Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x

Autor(en): **Scherrer, F.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **9 (1890)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-593833

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x.

Von

F. R. Scherrer,

Lehrer der Mathematik an der thurg. Kantonsschule.

Die Exponentialreihe

$$f_{(z)} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

convergirt und ist daher eine stetige Funktion der Variabeln z für jeden endlichen sowohl reellen als auch complexen Wert der letzteren; überdies ist

$$f_{(z_1)} \cdot f_{(z_2)} = f_{(z_1 + z_2)}.$$

Die Summen der beiden unendlichen Reihen

$$f_{(iy)} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\cdots$$

und

$$f_{(-iy)} = 1 - iy - \frac{y^2}{2!} + i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\cdots$$

sind conjugirt complexe Grössen; daher ist, wenn man ihren Modul mit r bezeichnet

$$r^2 = f_{(iy)} \cdot f_{(-iy)} = f_{(0)}$$

d. h.

$$r = 1;$$

mithin kann

$$f_{(iy)} = \cos x + i \sin x$$

10741
126528

und insbesondere

$$\cos x = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sin x = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

gesetzt werden, wobei x das analytische Mass eines Kreisbogens darstellt, welcher für jeden reellen Wert von y so gewählt werden mag, dass

$$0 \leqq x < 2\pi$$

ist. Man erhält nun, wenn y zwischen 0 und 1 liegt, positive Werte für $\cos x$ und $\sin x$, also ist in diesem Falle x ein Bogen des ersten Quadranten, welcher mit y zugleich verschwindet.

Da $f(i\frac{p}{q}y)$, wenn p und q zwei relative Primzahlen sind, eine der q^{ten} Wurzeln von $fipy$ ist, so hat man

$$f(i\frac{p}{q}y) = \left(\cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x\right)\left(\cos\frac{k\,2\pi}{q} + i\sin\frac{k\,2\pi}{q}\right)$$

wo k eine noch zu bestimmende ganze Zahl bedeutet, welche der Ungleichheit genügt

$$0 \leqq k < q$$

und welche ausserdem zufolge der Stetigkeit von $f(i\frac{p}{q}y)$ nicht von y abhängen kann. Lässt man, um dieselbe zu ermitteln, y allmälig gleich 0 werden, so nehmen nach dem oben Gesagten die linke Seite und der erste Faktor der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1 an; mithin ist der zweite Faktor der rechten Seite ebenfalls gleich 1, also

$$k = 0$$

und

$$f(i\frac{p}{q}y) = \cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x.$$

Hieraus kann man, gestützt auf die Stetigkeit der hier in Betracht fallenden Funktionen, auf die Gültigkeit der Gleichung

$$f_{(iny)} = \cos nx + i\sin nx$$

für jedes reelle n schliessen; d. h. es ist x zu y proportional, so dass man

$$y = \lambda x$$

setzen kann, wo λ eine Constante ist. Der Wert der letzteren ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, dass

$$f(i\lambda x) = \cos x + i \sin x,$$

daher insbesondere

$$\sin x = \lambda x - \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \frac{\lambda^5 x^5}{5!} - \frac{\lambda^7 x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\frac{\sin x}{x} = \lambda - \frac{\lambda^3 x^2}{3!} + \frac{\lambda^5 x^4}{5!} - \frac{\alpha^7 x^6}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

ist. Nähert sich nämlich x ohne Ende der Grenze 0, so gelangt die linke Seite der letzten Gleichung zu dem Grenzwert 1, während die rechte Seite gleich λ wird; also ist

$$\lambda = 1$$

und man hat

$$f_{(ix)} = \cos x + i \sin x,$$

woraus folgt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \quad .$$

Für den Argumentwert π erhält man hieraus

$$f(i\pi) = -1;$$

und

$$f^2(i\pi) = f(i\,2\pi) = +1,$$

folglich ist

$$f(i\,[x + 2k\pi]) = f(ix)$$

Definirt man also die Potenz e^{ix} durch die Gleichung

$$e^{ix} = f_{(ix)},$$

so erhält man für jeden reellen Wert von x

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

März 1884.