Zeitschrift: Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft

Herausgeber: Thurgauische Naturforschende Gesellschaft

Band: 43 (1979)

Artikel: Die Bedeutung der Potenzfunktion für die Beschreibung von Lebensvorgängen

Autor: Reich, Theodor

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-593890

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Bedeutung der Potenzfunktion für die Beschreibung von Lebensvorgängen

Theodor Reich

In der Biologie nimmt die Exponentialfunktion

$$y = k \cdot e^x$$

eine zentrale Bedeutung ein. Immer dort, wo «lebendiges Wachsen» vorhanden ist, wo das neu Dazugekommene für die künftige Vermehrung auch verantwortlich wird, wo die Zunahme mit «Zins und Zinseszinsen» geschieht, können wir das Geschehen mit einer Exponentialfunktion beschreiben. Vermuten wir umgekehrt, noch unbekannte Zusammenhänge mit einer Exponentialfunktion erfassen zu können, denken wir bei der Deutung dieser Abhängigkeiten an ein «lebendiges Wachsen».
Demgegenüber wird die Potenzfunktion zu Unrecht in den toten Bereich der Physik verwiesen. Hat sie für die Beschreibung von Lebensvorgängen wirklich keine Bedeutung? Wir begegnen in der Biologie sogenannten «doppelt logarithmischen» Funktionen. Es handelt sich dabei aber nicht um Funktionen der Art

$$y = k \cdot \lg \lg x,$$

wie man dem Namen nach vermuten könnte. Nein, die Koordinatenpaare (x_i/y_i) der zur Untersuchung stehenden Abhängigkeit werden in sogenanntes «doppelt logarithmisches Papier» eingetragen. Dieses ist in Papeterien erhältlich und stellt ein rechtwinkliges Koordinatensystem dar, dessen beide Koordinatenskalen logarithmisch eingeteilt sind. Ordnen sich die durch unsere Koordinatenpaare bestimmten Punkte auf einer Geraden an, gilt

$$\lg y = m \cdot \lg x + q$$

Es handelt sich dabei im praktischen Beispiel nicht um eine geometrisch exakte Gerade, sondern um eine Gerade, die mit einer Regressionsrechnung «gemittelt» wird. Nennen wir noch $q = \lg q^*$, erhalten wir

$\lg y = m \cdot \lg x + \lg q^*$ und formen die rechte Seite um zu
$= \lg (q^* \cdot x^m)$

damit wird

$y = q^* \cdot x^m$, also im Prinzip $y = k \cdot x^m$

Das ist eine Potenzfunktion mit reellem Exponenten. In Abbildung 1 haben wir für das Beispiel $k = 5$ für alle möglichen reellen m das sich ergebende Geradenbüschel in doppelt logarithmischem Koordinatensystem dargestellt. Für jedes m geht die Gerade durch den Punkt: $x = 1$; $y = k\ (= 5)$. Wir erkennen: Die Steigung einer Geraden in diesem System bestimmt direkt den Exponenten der ihr entsprechenden Potenzfunktion.
Das «doppelt logarithmische» Koordinatensystem lässt uns eine Potenzfunktion auf einfachste Art ablesen: *Der zu $x = 1$ gehörende y-Wert ist die Konstante k, und die Steigung der Geraden entspricht dem Exponenten m.*
Die Potenzfunktion ist auf diese Weise nur für positive Argumente zugänglich. Dies schränkt ihre Anwendungsmöglichkeit auf Lebensvorgänge nicht ein, weil beobachtete Messwerte immer als positive Argumente in Rechnung gesetzt werden können.

Wir erkennen, dass die Potenzfunktion zwei wichtige Spezialfälle beinhaltet. Für

$m = +1$: $y = k \cdot x$

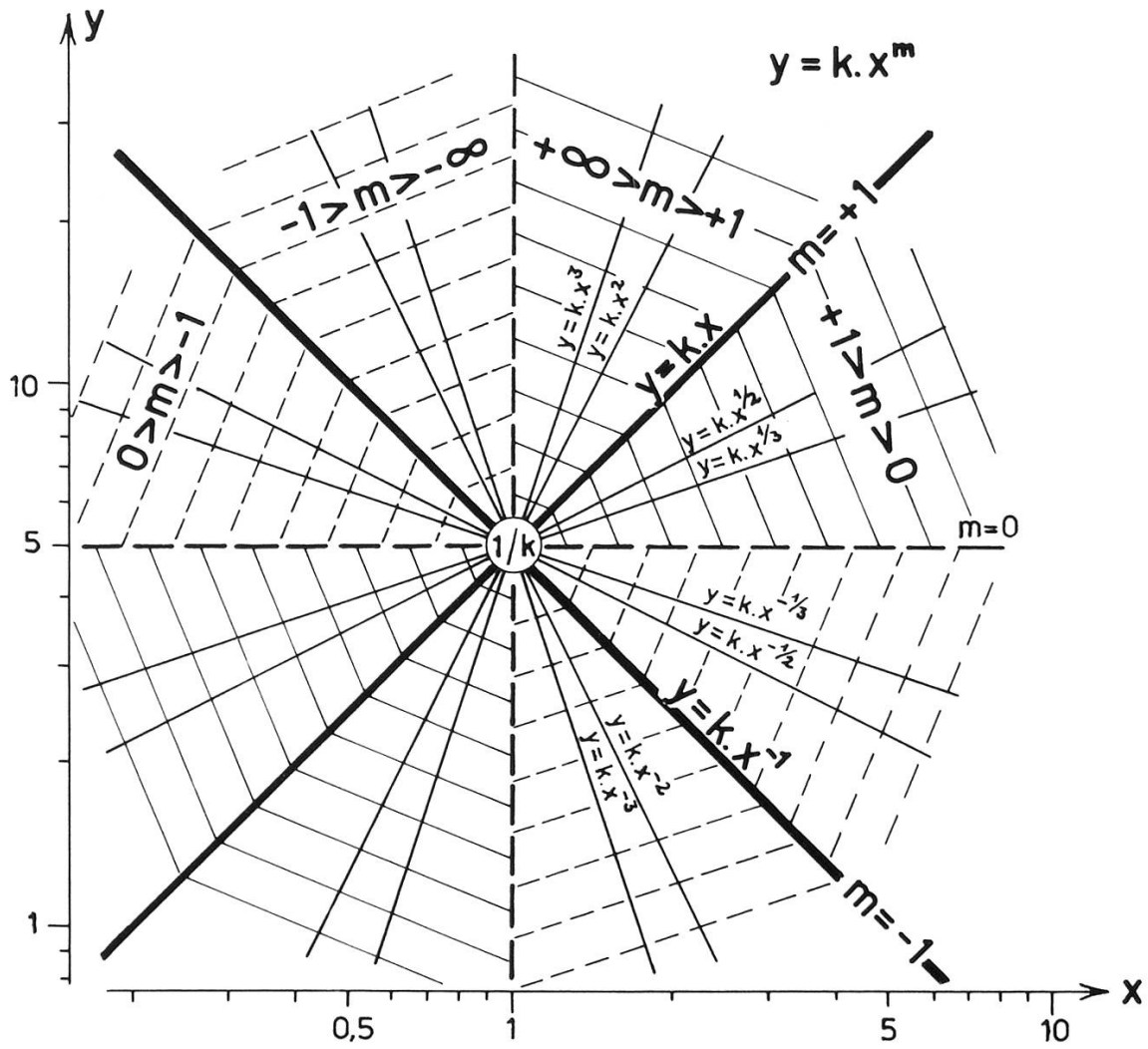

Abbildung 1:
Die Potenzfunktion im doppelt logarithmischen Koordinatensystem.

beschreibt sie die Proportionalität (direkter Dreisatz). Für

$m = -1$: $y = k \cdot x^{-1}$ oder $x \cdot y = k$

beschreibt sie die Reziprozität (umgekehrter Dreisatz oder umgekehrte Proportionalität). Es zweifelt niemand, dass diese beiden Beziehungen als die fundamentalsten unter den mathematischen Funktionen auch für die Beschreibung von Lebensvorgängen eine grosse Rolle spielen. Weniger bekannt ist, dass auch die allgemeine Potenzfunktion mit irgendeinem reellen Exponenten m für die Beschreibung von biologischen Zusammenhängen geeignet ist. Sie muss der Exponentialfunktion, die das natürliche Wachstum (mit Zins und Zinseszinsen) beschreibt, nicht nachstehen.

Als erstes Beispiel zeigen wir die Abhängigkeit zwischen Prothrombinzeit («benötigte Zeit für die Blutgerinnung») in Sekunden und Prothrombinindex in Prozenten (100 % = unverdünntes Blut). Zur Anwendung kam die einphasige Methode nach *Quick-Fiechter* (1) mit Kapillarblut aus der Ferse des Neugeborenen. Dabei wurde eine selbst hergestellte Thrombokinase aus Menschenhirn mit einer Normalzeit von 10,5 bis 11 Sekunden gebraucht. Verdünnungen von Erwachsenengesamtblut mit einer 0,2prozentigen Fibrinogenlösung ergaben eine aus 12 Reihen bestimmte Standardkurve. Über die Messwerte wurde im doppelt logarithmischen System eine Regressionsgerade gelegt. Unsere Kurve

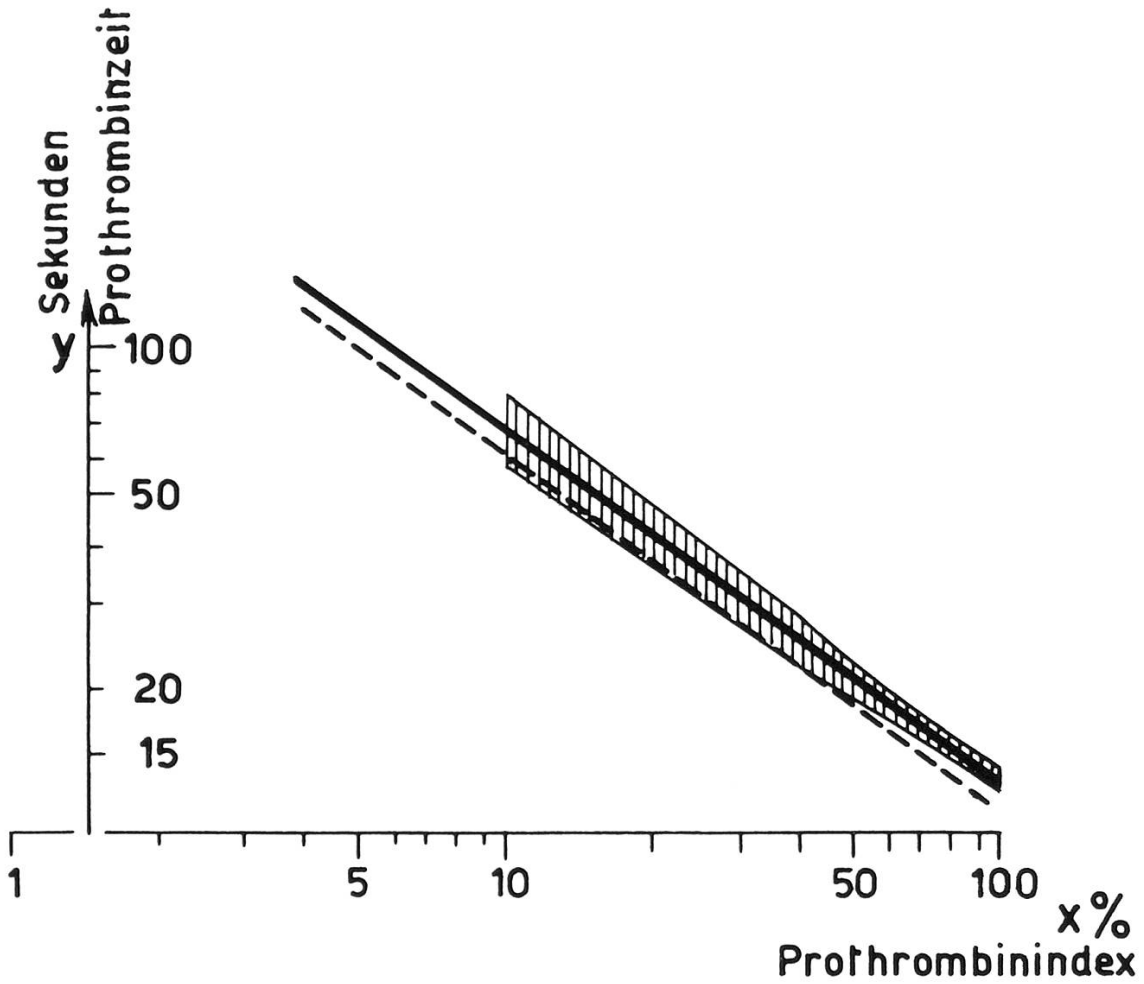

Abbildung 2: Beziehungen zwischen Prothrombinzeit und Prothrombinindex (Mass für Blutkonzentration). Ausgezogene Kurve: für Vollblut; schraffierter Bereich = Bereich der einfachen Standardabweichung. Gestrichelte Kurve: für Blutplasma (nach Quick).

verläuft ähnlich derjenigen von *Koller* (1) parallel der Standardkurve für Plasma von *Quick.* Sie wurde zur Berechnung des Prothrombinindexes benützt.
Wir sehen in Abbildung 2, dass diese Gerade nicht unter dem Winkel von 45° abfällt. Die Abhängigkeit der mittleren Prothrombinzeit y Sekunden vom Prothrombinindex x% unserer Kurve kann aufgrund des Verlaufes der Geraden explizite angegeben werden. Wir erhalten die Formel:

$$y = 338{,}44\ldots \cdot x^{-0{,}717} \cdots \text{oder } y = 338{,}44\ldots \cdot x^{0{,}283} \cdots \cdot \frac{1}{x}$$

Die untersuchte Abhängigkeit gehorcht also einer Potenzfunktion. Die beiden Grössen x und y verhalten sich grosso modo umgekehrt proportional. Dazu tritt aber noch ein von x abhängiger «Behinderungsfaktor», der bewirkt, dass mit zunehmender Konzentration des Blutes die benötigte Prothrombinzeit relativ weniger abnimmt, als die reine Reziprozität erwarten lässt. Die koagulierende Wirkung tritt beim verdünnten Blut verhältnismässig rascher ein als beim konzentrierten.
Zweites Beispiel: Aus verschiedenen Gründen können wir motiviert sein, Kenntnisse über den «richtigen» Aortenquerschnitt zu erhalten. Unmittelbarer An-

stoss zu der von uns bekannten Untersuchung gab die Frage über die Kreislaufverhältnisse bei Neurodermikern (2, 3, 4).
Da sich die Punkte der für diese Abhängigkeit gefundenen Wertepaare im normalen Koordinatensystem nicht geradlinig anordneten, im doppelt logarithmischen System aber die Geradlinigkeit erfüllten, entschied sich *Strehler* für die daraus folgende Abhängigkeit:
Aortendurchmesser (in cm) = 1,12 · (Alter in Jahren)^m, also im Prinzip: $y = k \cdot x^m$; denn er konnte einen altersunabhängigen Exponenten m beobachten, so dass nur das Alter variabel bleibt. Der Koeffizient k = 1,12 erfordert die Dimension Zentimeter pro Jahr und müsste dem Aortendurchmesser eines einjährigen Kindes entsprechen.
Wiederum haben wir eine biologische Abhängigkeit mit einer Potenzfunktion beschreiben können. Es ist nicht Sache des Mathematikers, die Zusammenhänge biologisch zu deuten. Doch wollen wir den Überlegungen *Strehlers* (Mediziner) folgen, um dann auch die mathematische Einflussnahme besser zu verstehen. Warum nimmt der Durchmesser mit Zunahme des Alters zu? Es kann an eine «Dehnungstheorie» gedacht werden. Die Aorta erweitert sich mit dem Alter, weil nach jeder Pulsation ein minimaler unmessbarer, aber berechenbarer Dehnungsrest zurückbleibt. Mit dieser Arbeitshypothese im Hintergrund wurde die Formel aufgrund pathologisch-anatomischer Messungen an der Leiche sowie röntgenologischer Untersuchungen des inneren und äusseren Aortendurchmessers am Lebenden aufgebaut. Der Exponent m ist ein Mass für die Abweichung der Abhängigkeit zwischen Aortendurchmesser und Alter von der reinen Proportionalität. Er ist in erster Linie abhängig von der Summe der Dehnungsrückstände der einzelnen Pulsationen. Mit der im Alter grösser werdenden Gesamtausdehnung und der biologischen Veränderung der Gewebe wird deren Elastizität verändert und dadurch die wirkende Summe der Dehnungsreste pro Zeiteinheit stetig verändert. In den jungen Jahren wird das Wachstum der Organe mitspielen. Die Geradlinigkeit der Abhängigkeit im doppelt logarithmischen System deutet darauf hin, dass der Aortendurchmesser mit einer bestimmten Potenz des Alters zunimmt, deren Exponent von der individuell verschiedenen Dehnungssummation abhängt.
Die Dehnungsreste sind abhängig von der Blutdruckamplitude, die wir indirekt erfassen. Sie korreliert mit der Körperoberfläche, die ihrerseits aus dem Körpergewicht und der Körperlänge abgeschätzt werden kann. *Strehler* gibt die Beziehung:

$$\text{Körperoberfläche (m}^2\text{)} = \text{Körperlänge (m)} \cdot \frac{\sqrt[3]{\text{Körpergewicht (kp)}}}{3{,}85}$$

Der Exponent m entspricht der Steigung der Geraden im doppelt logarithmischen System. Damit erhalten wir die Formel:

$$m = 0{,}194 \cdot \text{Körperoberfläche (m}^2\text{)}$$

Für einen 58jährigen Mann von 80 kg Körpergewicht und 1,86 m Körperlänge erhalten wir eine Körperoberfläche von 2,082 m². Der zugehörige Exponent beträgt m = 0,280. Damit wird der erwartete zugehörige

$$\text{Aortendurchmesser} = 1{,}12 \cdot 58^{0{,}280} = 3{,}49 \text{ cm.}$$

Das Beispiel zeigt erneut, dass wir biologische Vorgänge mit der Potenzfunktion beschreiben können.
In zwei Fällen haben wir gesehen, dass ein biologischer Zusammenhang durch eine Potenzfunktion dargestellt werden kann. Im Beispiel «Aortendurchmesser»

ist $m > 0$, im Beispiel «Prothrombinzeit» ist $m < 0$. Können wir die Potenzfunktion biologisch deuten, entsprechend der Exponentialfunktion, die wir mit dem Modell «Wachstum mit Zins und Zinseszinsen», mit dem Modell der Zellteilung: ein, zwei, vier, acht, ... , 2^n, .. zu verstehen glauben?
Dazu untersuchen wir die Zunahme der Funktion in einem bestimmten Moment, verglichen mit dem in diesem Moment erreichten Funktionswert. Diese Frage beantwortet die erste Ableitung der Funktion. Vergleichen wir in dieser Hinsicht die uns biologisch verständliche Exponentialfunktion mit der biologisch fragwürdigen Potenzfunktion, so gilt für die

Exponentialfunktion:	$y = k \cdot e^x$	abgeleitet	$y' = k \cdot e^x$
Potenzfunktion:	$y = k \cdot x^m$		$y' = mk \cdot x^{m-1}$

Weil bei der Exponentialfunktion die abgeleitete Funktion der Ausgangsfunktion entspricht, heisst das: Bei der Exponentialfunktion entspricht die momentane Zunahme der Funktion der Grösse der Funktion im betreffenden Moment. - Bei der Potenzfunktion wächst die Zunahmefunktion einen Grad weniger rasch als die Funktion selber. Für Exponenten $m > 1$ wächst die Zunahmefunktion mit grösser werdender Ausgangsfunktion über alle Grenzen. Im Spezialfall $m = 1$ ist die Tendenz der Ausgangsfunktion, sich zu vergrössern, in jedem Moment gleich gross. Dies bedingt die Proportionalität. Bei Exponenten $m < 1$ wird die Zunahmefunktion mit grösser werdender Ausgangsfunktion immer kleiner und kleiner.
Wir können zusammenfassend schliessen: *Gehorcht ein Naturvorgang einer Potenzfunktion mit $m < 1$, können wir an ein «gebremstes Wachstum» denken.* Unsere beiden Beispiele weisen ein $m < 1$ auf. Dies scheint uns bemerkenswert. *Für $m = 1$ ist die Zunahmefunktion in jedem Moment gleich gross (Proportionalität). Für $m > 1$ wächst die Zunahme über alle Grenzen.*

Literaturverzeichnis

(1) *König, F.E., Reich, Th., Steinbrüchel, M.,* 1954: Thromboseprophylaxe mit Marcumar im Wochenbett und Zustand des Kindes. - Schw. med. Wschr. **84**, 440.
(2) *Storck, H., Strehler, E., Gysling, E.,* 1965: Abnorm geringe Aortenweite bei Patienten mit Neurodermitis Disseminata. - Arch. f. klinische u. experim. Dermatologie **222**, 489.
(3) *Documenta Geigy,* 1969: Wissenschaftliche Tabelle, 7. Aufl., (J.R. Geigy) Basel.
(4) *Strehler, E.,* 1965: Individuelle Norm der Aortenweite. - Zeitschr. für Kreislaufforschung **54**, 571

Adresse des Autors:
Prof. Dr. Theodor Reich, Höhenweg 7, 8590 Romanshorn.