Zeitschrift: Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft
Herausgeber: Thurgauische Naturforschende Gesellschaft
Band: 35 (1950)

Artikel: Betrachtungen zur Axiomatik der affinen Geometrie
Autor: Kaufmann, Karl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-593787

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Betrachtungen zur Axiomatik der affinen Geometrie

Von Dr. Karl Kaufmann, Frauenfeld

In der Mathematik unterscheidet man zwischen Sätzen, welche sich durch logische Kombination bekannter Beziehungen herleiten lassen, den Lehrsätzen, und solchen, welche nicht bewiesen werden können, den Grundsätzen oder Axiomen.

Im folgenden befassen wir uns speziell mit den Grundsätzen der Geometrie. In der klassischen (euklidischen) Geometrie lassen sich folgende Gruppen unterscheiden:[1]

I. Verknüpfungsaxiome, z. B. „Durch zwei Punkte ist eindeutig eine Gerade bestimmt."

II. Anordnungsaxiome, z. B. „Zu zwei Punkten einer Geraden gibt es stets einen dritten Punkt, welcher zwischen den beiden Punkten liegt."

III. Kongruenzaxiome.

IV. Parallelenaxiom „Durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden a gibt es in der durch A und a bestimmten Ebene eine und nur eine Gerade, die durch A geht und a nicht schneidet."

V. Stetigkeitsaxiome.

Die Aufgabe der Grundlagenlehre (Axiomatik) ist die Formulierung dieser Axiome und der Aufbau der Geometrie auf denselben. Dabei ist das Hauptziel die analytische Geometrie, das heißt der Nachweis, daß jedem Punkt reelle Zahlen als Koordinaten zugeordnet werden können, und daß durch das Rechnen mit reellen Zahlen jeder geometrische Konstruktionsschritt ersetzt und jede geometrische Beziehung auf ihre Richtigkeit geprüft werden kann.

Durch Abändern oder Weglassen von Axiomen erhalten wir außer der

---

[1] Hilbert, D. „Grundlagen der Geometrie", Leipzig und Berlin 1936 (7. Aufl.).

10741

euklidischen auch andere Geometrien. Am bekanntesten sind die nicht-euklidischen, die durch Abänderung von IV entstehen, von denen aber an dieser Stelle weiter nicht die Rede sein soll.[1] Vielmehr befassen wir uns speziell mit der affinen Geometrie, die im wesentlichen nur auf den Gruppen I und IV basiert, und in der nur Sätze ohne metrische Eigenschaften wie Größe einer Strecke oder eines Winkels auftreten. Beispiele solcher Sätze sind:

Satz von Désargues: Sind von zwei Dreiecken ABC, A'B'C', die Seiten paarweise parallel $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \| \overline{C'A'}$, so schneiden sich die Verbindungsgeraden AA', BB', CC' in einem Punkt S (Fig. 1).

Satz von Pappus-Pascal: Liegen drei Punkte P_2, P_4, P_6 auf einer Geraden a, drei weitere Punkte P_1, P_3, P_5 auf einer Geraden b, und sind die Paare $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_4P_5}$ und $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_5P_6}$ von Verbindungsgeraden parallel, dann auch das Paar $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_6P_1}$ (Fig. 2).

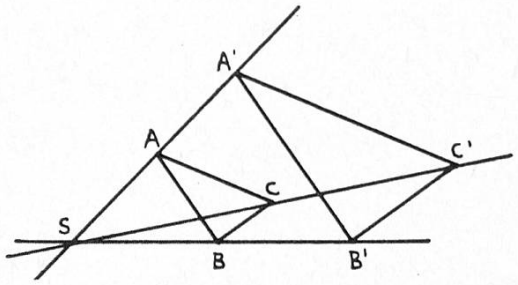

Fig. 1

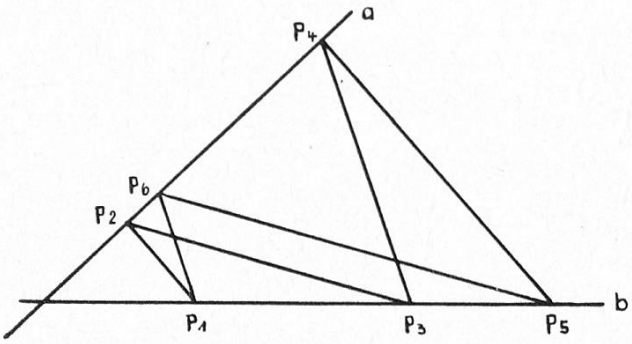

Fig. 2

Trotz des kleinen axiomatischen Fundamentes können auch in dieser Geometrie den Punkten Koordinaten zugeordnet und alle Beziehungen mit analytischen Methoden untersucht werden. Die Koordinaten sind allerdings nicht mehr unbedingt reelle Zahlen, sondern Elemente von allgemeineren Zahlsystemen (sog. Schiefkörpern oder Körpern), in welchen aber auch die arithmetischen Grundgesetze für Addition und Multiplikation, wie $a + b = b + a$, $(a + b).c = a.c + b.c$ usw. Gültigkeit besitzen. Jeder geometrische Satz tritt nun als Folge von arithmetischen Sätzen auf, nämlich derjenigen, welche im Verlaufe seines (analytischen) Beweises benutzt werden. Da die analytische Geometrie allein auf geometrischen Axiomen aufgebaut werden kann, sind umgekehrt auch die arithmetischen Sätze für die Elemente der „Koordinatenmenge" Konsequenzen aus rein geometrischen Aussagen. Die Frage, welche geometrischen Sätze verantwortlich sind für jedes einzelne der arithmetischen Grundgesetze, ist im Rahmen der ebenen Geometrie

---

[1] Siehe z. B. Gonseth und Marti „Leitfaden der Planimetrie", Zürich 1936.

hauptsächlich von Reidemeister[1] vollständig abgeklärt worden. Es handelt sich dabei durchwegs um Schnittpunktssätze, teils um Spezialfälle des Désargues'schen, teils um noch einfachere Sätze und um den Satz von Pappus-Pascal. Bei Hilbert[2] findet sich bereits früher das zusammenfassende Resultat, daß diese sämtlichen Grundgesetze mit Ausnahme des Vertauschungsgesetzes der Multiplikation $a.b = b.a$ aus dem Désargues'schen Satz folgen, dieses letzte hingegen aus dem Pappus-Pascal'schen Satz.

Der Aufbau der affinen Geometrie kann nun in folgenden Schritten stattfinden:

1. Aufstellen der Axiome,
2. Geometrische Einführung von Koordinaten,
3. Herleitung der geometrischen Sätze, aus welchen die Rechengesetze für die Koordinaten folgen,
4. Beweis der weiteren Sätze durch Rechnung (analytische Geometrie).

Unter den Axiomen für die ebene Geometrie befinden sich auch die Sätze von Désargues und Pappus-Pascal.

Der Aufbau der räumlichen affinen Geometrie geschieht in der Regel durch Erweiterung der ebenen Geometrie, wobei man sich auf die dort bewiesenen Sätze stützen kann. Diesem sehr natürlich erscheinenden Verfahren haften doch auch gewisse Nachteile an. Da sich der Satz von Désargues im dreidimensionalen Raume aus den Axiomen der Gruppen I und IV beweisen läßt, erscheint die räumliche Geometrie in dieser Hinsicht einfacher als die ebene, indem ein Axiom wegfällt, das im System etwas störend wirkt, da es eine nicht unmittelbar evidente Aussage enthält. Schon aus diesem Grunde sollte versucht werden, den axiomatischen Aufbau direkt im Raume vorzunehmen. Abgesehen davon bleibt die Frage offen, welche Reidemeister entsprechend in der Ebene untersucht hat, die Frage nach den zu den arithmetischen Axiomen gehörigen Sätzen der räumlichen Geometrie.

Mit dieser Lücke in den früheren Untersuchungen hat sich der Schreibende in seiner Promotionsarbeit[3] befaßt. Durch Betrachtung von Ebenensystemen (Geweben), bestehend aus vier Parallelenscharen, zwei Ebenenbüscheln und den Parallelen zu den Ebenen eines Büschels, und der durch Schnitt solcher Ebenen entstehenden Geradenscharen konnten den arithmetischen Axiomen folgende geometrischen Sätze zugeordnet werden:

1. Haben zwei Paare von parallelen Geraden drei Schnittpunkte, so existiert noch ein vierter.

---

[1] Reidemeister, K. „Grundlagen der Geometrie", Berlin 1930.

[2] Vgl. Fußnote 1.

[3] Kaufmann, K. „Gewebetheoretische Untersuchungen zur Axiomatik der dreidimensionalen affinen Geometrie", Diss. ETH, Zürich 1949.

2. Seien a_1, a_2 zwei Geraden durch einen Punkt A, b_1, b_2 zwei Parallelen: dann folgt aus der Existenz dreier von A verschiedener Schnittpunkte $a_1 \times b_1$, $a_1 \times b_2$, $a_2 \times b_1$ diejenige von $a_2 \times b_2$.

3. *Satz der neun Punkte.* Seien a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 zwei Tripel von Geraden, a_i parallel zu einer Ebene α, b_j parallel zu einer Ebene β: dann folgt aus der Existenz von acht Schnittpunkten $a_i \times b_j$ die des neunten. (Fig. 3)

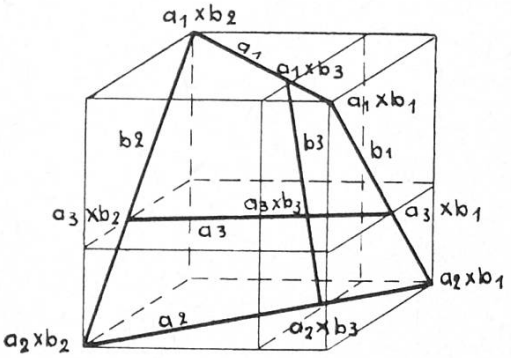

Fig. 3

Dem Satz der neun Punkte entspricht das kommutative (Vertauschungs-) Gesetz der Multiplikation. Er kann anstelle des Satzes von Pappus-Pascal ins Axiomensystem aufgenommen werden.

Zum Abschluß folgt ein geometrischer Beweis des Satzes von Pappus-Pascal auf Grund des Satzes der neun Punkte mit Hilfe reiner Verknüpfungs- und Parallelitätsbeziehungen, welche aus den üblichen Axiomen der Gruppen I und IV hergeleitet werden können.

Voraussetzung: Seien a, b zwei sich schneidende Geraden, P_2, P_4, P_6 Punkte auf a; P_1, P_3, P_5 Punkte auf b, so daß die Geraden $\overline{P_1P_2} \| \overline{P_4P_5}$ und $\overline{P_2P_3} \| \overline{P_5P_6}$.

Behauptung: $\overline{P_3P_4} \| \overline{P_6P_1}$.

Beweis: Sei O ein Punkt außerhalb der Ebene (a, b), m_5 die Gerade $\overline{OP_5}$, n_4 die Gerade $\overline{OP_4}$. Seien ferner m_1, m_3 Transversalen von n_4 und b durch P_1 resp. P_3 in den Ebenen parallel zu m_5 und a; n_2, n_6 Transversalen von m_5 und a durch P_2 resp. P_6 in Ebenen parallel zu n_4 und b. Aus dem Satz der neun Punkte für die Geraden a, m_1, m_5; b, n_2, n_4 folgt die Existenz des Schnittpunktes $A = m_1 \times n_2$, und entsprechend erhalten wir Punkte $B = m_3 \times n_2$, $C = m_1 \times n_6$, $D = m_3 \times n_6$. Seien ferner $m_1 \times n_4$ mit E, $m_5 \times n_2$ mit F bezeichnet (Fig. 4).

Da $\overline{DF}$ mit $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_5P_6}$ je in einer Ebene liegt, und $\overline{P_2P_3} \| \overline{P_5P_6}$, ist $\overline{DF} \| \overline{P_2P_3}$; ebenso finden wir $\overline{EF} \| \overline{P_1P_2}$. Folglich sind die Ebenen DEF und (a, b) parallel. Die Ebene (m_1, n_6) schneidet (a, b) in $\overline{P_6P_1}$, DEF in $\overline{DE}$, und es ist deshalb $\overline{DE} \| \overline{P_6P_1}$; analog finden wir $\overline{DE} \| \overline{P_3P_4}$, also schließlich $\overline{P_3P_4} \| \overline{P_6P_1}$, q. e. d.

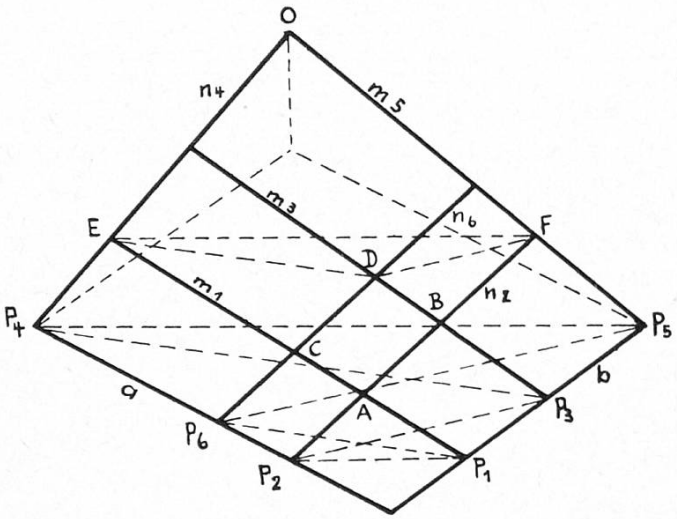

Fig. 4