

---

[1]) Vortrag, gehalten zu Bern am 7. Oktober 1923 in der Versammlung des Vereins schweizerischer Mathematiklehrer.

als tellurisches Observatorium dient. Der Punkt ist auf einem Bronce-Bolzen durch einen Kreuzstrich bezeichnet.) Im Punkt M zieht man an die Meridianellipse eine Tangente und bringt sie mit der verlängerten Erdachse in C zum Schnitt. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche, dessen Parallelkreis den Meridian von M in P_o schneidet, so trägt man auf einer Geraden eine Strecke $C'\ M'$ von der Länge CM ab, bestimmt alsdann, je nachdem P_o nördlich oder südlich von M liegt, entweder zwischen M' und C' oder auf der Verlängerung der Geraden $C'\ M'$ über M' hinaus einen Punkt P_o' so, dass sein Abstand von M' gleich dem Meridianbogen $M\,P_o$ wird, legt um C' als Mittelpunkt durch P_o' einen Kreis und trägt darauf einen Bogen $P_o'\ P'$ von der Länge des Parallelkreisbogens $P_o\ P$ von P' nach rechts oder links ab, je nachdem P östlich oder westlich von P_o liegt, dann ist P' das Kartenbild des Punktes P. Der durch den Kartenmittelpunkt M gehende Meridian bildet sich längentreu auf der Geraden $C'\ M'$ und die Parallelkreise längentreu auf Kreisen mit dem Mittelpunkt C' ab. Die Projektion ist infolgedessen flächentreu und daher nicht winkeltreu. Sie ergibt um so grössere Winkelverzerrungen, je weiter sich ein Punkt auf der Erdoberfläche gleichzeitig vom Meridian und Parallelkreis des Kartenmittelpunktes entfernt.[1]) Wer sich genauer über die Bonnesche Projektion informieren will, dem ist in erster Linie zu empfehlen: Otti, *Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre,* Aarau 1911, sodann Rosenmund, *Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung,* Bern 1903.

Bei unseren Schweizerkarten ergibt sich die grösste Winkelverzerrung bei Campocologno im Puschlav im Betrag von etwa $1^1/_3{}'$, während die Bestimmungen über die Triangulation vierter Ordnung vorschreiben, dass die Winkelfehler nicht über 11″ betragen sollen. Um dieser Forderung gerecht zu werden, haben die Kantone, denen die Ausführung der Triangulation vierter Ordnung obliegt, jeweils einen Punkt ihres Gebietes als Mittelpunkt einer Bonneschen Projektion angenommen, und ihre Dreiecksnetze in dieser dargestellt, wodurch sich kleine Winkelverzerrungen ergaben. Damit war aber der Nachteil verbunden, dass die Katasterpläne

---

[1]) Vergleiche: *Atlas für schweizerische Mittelschulen,* Winterthur 1910, Seite 7, Fig. 12.

aneinandergrenzender Kantone häufig nicht zusammenpassten, was dann umständliche Koordinatentransformationen nötig machte. Diesem Übelstande wurde im Jahre 1910 in der ganzen Schweiz dadurch abgeholfen, dass man zur Darstellung der Dreiecksnetze erster bis vierter Ordnung eine winkeltreue Projektion zu verwenden begann, die in engster Beziehung zur Mercatorprojektion steht, der man auch im schweizerischen Schulatlas Seite 124—127 begegnet.

Der Holländer Gerhard Mercator, der eigentlich Kremer hiess und von 1512—1594 lebte, betrachtete die Erdoberfläche als Kugelfläche und bildete sie winkeltreu auf eine Zylinderfläche ab, die die Erdkugel im Äquator berührt und dann nachträglich längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet wird.

Denken wir uns die Oberfläche des Erdsphäroides durch konforme Abbildung in eine Kugelfläche übergeführt, drehen dann die Achse der Zylinderfläche, welche die Kugel längs dem Äquator berührt, in der Meridianebene des Mittelpunktes unserer Schweizerkarte, bis der Berührungskreis durch diesen Punkt geht, und entwerfen auf der Zylinderfläche eine winkeltreue Projektion der Kugelfläche, so erhalten wir als Abwicklung der Zylinderfläche in eine Ebene das gegenwärtige Projektionssystem der Schweizerischen Landes- und Grundbuchvermessung, das die als schiefachsige winkeltreue Zylinderprojektion bezeichnet wird. Ob die zukünftigen Schweizerkarten auch in dieser Projektion entworfen werden, oder ob für diese die Bonnesche Projektion beibehalten wird, ist eine gegenwärtig noch unentschiedene Frage.

Die Rolle des Äquators bei der Mercatorprojektion spielt bei der schiefachsigen winkeltreuen Zylinderprojektion der durch den Kartenmittelpunkt der Schweizerkarten normal zu dessen Meridian gelegte Hauptkreis und die Rolle des Nordpols der auf der nördlichen Halbkugel liegende Schnittpunkt der Achse der Zylinderfläche, die die Kugelfläche längs dem genannten Grosskreis berührt. Weil sich die sphärischen Koordinaten eines Punktes in bezug auf diesen Kreis als Grundkreis aus sphärischen Koordinaten, die sich auf den Äquator beziehen, leicht berechnen lassen, so wird man die Koordinaten eines Kartenpunktes aus den sphärischen Äquator-Koordinaten des Originalpunktes bestimmen können, sobald man diese Berechnung für die Mercator-

projektion auszuführen imstande ist. Wir beschäftigen uns daher von jetzt an mit der letzteren.

Die Punkte des Äquators bilden sich in sich selbst ab. Die Projektion eines vollen Meridiankreises besteht aus den beiden Erzeugenden, worin dessen Ebene von der Zylinderfläche geschnitten wird. Weil die Projektion winkeltreu ist, so sind die Bilder aller Parallelkreise Kreise der Zylinderfläche. Jedes beliebig grosse oder kleine Stück des Parallelkreises in der geographischen Breite α wird also durch die Abbildung im Verhältnis $\frac{1}{\cos \alpha}$ vergrössert. Es sei nun P ein Punkt der Erdkugelfläche in der geographischen Breite α, Q ein Punkt auf dem Meridian, R ein Punkt auf dem Parallelkreis von P, und es seien alle drei Seiten des Dreiecks PQR so klein, dass der Breitenunterschied von P und Q bei der Rechnung ausser Betracht fällt, dann wird bei der Abbildung die Seite PR im Verhältnis $\frac{1}{\cos \alpha}$ vergrössert; folglich muss, damit das projizierte Dreieck dieselben Winkel erhält, wie das ursprüngliche, auch die Seite PQ bei der Abbildung im Verhältnis $\frac{1}{\cos \alpha}$ vergrössert werden. Die Länge des Bildes eines Bogenelementes PQ eines Meridians ergibt sich demnach, indem man (Fig. 1) durch P eine Parallele zur Erdachse ON zieht und sie mit dem Erdradius OQ in Q^* schneidet; das Bild von PQ hat dann, weil der Winkel $QPQ^* = \alpha$ ist, die Länge PQ^*. Bedeutet A den Schnittpunkt des Meridians mit dem Aequator, so wird das Bild AP' des Meridianbogens AP erhalten, indem man AP in unendlich viele unendlich kleine Bogenstücke zerlegt, für jedes diese Konstruktion ausführt und dann die erhaltenen Strecken aneinander fügt, was sich praktisch nicht durchführen lässt. Es muss daher das Bild von AP auf dem Wege der Rechnung ermittelt werden.

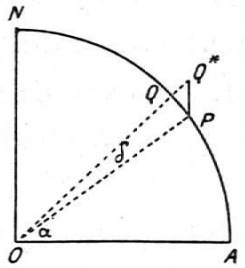
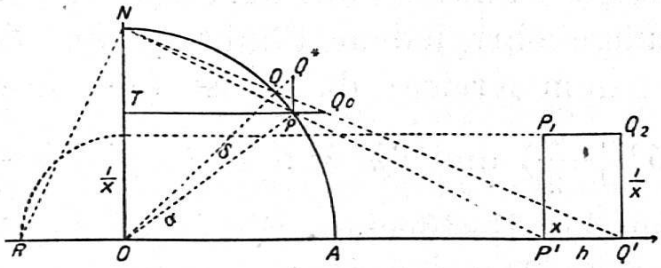


Fig. 1.

Bezogen auf den Kugelradius als Längeneinheit wird die Länge des Bildes von AP dargestellt durch $\int_0^{\text{arc}\,\alpha} \frac{dx}{\cos x}$. Um es auf möglichst elementarem Wege zu bestimmen, ziehen wir durch P (Fig. 2) eine Parallele zum Erdradius AO, die die Erd-

achse ON in T schneidet, verbinden P und Q mit dem Nordpol N, dann schneidet NQ die Gerade TP in Q_0, ferner wird die Gerade OA von NP in P' und von NQ in Q' geschnitten. Die geographische Breite von P sei wiederum α und die von

Fig. 2.



Q $\alpha+\delta$, wo δ verschwindend klein gedacht ist. Das Bogenelement PQ hat also die Masszahl $\operatorname{arc}\delta$ und sein Bild die Länge $\frac{\operatorname{arc}\delta}{\cos\alpha}$.

Ferner ist $\angle PNO = 45^0 + \frac{\alpha}{2}$, $\angle QNO = 45^0 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}$,

$$\text{daher } \angle NQ_0T = 45^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Der Winkel PQQ_0 ist gleich dem Winkel, den die Tangente in Q mit der Sehne QN bildet, über der der Zentriwinkel $90^0 - \alpha - \delta$ steht, daher auch gleich $45^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$; somit ist das Dreick QPQ_0 gleichschenklig, und daher $PQ_0 = \operatorname{arc}\delta$, überdies $PT = \cos\alpha$. Es verhält sich nun $P'Q' : OP' = PQ_0 : TP$ also auch, wenn man die Masszahl von $P'Q'$ mit h und die von OP' mit x bezeichnet

$$h : x = \operatorname{arc}\delta : \cos\alpha.$$

Demnach ist

$$h \cdot \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{arc}\delta}{\cos\alpha}.$$

Errichtet man auf NP in N eine Normale, die die Gerade OA in R schneidet, so hat die Strecke OR die Masszahl $\frac{1}{x}$. Zieht man also um O durch R einen Kreis, der ON in S trifft, legt durch diesen Punkt eine Parallele zu OA, welche die durch P' und Q' gelegten Parallelen zu ON in P_1 und Q_2 schneidet, so hat das Rechteck $P'Q'Q_2P_1$ die Flächenmasszahl $h \cdot \frac{1}{x}$, die gleich $\frac{\operatorname{arc}\delta}{\cos\alpha}$ ist. Dieses Rechteck hat also, wenn δ verschwin-

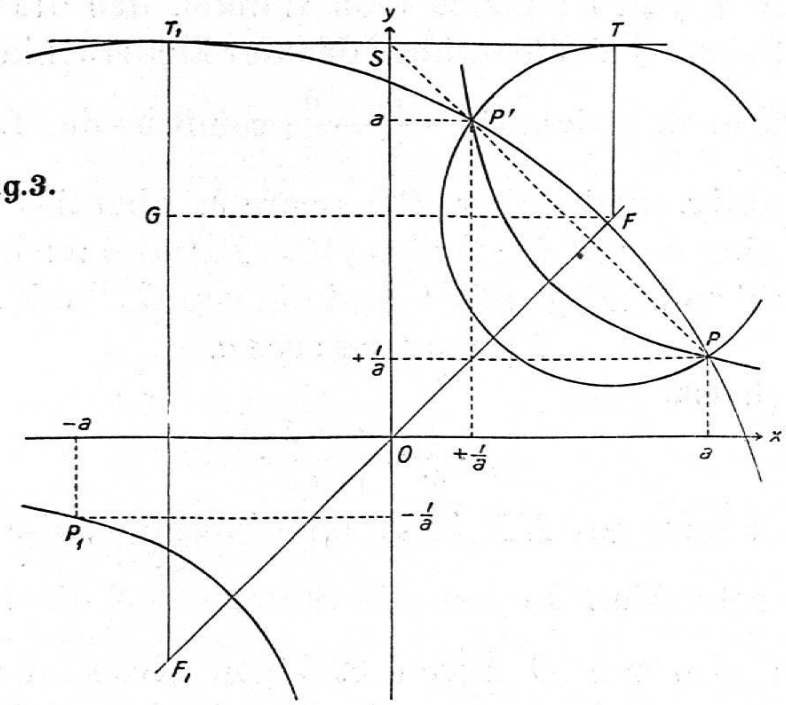
dend klein ist, bezogen auf das Quadrat des Kugelradius als Flächeneinheit, dieselbe Masszahl wie das Bild des Bogenelementes PQ, bezogen auf den Kugelradius als Längeneinheit. Jedem Punkt P auf dem rechts von der Geraden ON liegenden Halbkreis ist ein Punkt P' auf dem Halbstrahl OA zugeordnet und auch umgekehrt jedem Punkt P' auf dem letzteren ein Punkt P auf dem Kreise; dabei ist die Masszahl x von OP' gleich $\operatorname{tg}(45^0 + \frac{\alpha}{2})$ und die von $P'P_1$ gleich $\frac{1}{x}$.

Die Höhe des Rechteckes $P'Q'Q_2Q_1P_1$ hängt also allein von der Lage des Punktes P auf dem Kreise, dagegen die Basis und die Fläche des Rechteckes auch von der Länge des Bogenstückes PQ ab und verschwindet mit diesem. Wählen wir OA als positive x- und ON als positive y-Achse eines Koordinatensystems und bezeichnen die Koordinaten von P_1 mit x und y, so ist, wo auch P auf dem Halbkreis liegen mag, stets

$$y = \frac{1}{x}.$$

Durchläuft P den Halbkreis, dann bewegt sich P_1 auf der

Fig.3.



Kurve, welche die Funktion $y = \frac{1}{x}$ graphisch darstellt. Für unsere Zwecke ist es nicht unbedingt nötig, diese Kurve zu kennen; mit Rücksicht auf die Bedeutung, die der Funktion $\frac{1}{x}$ zukommt, wollen wir sie jedoch bestimmen.

Hat der Kurvenpunkt P in der Fig. 3 die Abszisse a und die Ordinate $\frac{1}{a}$, so gehört der Punkt P' mit der Abszisse $\frac{1}{a}$ und der Ordinate a der Kurve ebenfalls an und liegt symmetrisch zu P in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels der positiven Koordinatenachsen; überdies ist auch der Punkt P_1 mit den Koordinaten $-a$ und $-\frac{1}{a}$ ein Punkt der Kurve; sie ist folglich auch zentr.-symmetrisch in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt O. Der Schnittpunkt S der Geraden PP' mit der y-Achse hat von P den Abstand $a\sqrt{2}$ und von P' den Abstand $\frac{1}{a}\sqrt{2}$. Wenn man also durch P und P' einen Kreis legt, so haben die von S daran gelegten Tangenten immer die Masszahl $\sqrt{2}$. Legen wir durch S eine Parallele zur x-Achse und konstruieren die beiden durch P und P' gehenden Kreise, die diese Gerade berühren, so haben die Abstände ihrer Berührungspunkte T und T_1 von S die Masszahl $\sqrt{2}$. Die Mittelpunkte F und F_1 der beiden Kreise liegen auf der genannten Symmetrieachse im Abstand $\sqrt{2}$ von der y-Achse, haben daher eine feste Lage. Ziehen wir durch F eine Parallele zur x-Achse, die F_1T_1 in G schneidet, so ist F_1G gleich dem Unterschied der beiden Kreisradien, also auch gleich dem Unterschied der Abstände des Kurvenpunktes P von F_1 und F. Dieser Unterschied ist somit konstant und daher die graphische Darstellung der Funktion $\frac{1}{x}$ eine Hyperbel, die die Koordinatenachsen zu Asymptoten und die Punkte mit den Koordinaten $1_1 1$ und $-1_1 -1$ zu Scheiteln hat.

(Schluss folgt.)

Gesamtunterricht oder Fächertrennung?

Die staatliche Stelle für Naturdenkmalpflege in Preussen hat im April d. J. eine Studiengemeinschaft für wissenschaftliche Heimatkunde gegründet, die einen unerwartet grossen Kreis von Männern und Frauen aus den verschiedensten Berufsschichten vereinigt hat. Zur Eröffnung der Studiengemeinschaft hielt Prof. Eduard Spranger einen Vortrag über den Bildungswert der Heimatkunde. Er ist jetzt veröffentlicht und damit weiteren Kreisen zugänglich gemacht worden. Der Vortrag ist deshalb von grösster Bedeutung, weil in ihm ein Bildungsprogramm entwickelt wird, das Wissenschaft und Bildung