Zur Behandlung der 3. Wurzel

Autor(en): **Gassmann, Emil**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich**

Band (Jahr): **- (1909)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-819578

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Behandlung der 3. Wurzel.

Von Emil Gaßmann, Winterthur.

Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 125.

z	$\sqrt[3]{z}$	z	$\sqrt[3]{z}$	z	$\sqrt[3]{z}$	z	$\sqrt[3]{z}$
0	0,00000	30	3,10723	60	3,91487	90	4,48140
1	1,00000	31	3,14138	61	3,93650	91	4,49794
2	1,25992	32	3,17480	62	3,95789	92	4,51436
3	1,44225	33	3,20753	63	3,97906	93	4,53065
4	1,58740	34	3,23961	64	4,00000	94	4,54684
5	1,70998	35	3,27107	65	4,02073	95	4,56290
6	1,81712	36	3,30193	66	4,04124	96	4,57886
7	1,91293	37	3,33222	67	4,06155	97	4,59470
8	2,00000	38	3,36198	68	4,08166	98	4,61044
9	2,08008	39	3,39121	69	4,10157	99	4,62607
10	2,15443	40	3,41995	70	4,12129	100	4,64159
11	2,22398	41	3,44822	71	4,14082	101	4,65701
12	2,28943	42	3,47603	72	4,16017	102	4,67233
13	2,35133	43	3,50340	73	4,17934	103	4,68755
14	2,41014	44	3,53035	74	4,19834	104	4,70267
15	2,46621	45	3,55689	75	4,21716	105	4,71769
16	2,51984	46	3,58305	76	4,23582	106	4,73262
17	2,57128	47	3,60883	77	4,25432	107	4,74746
18	2,62074	48	3,63424	78	4,27266	108	4,76220
19	2,66840	49	3,65931	79	4,29084	109	4,77686
20	2,71442	50	3,68403	80	4,30887	110	4,79142
21	2,75892	51	3,70843	81	4,32675	111	4,80590
22	2,80204	52	3,73251	82	4,34448	112	4,82028
23	2,84387	53	3,75629	83	4,36207	113	4,83459
24	2,88450	54	3,77976	84	4,37952	114	4,84881
25	2,92402	55	3,80295	85	4,39683	115	4,86294
26	2,96250	56	3,82586	86	4,41400	116	4,87700
27	3,00000	57	3,84850	87	4,43105	117	4,89097
28	3,03659	58	3,87088	88	4,44796	118	4,90487
29	3,07232	59	3,89300	89	4,46475	119	4,91868
						120	4,93242
						121	4,94609
						122	4,95968
						123	4,97319
						124	4,98663
						125	5,00000

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}46459$$

NB. Die unterstrichenen Ziffern sind aufgerundet.

Erläuterungen zur Wurzeltabelle.

1. Einleitung.

Das Wurzelverfahren nach der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

hat mehr theoretischen als praktischen Wert. Für die Anwendung zur Lösung geometrischer Aufgaben ist es zu umständlich und zeitraubend. Eine Tabelle der Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 125 leistet in diesem Falle bessere Dienste und erweist sich für Schulzwecke als vollkommen genügend.

Es liegt in der Natur der Sache, daß die Aufgaben, die das Wurzelverfahren verlangen, einfache Zahlen aufweisen (zu einem gedachten Volumen sind die Dimensionen aufzusuchen). Daher sind gerade die Wurzeln aus großen Kubikzahlen (die Paradebeispiele des Wurzelverfahrens) in praktischen Beispielen selten, sozusagen unmöglich, während die irrationalen Wurzeln aus relativ kleinen Zahlen die Regel bilden.

Auch solche Zahlen, die größer als 125 sind, sowie Brüche können durch geeignete Umformungen in den Bereich der Tabelle gezogen werden. Diese Umformungen sind einfach und bieten für die Schüler der dritten Klasse keine großen Schwierigkeiten; sie sind vielleicht die einzige praktische Anwendung dessen, was sie aus der Potenz und Wurzellehre gelernt haben.

2. Umformung von Zahlen vor der Verwendung der Tabelle.

Wir wollen kurz die Sätze entwickeln, die für solche Umformungen in Betracht kommen.

$$(3 \,.\, 4)^3 = 3 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 3^3 \,.\, 4^3$$

Probe: $12^3 = 1728$ $\qquad$ $27 \,.\, 64 = 1728$

allgemein:

$$(a \,.\, b)^3 = a \,.\, b \,.\, a \,.\, b \,.\, a \,.\, b = a \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b = a^3 \,.\, b^3$$

Ein Produkt wird in die dritte Potenz erhoben, indem man die einzelnen Faktoren in die dritte Potenz erhebt.

Hieraus ergibt sich die Umkehrung

$$\sqrt[3]{1728} = 12 \qquad \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{64} = 3 \,.\, 4$$

allgemein:

$$\sqrt[3]{a \,.\, b} = \sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt{b}$$

Aus einem Produkt zieht man die Kubikwurzel, indem man sie aus jedem Faktor zieht.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3}$$

allgemein:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Man erhebt einen Bruch in die dritte Potenz, indem man Zähler und Nenner in die dritte Potenz erhebt.

Durch Umkehrung erhalten wir den entsprechenden Wurzelsatz:

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

allgemein:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Aus einem Bruch zieht man die dritte Wurzel, indem man sie aus Zähler und Nenner zieht.

Bei der Zerlegung der Zahlen in Produkte muß man in erster Linie darauf sehen, daß die Faktoren ganzzahlig werden. Wenn dies nicht möglich ist, empfiehlt sich eine Division durch Kubikzahlen (8, 27, 125, 1000).

Beispiele:

$$\sqrt[3]{7000} = \sqrt[3]{1000 \,.\, 7} = \sqrt[3]{1000} \,.\, \sqrt[3]{7} = 10\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt[3]{4500} = \sqrt[3]{45}\,\sqrt[3]{100} \text{ oder } \sqrt[3]{125} \,.\, \sqrt[3]{36}$$

$$\sqrt[3]{10000} = \sqrt[3]{1000} \,.\, \sqrt[3]{100} = 10 \,.\, \sqrt[3]{100}$$

$$\sqrt[3]{6743} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{105{,}35} \text{ oder } = \sqrt[3]{125} \,.\, \sqrt[3]{54} \quad (54 \text{ statt } 53{,}94)$$

$$\sqrt[3]{78532} = \sqrt[3]{729} \,.\, \sqrt[3]{108} \ (108 \text{ statt } 107{,}7) \text{ oder } = \sqrt[3]{1000} \,.\, \sqrt[3]{78{,}5}$$

usw.

Die Wurzel aus einem Bruch wird dadurch vereinfacht, daß man erweitert, bis der Nenner eine Kubikzahl ist.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

$$\sqrt[3]{5{,}3} = \sqrt[3]{\frac{5300}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5300}}{10} = \frac{\sqrt[3]{53} \cdot \sqrt[3]{100}}{10}$$

usw.

3. Erreichbare Genauigkeit.

Für ganze Zahlen von 1 bis 125 gibt die Tabelle die Kubikwurzeln auf 5 Dezimalen genau. Wenn wir die Wurzel aus einem Produkt von zwei ganzzahligen Faktoren ziehen sollen, so liefert uns die Tabelle zwei Faktoren, die auf fünf Stellen genau sind. Weil aber die höchsten Stellen Einer sind, so wird das Produkt wenigstens auf 4 Dezimalen genau. Am wenigsten zuverlässig sind die Wurzeln aus Produkten, in denen ein Faktor gebrochen ist. (6743 = 125 . 53,94.) Es ist hier vorteilhaft, den gebrochenen Faktor möglichst groß zu lassen; denn je größer die Zahlen sind, um so weniger unterscheiden sich die Tafeldifferenzen ihrer Wurzeln. Von 101 an unterscheiden sie sich nie mehr als um einen Tausendstel. Bei den letzten Zahlen der Tafel sind es nur noch sieben Zehntausendstel. Wir können deshalb im Bereich dieser Zahlen durch Interpolation eine Genauigkeit auf drei Dezimalen erreichen.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{6743} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{105{,}35} = 4 \cdot \sqrt[8]{105{,}4}$$

$$\sqrt[3]{105} = 4{,}71769 \qquad \text{Differenz} = 1484 \quad \text{davon } \frac{4}{10} = 592$$

$$\sqrt[3]{106} = 4{,}73262$$

$$\sqrt[3]{105{,}4} = 4{,}72361 \qquad \text{oder} \qquad 4{,}723$$

$$4 \cdot \sqrt[3]{105{,}4} = 18{,}89444 \qquad 18{,}892$$

4. Aufgaben.

Aufgabe 1. Wie groß ist die Seite eines würfelförmigen Blechgefäßes, das 1 hl. fassen soll, zu machen?

Lösung: 1 hl = 100 l = 100 dm³

$$s = \sqrt[3]{100} = \mathbf{4{,}64} \text{ dm}$$

Aufgabe 2. Ein Trog von prismatischer Form faßt 50 hl. Breite und Tiefe sind gleich, die Länge ist doppelt so groß als die Breite. Welches sind seine Dimensionen?

Lösung: Breite = b, Tiefe = b, Länge = 2 b

$$J = 2\,b^3 = 5000 \text{ l} = 5000 \text{ dm}^3$$

$$b^3 = 2500$$

$$b = \sqrt[3]{2500} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{20}$$

$$= 5\sqrt[3]{20} = \mathbf{18{,}42} \text{ dm}$$

Aufgabe 3. Ein zilindrisches Reservoir soll 1000 m^3 fassen. Wie tief wird es, wenn der Durchmesser doppelt so groß als die Tiefe sein muß?

Lösung: $h = r$

$$J = r^3 \pi = 1000$$

$$r^3 = \frac{1000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = \mathbf{6{,}828}\ \mathrm{m}$$

Aufgabe 4. Das bei Stuttgart verunglückte Luftschiff des Grafen Zeppelin faßte 15,000 m^3 Gas. Wie groß müßte der Durchmesser eines kugelförmigen Ballons mit gleich großer Füllung sein?

Lösung:

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = 15000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 15000}{4 \,.\, \pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 15000}{8 \,.\, \pi}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{90000}}{\sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{\pi}} = \frac{10 \sqrt[3]{90}}{2 \sqrt[3]{\pi}}$$

$$= \frac{5 \,.\, 4{,}4814}{1{,}46459} = 15{,}3$$

$$d = \mathbf{30{,}6}\ \mathrm{m}$$

Aufgabe 5. Ein Knabe will aus 1 kg. Blei eine Kugel gießen. Welchen Durchmesser muß er ihr geben? (Spez.-G. von Blei = 11.)

Lösung:

$$J = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1000}{11}\ \mathrm{cm}^3$$

$$r = \sqrt{\frac{1000 \,.\, 3}{11 \,.\, 4 \,.\, \pi}} = 5 \sqrt{\frac{6}{11 \,.\, \pi}}$$

$$= \frac{5 \,.\, 1{,}81712}{2{,}22398 \,.\, 1{,}46459} = 2{,}789$$

$$d = \mathbf{5{,}58}\ \mathrm{cm}$$