Mathematische Aufgaben für die letzte Klasse der Sekundarschulen

Autor(en): **Gerlach, R. / Scherrer, F. R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich**

Band (Jahr): **- (1930)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-819534

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Mathematische Aufgaben

für die

letzte Klasse der Sekundarschulen

von

Dr. R. GERLACH und Dr. F. R. SCHERRER

ehemaligen Lehrern der Mathematik
am Lehrerseminar des Kantons Zürich.

Vorwort.

Mit der vorliegenden Aufgabensammlung will den Lehrern der Sekundarschulen Material zur Verfügung gestellt werden, das ihnen ermöglichen soll, die zusammenfassende Repetition des gesamten mathematischen Unterrichtsstoffes der Sekundarschule am Ende des letzten Schuljahres vielseitig anregend und fruchtbringend zu gestalten. Die Sammlung ist nicht für die Hand des Schülers bestimmt. Der Lehrer soll die Aufgaben mit der ganzen Schulklasse in der Weise lösen, daß er jeden einzelnen zur geistigen Mitarbeit heranzieht. Zu diesem Behufe wird er die Figuren nicht etwa vor der Lektion an die Wandtafel zeichnen, sondern sie parallel mit der Entwicklung des Gedankenganges vor den Augen der Schüler entstehen lassen.

Die Abteilung A umfaßt leichtere, die Abteilung B schwierigere Aufgaben. Die meisten wurden an den mündlichen Aufnahmeprüfungen am Seminar in Küsnacht behandelt, die übrigen jedoch erst für den besonderen Zweck dieser Sammlung geschrieben.

Um dem Lehrer das Auffinden geeigneter Aufgaben zu erleichtern, sind bei jeder Nummer in Klammern die zur Anwendung gelangenden Beziehungen durch abgekürzte Stichwörter angedeutet, die auf Seite 120 zusammengestellt sind.

Küsnacht, den 27. Februar 1930.

Gerlach.
Scherrer.

A 1 (*W.-Halbierende und Mittelnormale*)

Gegeben sei ein Winkel und auf seinen Schenkeln zwei Punkte A und B, die aber vom Scheitel ungleiche Entfernung haben. Man suche einen Punkt so, daß er erstens gleichen Abstand hat von den Schenkeln des Winkels und zweitens gleichen Abstand hat von A und B. (Zwei Örter.)

A 2 (*Schlußrechn. oder Gl.*)

Von meinem Gelde habe ich zuerst einen Drittel und dann vom Reste noch drei Viertel ausgegeben. Wie viel hatte ich ursprünglich mitgenommen, wenn ich jetzt noch 5 Fr. 35 Rp. habe? (32 Fr. 10 Rp.)

A 3 (*Verbind.-Strecke von Seitenmitten des Dreiecks*)

Welche Figur bilden die Seitenmitten eines ganz beliebigen Vierecks? Wann ist diese Figur ein Rhombus? ein Rechteck? ein Quadrat?

A 4 (*W.-Summe des Vierecks, Gl.*)

In einem Viereck mißt der zweite Winkel 25^0 mehr als der erste, der dritte Winkel 13^0 mehr als der zweite und der vierte Winkel 69^0 mehr als der erste. Wie groß sind die einzelnen Winkel? (57^0, 82^0, 95^0, 126^0.)

A 5 (*Gegenw. des Kreisvierecks*)

Man zeige, daß die Winkelhalbierenden eines Vierecks ein Kreisviereck einschließen.

A 6 (*Prozentrechn.*)

Eine Aktie von 1000 Fr. ergibt eine Dividende von 8 %. Die eidgenössische Couponsteuer beträgt 3 %. Wie viel erhalte ich für einen (Jahres)coupon? (77.60.)

A 7 (*Teilung der Hypot. durch Höhe*)

Über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiere man die Quadrate so, daß sie mit dem Dreieck den rechten Winkel gemein haben. Die beiden Ecken dieser Quadrate, die dem Scheitel dieses rechten Winkels gegenüberliegen, haben von der Hypotenuse Abstände, deren Summe gleich der Länge der Hypotenuse ist. Beweis?

A 8 (*Bruchrechn.*)

Trägt man auf der Strecke AB von A aus $^{13}/_{24}$ derselben ab und von B aus $^{13}/_{18}$ derselben ab, so greifen die beiden abgetragenen Strecken mit 57 cm übereinander. Wie groß ist die ganze Strecke? (216 cm.)

A 9 (*Periph.-W.*)

In einem Dreieck ABC ziehe man von C aus die Höhe des Dreiecks und den Durchmesser des Umkreises und beweise, daß diese beiden Linien mit den von C ausgehenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden.

A 10 (*Umgekehrte Proportionalität*)

12 Arbeiter brauchten bei 8-stündiger Arbeitszeit zur Ausbesserung einer Straße 147 Tage. In wie viel Tagen hätten 14 Arbeiter bei 9stündiger Arbeitszeit dieselbe Arbeit geleistet? (112 Tage.)

A 11 (*Periph.-W.*)

Zu einem gleichseitigen Dreieck ABC sei der Umkreis gezeichnet worden. Ein beliebiger Punkt P auf dem Bogen BC habe von A den Abstand x, von B den Abstand y und von C den Abstand z. Man beweise, daß stets $x = y + z$ ist. Wie muß P gelegen sein, damit $y + z$ möglichst groß wird?

A 12 (*Zinsrechn.*)

Jemand erhält 98 Fr. Zins von einem Kapital, das zu $3^1/_2\,\%$ ausgeliehen ist. Wie viel erhält er, wenn der Zinsfuß auf $3^3/_4\,\%$ erhöht wird? (Der Mehrbetrag ist $^1/_{14}$; 105 Fr.)

A 13 *(Periph.-W.)*

Die drei Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden so, daß AB 5 cm und BC 3 cm mißt. Man bestimme einen Punkt so, daß die Winkel APB und BPC je 30° messen.

A 14 *(Quadr. des Binoms)*

Man vereinfache den Ausdruck

$$\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{(a+b)^2-(a-b)^2}$$

(Antwort: $^1/_2$.)

A 15 *(Periph.-W.)*

Zwei ungleich große Kreise schneiden sich in A und B. Zieht man durch B zwei Transversalen, so werden die Stücke derselben, die innerhalb der beiden Kreise liegen, von A aus unter gleichem Winkel gesehen. Beweis?

A 16 *(Zinsrechn.)*

Jemand erhält von einem ausgeliehenen Kapital eine gewisse Summe als Jahreszins. Um wie viel muß das Kapital erhöht werden, damit es diesen Zins schon in 144 Tagen abwirft? (144 Tage $= {}^2/_5$ von 360 Tagen.) (Um das $1^1/_2$-fache.)

A 17 *(Gegenw. des Kreisvierecks)*

Bei einem beliebigen Dreieck ABC lege man durch A einen beliebigen Kreis, der AB in D und AC in E schneide. Dann lege man durch B und D einen zweiten Kreis, der BC in F schneiden möge. Ist dann P der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise, so ist zu zeigen, daß auch C, E, P und F auf einem Kreise liegen.

A 18 *(Berühr.-Kr. zweier Geraden)*

Bei einem rechtwinkligen Dreieck zeichne man einen Kreis, der beide Katheten berührt und zwar die kleinere Kathete in ihrem Endpunkt. Man beweise, daß die auf der Hypotenuse gelegene Kreissehne gleich der doppelten Dreieckshöhe ist.

A 19 (*Zinsrechn.*)

Wenn 6210 Fr. zu 5 % verzinst werden, so reichen die Zinsen für einen gewissen Zweck aus. Da ich aber nur $4^1/_2$ % bekomme, so muß ich ein größeres Kapital anlegen. Welches? (Zinsfußverminderung $^1/_{10}$, Kapitalvermehrung $^1/_9$.)

A 20 (*Inkr. des gleichseit. Dreiecks*)

Einem Kreissektoren von 60° ist ein Kreis einzuschreiben. Wo berührt derselbe den Kreisbogen, die Radien? Warum ist der Radius dieses Kreises der dritte Teil des Radius des Sektors?

A 21 (*Mittellinien u. Fl. des Dreiecks*)

In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P die Mitte von BC und Q die Mitte von CD. Man ziehe die Strecken AP, AQ, PQ und BD. In wie viel Stücke wird das Parallelogramm zerlegt? Man berechne die Fläche jedes Stückes als Bruchteil der ganzen Fläche. Probe? Wird die Diagonale BD durch AP und AQ in 3 gleiche Teile geteilt?

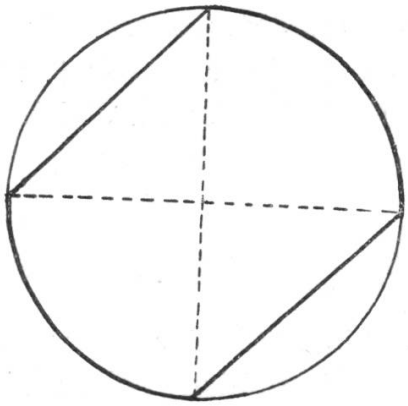
A 22 (*Zinsrechn., Gl. m. 3 Unbek.*)

Jemand hat drei Kapitalien, die zusammen 10300 Franken betragen, zinstragend angelegt, und zwar das erste zu $4^3/_4$, das zweite zu $4^1/_2$ und das dritte zu $4^1/_4$ Prozent. Er bezieht von allen dreien zusammen einen Jahreszins von 465 Franken. Hätte er aber das erste Kapital zu $4^1/_4$, das zweite zu 5 und das dritte zu $4^3/_4$ Prozent angelegt, so wäre seine jährliche Zinseneinnahme um $12^1/_2$ Franken größer. Welches sind die Kapitalien? (3900, 3100, 3300.)

A 23 (*Flächengleiche Dreiecke*)

In einem regelmäßigen Sechseck werden alle Nebendiagonalen gezogen. Welche Figur umschließen sie? Was ist von den übrigen Flächenstücken zu sagen? Welchen Bruchteil bildet die zentrale Fläche von der Fläche der ganzen Figur? ($^1/_3$.)

A 24 *(Seitenverhält. im gleichschenkl. rechtw. Dreieck)*



Ein Zylinder ist auf zwei Seiten parallel so angeschliffen worden, daß die beiden in der Figur angegebenen Durchmessser aufeinander senkrecht stehen. Wie groß ist der Radius r des Zylinders anzunehmen, wenn die Schlüsselweite d (Abstand der parallelen Sehnen) gegeben ist? $(d : \sqrt{2}.)$

A 25 *(Teilungsrechn.)*

3878 Franken sollen unter vier Personen A, B, C und D so verteilt werden, daß B drei Viertel von dem erhält, was A zufällt und dazu noch 300 Franken, C die Hälfte des Anteils von B und dazu noch 200 Franken und daß D 100 Franken weniger erhält als B und C zusammen. Wie viel erhält jeder?

Wegleitung: Ermitteln wir zuerst diejenigen Bestandteile der Anteile von B, C und D, die nur von den drei letzten der angegebenen Beträge abhängen. Von diesen erhält

B			Fr.	300.—
C	Fr. 150 +	Fr. 200 =	„	350.—
D	„ 650 —	„ 100 =	„	550.—
		zusammen	Fr.	1200.—

folglich bleiben noch 2678 Franken so zu verteilen, daß sich die A, B, C und D zufallenden Beträge zueinander verhalten wie $1 : {}^3/_4 : {}^3/_8 : {}^9/_8$ oder wie $8 : 6 : 3 : 9$. Der Betrag von 2678 Franken geht also in 26 Teile, somit erhält davon

$$A\ 8 \,.\, 103 = 824,\ B\ 6 \,.\, 103 = 618,\ C\ 3 \,.\, 103 = 309$$
$$\text{und } D\ 9 \,.\, 103 = 927 \text{ Franken}$$

demnach im ganzen

A 824 Fr., B 918 Fr., C 659 Fr. und D 1477 Franken.

Logisch leichter gestaltet sich die algebraische Lösung mit dem Anteil von A als Unbekannte.

A 26 *(Rechtw. 30°-Dreieck, Tang. von P aus.)*

In einem Kreise vom Mittelpunkt M und vom Radius r sei AB ein Durchmesser. Man zeichne in A und B die Kreistangenten und nehme auf der Tangente in A einen Punkt C so an, daß $MC = 2r$ wird. Dann konstruiere man von C aus die zweite Tangente an den Kreis (!) und berechne die Länge CD dieser Tangente zwischen den beiden parallelen Tangenten, sowie die Stücke, in welche sie durch den Berührungspunkt zerlegt wird. $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}r + \sqrt{3}\,r\right)$. Wie groß ist in C und D der Winkel der beiden Tangenten?

A 27 *(Mischungsrechn.)*

Wie groß ist der Silberwert eines Fünffrankenstücks (25 gr., Feinheit 900/1000), wenn ein Kilogramm Feinsilber 98 Fr. kostet?

A 28 *(Verwandl. eines Rhombus in ein Quadr.)*

Man konstruiere einen Rhombus aus seiner Seite $a = 49$ mm und dem Radius seines Inkreises $\rho = 18$ mm, verwandle ihn in ein flächengleiches Quadrat und berechne die Seite des letzteren.

Wegleitung: Verwandlung des Rhombus sowohl in ein Rechteck mit der Seite a als auch in eines mit einer Diagonale als Seite. Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat sowohl nach dem Kathetenquadrat- als auch nach dem Höhenquadratsatz. Welche Konstruktion ist die bequemste?

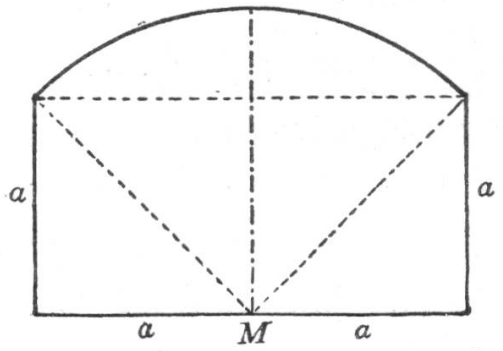
A 29 *(Kreisviereck, Pyth., Pyr.-Vol.)*

Drei aufeinanderfolgende Seiten eines Kreisviereckes messen der Reihe nach 9 cm, 2 cm und 6 cm. Die beiden zuerst genannten Seiten schließen einen rechten Winkel ein. Das Kreisviereck bildet die Grundfläche einer Pyramide, an der jede Seitenkante $5^1/_2$ cm lang ist. Man bestimme den Rauminhalt der Pyramide. (30 cm³.)

A 30 *(Berühr.-Kr. u. Bogenlänge)*

Um einen Kreis (Radius a) kann ich 6 andere ebenso große Kreise legen, die sich zu zweien und auch den ersten Kreis berühren. Wie lang ist eine Schnur, die alle sieben Kreise umspannt? (Kette für sieben Baumstämme.)

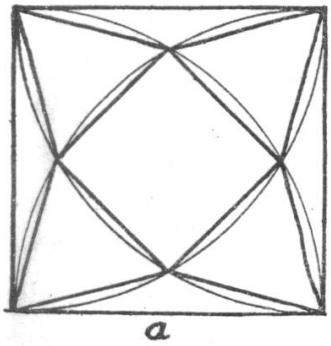
A 31 *(Pyth. u. Kr.-Sektor)*



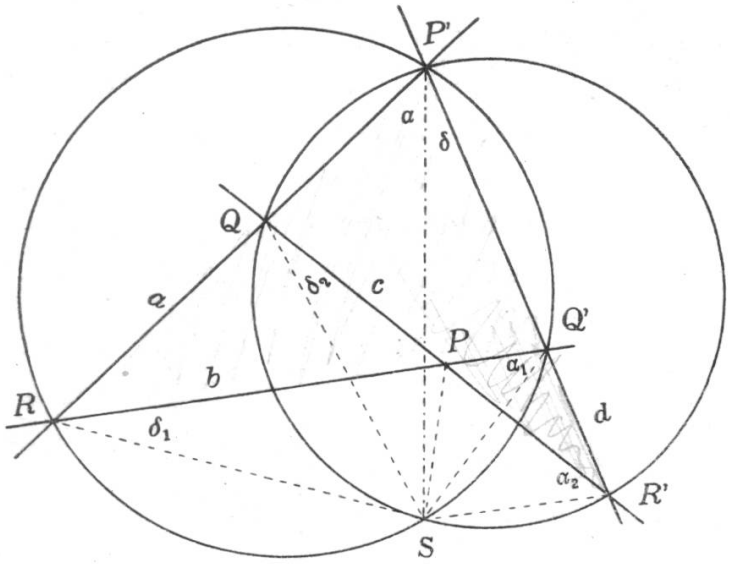
Man konstruiere ein Kellerfenster nach der Skizze und berechne seine Fläche, sowie die Länge seiner Symmetrieachse.

B 1 (*Trisektion des rechten W.*)

In einem Quadrate von der Seite a ziehe man von den Ecken aus die vier Viertelskreise vom Radius a, die im Innern des Quadrates liegen. Dann verbinde man die neuen Kreisschnittpunkte der Reihe nach miteinander und mit den nächsten Quadratecken. In welche Figuren wird dadurch das Quadrat zerlegt? Aufklappen der Dreiecke um die Zentralfigur bis zum Zusammentreffen. Welcher Körper entsteht dadurch?



B 2 (*Periph.-W.*)



Irgend vier gerade Linien a, b, c, d, von denen weder zwei parallel sind, noch drei durch denselben Punkt gehen, bestimmen zu je dreien im ganzen vier Dreiecke PQR, $PQ'R'$, $P'Q'R$ und $P'QR'$. Die Umkreise der beiden letzteren schneiden einander außer in P' noch in einem zweiten Punkt S. Verbinden wir diesen mit den sechs Ecken der genannten Dreiecke, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$\alpha = \alpha_1$	als	Periph.-Winkel	im	Kreis	links	über	dem	Bogen	SR,
$\delta = \delta_1$	„	„	„	„	„	„	„	„	SQ',
$\alpha = \alpha_2$	„	„	„	„	rechts	„	„	„	SQ,
$\delta = \delta_2$	„	„	„	„	„	„	„	„	SR'.

Daher auch $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\delta_1 = \delta_2$. Mithin liegen die Punkte S und P mit Q und R auf einem und mit Q' und R' auf einem andern Kreis. Die Umkreise der vier oben genannten Dreiecke gehen somit alle durch den Punkt S. D. h. Vier gerade Linien von allgemeiner Lage bilden vier Dreiecke, deren Umkreise durch denselben Punkt gehen. (Dieser Punkt wird nach seinem Entdecker der Steinersche Punkt des Vierseits genannt.)

B 3 *(Kettenregel)*

Wie groß ist in deutscher Währung der Arbeitslohn, der für 23 l der Lösung eines gewissen Salzes in Wasser berechnet werden muß, wenn 17 l Lösung 13 kg Salz enthalten, 19 kg Salz in 7 Stunden hergestellt und aufgelöst werden, wenn ferner der Arbeitslohn für 9 Stunden 11 Franken beträgt und für 5 Franken 4 Mark in Rechnung gestellt werden?

Wegleitung: Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich nach dem Dreisatz wie folgt:

17 l (Lösung)	aus	13 kg (Salz)
1 l	„	$\frac{13}{17}$ kg
23 l	„	$\frac{23 \,.\, 13}{17}$ kg
19 kg	in	7 St.
1 kg	„	$\frac{7}{19}$ St.
$\frac{23 \,.\, 13}{17}$ kg	„	$\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7}{17 \,.\, 19}$ St.
9 St.	für	11 Fr.
1 St.	„	$\frac{11}{9}$ Fr.
$\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7}{17 \,.\, 19}$ St.	„	$\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11}{17 \,.\, 19 \,.\, 9}$ Fr.
5 Fr.	gleich	4 Mk.
1 Fr.	„	$\frac{4}{5}$ Mk.
$\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11}{17 \,.\, 19 \,.\, 9}$ Fr.	„	$\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 4}{17 \,.\, 19 \,.\, 9 \,.\, 5}$ Mk.

Somit muß für 23 l Salzlösung ein Arbeitslohn von $\frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 4}{17 \,.\, 19 \,.\, 9 \,.\, 5}$ Mk. berechnet werden.

Sind x Mark der für 23 l Salzlösung zu berechnende Arbeitslohn und stellt man die zusammengehörenden Quantitäten der verschiedenen Größen, durch einen senkrechten Strich getrennt, so nebeneinander, daß jede Zeile mit der Größenart beginnt, mit der die vorhergehende schließt und setzt die Zusammenstellung fort, bis rechts die Größenart auftritt, mit der man die erste Zeile begonnen hat, so erhält man das folgende Schema:

x Mk.	23 l
17 l	13 kg
19 kg	7 St.
9 St.	11 Fr.
5 Fr.	4 Mk.

Man erhält demnach für x . 17 . 19 . 9 . 5 Mk. 23 . 17 . 19 . 9 . 5 l Salzlösung aus 23 . 13 . 19 . 9 . 5 kg Salz in 23 . 13 . 7 . 9 . 5 Stunden für 23 . 13 . 7 . 11 . 5 Fr., die gleich 23 . 13 . 7 . 11 . 4 Mk. sind. Somit ist

$$x \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 9 \,.\, 5 = 23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 4;$$

das heißt: Das Produkt der Maßzahlen links vom Strich ist gleich dem Produkt der Maßzahlen rechts vom Strich. Man bezeichnet diese Aussage als Kettenregel oder Kettensatz. Wir erhalten danach

$$x = \frac{23 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 4}{17 \,.\, 19 \,.\, 9 \,.\, 5}$$

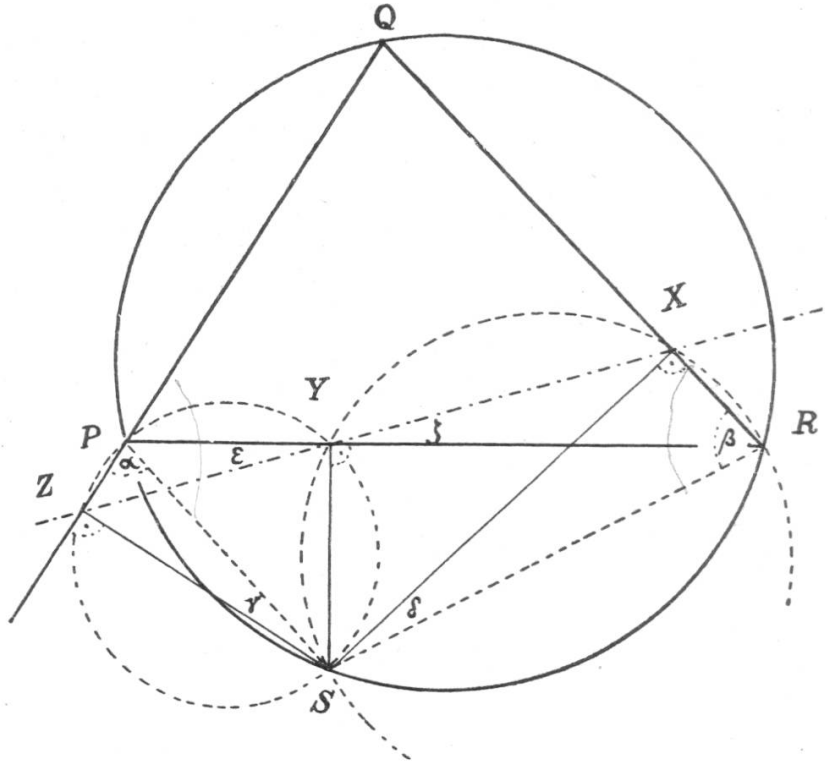
339

(6 Mk. 39 Pf.)

B 4 (*Umkr. des Dreiecks. Periph.-W.*)

Wenn man durch die Ecken P, Q, R irgend eines Dreiecks einen Kreis legt, auf dessen Bogen RP den Punkt S beliebig wählt, von ihm aus auf die Geraden QR, RP und PQ Normalen fällt und deren Fußpunkte der Reihe nach mit X, Y, Z bezeichnet, wie groß ist dann der Winkel, den die Strecken YX und YZ einschließen*?

* Es empfiehlt sich, diese beiden Strecken verschiedenfarbig zu zeichnen.



Wegleitung: Weil die Winkel bei P und R des Kreisviereckes $PQRS$ einander zu zwei Rechten ergänzen, ist $\angle\alpha = \angle\beta$ und daher auch $\angle\gamma = \angle\delta$. Die Punkte Z und Y liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser PS und die Punkte X und Y auf dem Kreis mit dem Durchmesser RS, woraus sich $\angle\gamma = \angle\varepsilon$ und $\angle\delta = \angle\zeta$ und schließlich $\angle\varepsilon = \angle\zeta$ ergibt. Demnach $\angle XYZ = \angle\zeta + \angle RYZ = \angle RYZ + \varepsilon = 2R$. Das heißt: Die Fußpunkte der drei Normalen gehören derselben Geraden an (die man nach ihrem Entdecker die Wallacesche Gerade nennt und früher Simsonsche Gerade genannt hat.)

B 5 *(Reg. Vielecke u. Fl. des gleichseit. Dreiecks)*

Man zeichne ein reguläres Sechseck von der Seite a. Über einer Seite konstruiere man ein Quadrat (Benützung passender Diagonalen). Wenn man über allen Seiten die Quadrate (nach außen) konstruiert hat, welche Figur bildet dann eine Schnur, die die ganze Zeichnung umspannt? Fläche dieser Figur?

$$(F = 6\,\square + 12\,\triangle = 6\,a^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 = 3\,(2 + \sqrt{3})\,a^2.)$$

B 6 *(Mischungsrechn.)*

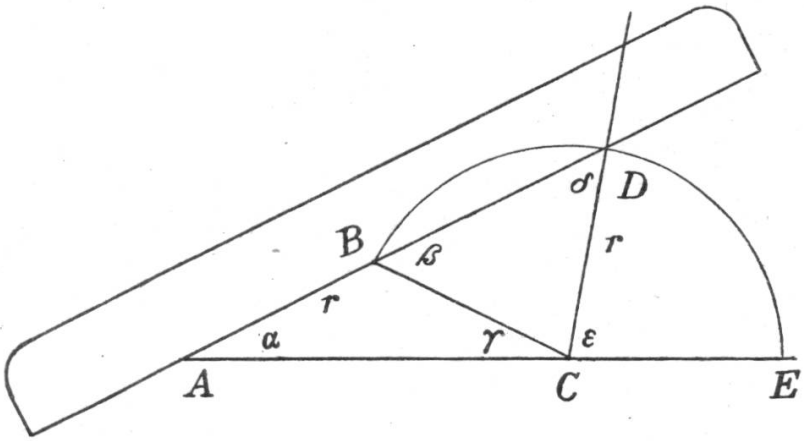
Jemand hat schweizerische Ein- und Fünffrankenstücke. Ein Frankenstück wiegt 5 g und hat den Feingehalt 835 ‰; ein Fünffrankenstück wiegt 25 g und hat den Feingehalt 900 ‰. Wie viele Franken- und wie viele Fünffrankenstücke muß er wenigstens zusammenschmelzen, um Silber vom Feingehalt 875 ‰ zu erhalten?

Wegleitung: Im Hinblick auf die herzustellende Legierung enthalten

1000 g Silber vom Feingehalt 835 40 g Silber zu wenig,
1000 g „ „ „ 900 25 g „ „ viel,

somit muß er je 5 g des geringeren mit je 8 g des besseren Silbers legieren, d. h. 200 g des besseren mit 125 g des geringeren oder 25 Einfrankenstücke mit 8 Fünffrankenstücken zusammenschmelzen.

B 7 *(W.-Beziehungen am Dreieck.)*



Es sei ein spitzer Winkel α mit dem Scheitel A gegeben. Man trägt auf dem einen Schenkel eine Strecke AB von der Länge r ab, beschreibt um B mit dem Radius r einen Kreis, der den andern Schenkel des Winkels α in C schneidet, beschreibt um C ebenfalls mit dem Radius r einen Kreis, der die Gerade AB in B und D und die über C hinaus verlängerte Gerade AC in E schneidet. Wie groß sind dann, durch α ausgedrückt, die Winkel γ, β, δ und ε? Wenn also ein beliebiger konkaver Winkel ε gegeben ist und man auf der geraden

Kante eines Papierstreifens oder Lineals (Maßstabes) eine Strecke $AB = CD$ abträgt, dann den Papierstreifen so legt, daß der Punkt A auf die rückwärtige Verlängerung des Schenkels CE, der Punkt B auf den Kreis um C mit dem Radius CD zu liegen kommt und die Kante AB des Papierstreifens durch D geht, dann ist $\angle \alpha = {}^1/_3\, \varepsilon$. Wie kann man daher ein regelmäßiges Neuneck konstruieren?

Die Schüler sind darauf aufmerksam zu machen, daß die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile hier durch Ausprobieren erreicht wird, da sie ja mit Zirkel und Lineal allein unmöglich ist.

B 8 *(Teilung nach umgekehrt. Verhältn.)*

Ein reicher Sportsmann setzte einen Preis von Fr. 300.— für denjenigen Kavalleristen aus, der eine gewisse Strecke mit seinem Dienstpferd in voller militärischer Ausrüstung in weniger als 4 Stunden zurücklegt. Im Falle, wo mehrere Reiter sich des Preises würdig erweisen, soll er im umgekehrten Verhältnis der gebrauchten Marschzeiten unter die Betreffenden verteilt werden.

Der	Reiter	A	legte	die	Strecke	in	$3^h\, 19^m\, 20^s$	zurück,
„	„	B	„	„	„	„	$3^h\, 27^m$	„
„	„	C	„	„	„	„	$3^h\, 44^m\, 15^s$	„
„	„	D	„	„	„	„	$3^h\, 54^m$	„

Die übrigen beteiligten Reiter erreichten das Ziel nicht innerhalb 4 Stunden und fallen daher für die Preisverteilung außer Betracht. Wie sind die 300 Fr. auf die vier Reiter zu verteilen?

Wegleitung: Die Marschzeiten der Reiter A, B, C, D betragen der Reihe nach 11960, 12420, 13455, 14040 Sekunden. Weil die Preisanteile sich umgekehrt wie die Marschzeiten verhalten sollen, so muß beispielsweise der Anteil von B zum Anteil von D sich verhalten wie 14040 : 12420 oder wie $\frac{1}{12420} : \frac{1}{14040}$, woraus ersichtlich ist, daß die Anteile von A, B, C und D sich der Reihe nach zueinander verhalten wie

$$\frac{1}{11960} : \frac{1}{12420} : \frac{1}{13455} : \frac{1}{14040}$$

oder wie 27 : 26 : 24 : 23. Somit erhält A 81, B 78, C 72 und D 69 Franken.

B 9 (*Zentralabstand gleich. Sehnen, Tang. von Paus, Pyth.*)

In einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und 13 $\{3^1/_4\}$* cm Radius soll eine 10 $\{2^1/_2\}$ cm lange Sehne gelegt werden, die verlängert durch einen gegebenen Punkt P geht, der 20 $\{5\}$ cm von O entfernt ist. Wie lang sind die von P an den Kreis gezogenen Tangenten, gemessen von P bis zu den Berührungspunkten?

Konstruktion: Wie liegen alle gleich langen Sehnen eines Kreises? Wie erhält man die Tangenten, die durch einen gegebenen Punkt gehen? Anzahl der Lösungen.

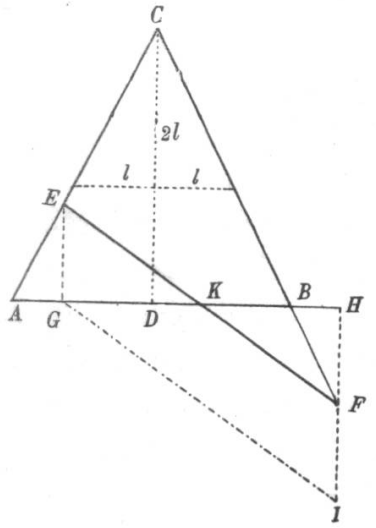
Rechnerische Lösung: Abstand der Sehne vom Mittelpunkt? Entfernung des Halbierungspunktes der Sehne und der Sehnenendpunkte von P. Länge der Tangente: $\sqrt{20^2 - 13^2} = \sqrt{231} = \sqrt{11 \cdot 21} = 15{,}199$ cm. $\{\sqrt{5^2 - (3^1/_4)^2} = \sqrt{^7/_4 \cdot {}^{33}/_4} = 3{,}800$ cm$\}$ Wie erklärt sich, daß die Tangentenlänge das geometrische Mittel aus den Abständen der Sehnenendpunkte von P ist?

* Zwischen { } Daten für ein Beispiel in gebrochenen Zahlen.

B 10 (*Pyth., Tang.-Viereck*)

Die Schenkel eines Trapezes messen je 13 m, die Parallelen 11 m und 21 m. Wie groß ist die Höhe, die Fläche des Trapezes? Hat dieses Trapez einen Inkreis? Um welches Stück müßte man die beiden Parallelen verändern, damit es einen Inkreis erhält?

B 11 (*Aehnlichk., Pyth.*)



Man konstruiert ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Höhe CD gleich der Basis AB ist und dessen Schenkel 31 L.-E. (Längen-Einheiten) messen. Hierauf trägt man auf dem Schenkel AC des konstruierten Dreiecks die Strecke AE von 11 L.-E. und auf der Verlängerung des Schenkels BC die Strecke BF ebenfalls von 11 L.-E. ab. Wie lang ist die Strecke EF und wie wird sie von der Basis AB geteilt?

Wegleitung: Hat die halbe Basis x L.-E., so ist

$$x^2 + (2x)^2 = 31^2$$

$$\text{daher } x = \frac{31}{\sqrt{5}} = 6{,}2\sqrt{5}$$

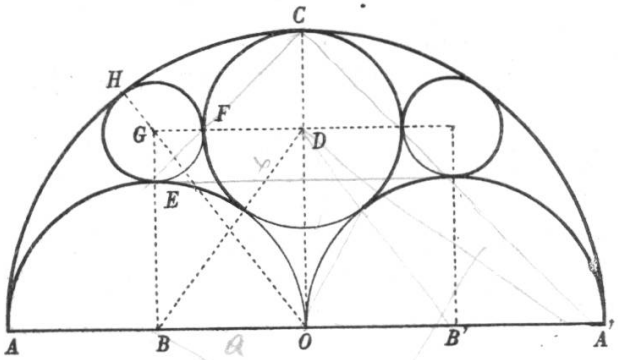
$$AB = CD = 12{,}4\sqrt{5} \text{ L.-E.}$$

Die Gerade AB wird von der Parallelen zu CD durch E in G und von der durch F gehenden zu CD Parallelen in H geschnitten. Wie sind die Dreiecke AGE und BFH beschaffen? Was folgt daraus für die Strecken AB und GH? Die Parallele durch G zu EF schneidet die Gerade HF in I. Wie lang ist daher GI? Wie teilt der Punkt F die Strecke HI? Wie sind die Verhältnisse $EG : EA$ und $CD : CA$ beschaffen? Wie groß ist das letztere? ($0{,}4\sqrt{5}$.) Wie viele L.-E. hat daher EG? ($4{,}4\sqrt{5}$.) Was folgt hieraus für die Maßzahl von GI?

$$EF = GI = \sqrt{(12{,}4\sqrt{5})^2 + (8{,}8\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5\,(3{,}1^2 + 2{,}2^2)}$$
$$= 4\sqrt{72{,}25} = 34 \text{ L.-E.}$$

Wie sind die Dreiecke EGK und FHK beschaffen? Wie teilt daher AB die Strecke EF?

B 12 *(Kr.-Berühr., Pyth., Gl. m. 1 Unb.)*



Gegeben ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser AA'. Man legt in den ersteren Halbkreise mit den Durchmessern AO und $A'O$ (Mittelpunkte B und B'). Gesucht ein Kreis, der alle drei Halbkreise berührt.

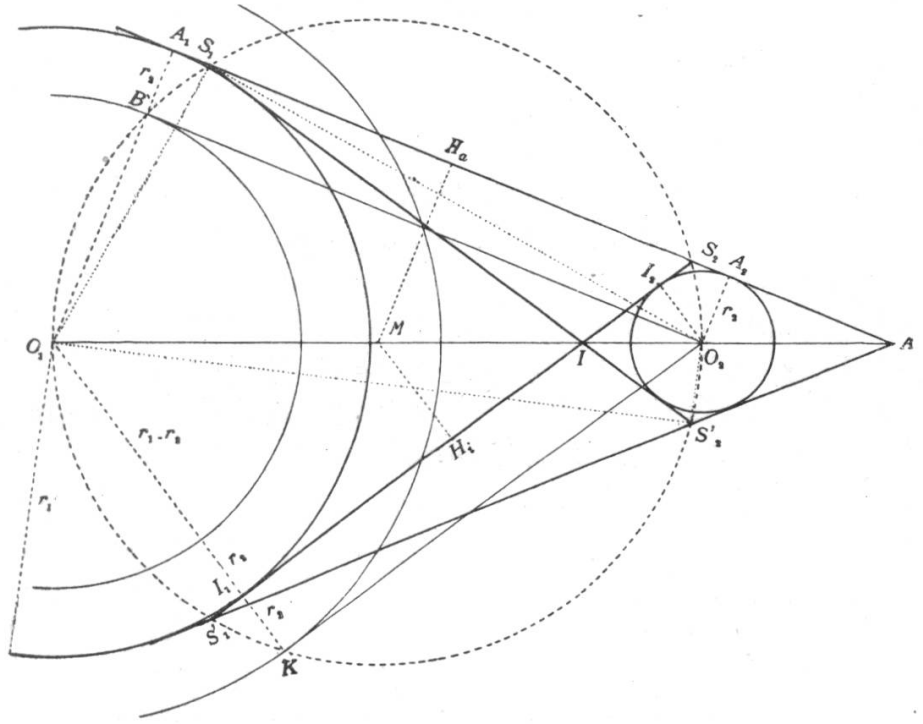
Wegleitung: Zufolge der Symmetrie der Figur zur Mittelnormalen von AA' liegt der Mittelpunkt D des gesuchten Kreises auf dem Radius OC des großen Halbkreises, der zu AA' normal liegt. Die Gerade BD schneidet den Halbkreis um B in dessen Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreis. Im Dreieck BOD ist daher, wenn man die Strecke BO mit a und den gesuchten Kreisradius mit x bezeichnet,

$$(a + x)^2 - (2a - x)^2 = a^2$$
$$\text{oder} \quad 3a(2x - a) = a^2$$
$$\text{somit } x = {}^2/_3\, a = CD,\ BD = {}^5/_3\, a \text{ und } OD = {}^4/_3\, a.$$

Die in B auf AA' errichtete Normale und die zu AA' durch D gelegte Parallele schneiden einander im Punkt G, der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ist, der die Kreise um O, B und D berührt.

Man kann die ganze Figur aus dem rechtwinkligen Dreieck BOD entstehen lassen, dessen Seiten BO, OD und BD sich zueinander wie $3:4:5$ verhalten. Die nachträgliche Verstärkung von Teilen der Kreise läßt das Gerippe romanischen Maßwerkes hervortreten.

B 13 (*Gemeins. Tang. zweier Kr., Pyth., Fl. des Tang.-Polyg.*)



Der Abstand der Mittelpunkte O_1 und O_2 zweier Kreise mit den Radien $r_1 = 32$ L.-E. und $r_2 = 7$ L.-E. beträgt 65 L.-E. Wie groß ist der Umfang u und die Fläche F des von ihren gemeinsamen Tangenten begrenzten konvexen Vierecks?

Wegleitung: Zufolge der Symmetrie der beiden Kreise zur Geraden $O_1 O_2$ liegen auf dieser auch der Schnittpunkt A

der äußern und der Schnittpunkt I der innern gemeinsamen Tangenten. Verschiebt man eine äußere und eine innere gemeinsame Tangente parallel sich selbst, bis sie durch O_2 geht, so hat die erstere den Abstand $r_1 - r_2 = 25$ L.-E. und die letztere den Abstand $r_1 + r_2 = 39$ L.-E. von O_1. Jene berührt den Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ in B und diese den Kreis um O_1 mit dem Radius $r_1 + r_2$ in K. Die Punkte B und K liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser $O_1 O_2$ und dem Mittelpunkt M. $A_1 A_2 = B O_2 = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{90 \,.\, 40} = 60$ L.-E. $I_1 I_2 = K O_2 = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{104 \,.\, 26} = \sqrt{16 \,.\, 13^2} = 52$ L.-E. Bezeichnen S_1, S_2, S_1', S_2' die Schnittpunkte der innern Tangenten mit den äußern, so halbiert $S_1 O_1$ den Winkel $A_1 S_1 S_2'$ und $S_1 O_2$ den Winkel $A_2 S_1 S_2'$, also $\angle\, O_1 S_1 O_2 = 1\, R$. Aus analogen Gründen ist $\angle\, O_1 S_2 O_2 = 1\, R$. Die vier mit S (und angehängten Indizes) bezeichneten Punkte liegen daher auf dem Kreis mit dem Durchmesser $O_1 O_2$. Der Fußpunkt H_a der von M auf $A_1 A_2$ gefällten Normalen (die parallel ist zu $O_1 A_1$) halbiert nicht nur $A_1 A_2$, sondern auch $S_1 S_2$, daher $A_1 S_1 = S_2 A_2$, und der Fußpunkt H_i der von M auf $I_1 I_2$ gefällten Normalen (die parallel ist zu $O_1 I_2$) halbiert sowohl $I_1 I_2$ als auch $S_1' S_2$, daher $S_1' I_1 = I_2 S_2 = A_2 S_2$. Die acht Abstände der mit S bezeichneten Punkte von den ihnen benachbarten Berührungspunkten der vier gemeinsamen Tangenten sind somit gleich lang. $S_1' S_2 = S_1' I_1 + I_1 S_2 = A_1 S_2 + S_2 A_2 = A_1 A_2$. D. h.: Das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück einer der äußern Tangenten ist gleich dem von diesen begrenzten Stück einer innern gemeinsamen Tangente. Deshalb ist auch $S_1 S_2 = I_1 I_2 = 52$ L.-E., mithin $A_1 S_1 = A_2 S_2 = S_2 I_2 = 4$ L.-E. $\triangle\, I O_2 I_2 \sim \triangle\, O_2 O_1 K$ und $\triangle\, A O_2 A_2 \sim \triangle\, O_2 O_1 B$, deshalb

$$II_2 = 7 \,.\, \frac{52}{39} \text{ L.-E. und } AA_2 = 7 \,.\, \frac{60}{25} \text{ L.-E.,}$$

daher der halbe Umfang des Vierecks $A S_2 I S_2'$

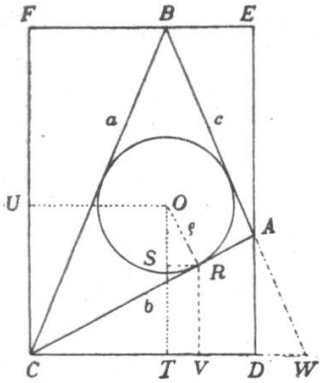
$$s = 7\left(\frac{4}{3} + \frac{12}{5}\right) + 8 = \frac{7 \,.\, 56 + 8 \,.\, 15}{15} = \frac{8\,(49 + 15)}{15} = \frac{512}{15} \text{ L.-E.}$$

Weil die Seiten des Vierecks als Tangenten den Kreis um O_2 einschließen, ist $F = s \,.\, 7$, folglich

$$u = \frac{1024}{15} \text{ L.-E. und } F = \frac{3584}{15} \text{ (L.-E.)}^2.$$

Proben: Sowohl die vier Punkte A als auch die vier Punkte I liegen je auf einem Kreis um M. Die Halbierungspunkte der von den Berührungspunkten begrenzten Stücke der Tangenten liegen auf einer Normalen von $O_1 O_2$.

B 14 *(Dreiecksfl. Pyth., Inkr., Ähnlichk.)*



Beim Rechteck $CDEF$ ist die Seite CD 90 mm und die Seite CF 132 mm lang. Auf der Seite DE liegt 48 mm von D entfernt ein Punkt A und auf der Seite EF 35 mm von E entfernt ein Punkt B. Man berechne:

1. den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC,
2. dessen Seiten a, b, c und die Höhen h_1, h_2, h_3,
3. den Radius ρ seines Inkreises,
4. die Abstände x und y des Inkreismittelpunktes von den Seiten CF und CD des Rechteckes.

Wegleitung:

1. $I = 90 \,.\, 132 - (90 \,.\, 24 + 35 \,.\, 42 + 55 \,.\, 66)$ mm^2
$= 30\,[3 \,.\, 132 - (18 \,.\, 4 + 7 \,.\, 7 + 11^2)] = 30 \,.\, 154 = 4620$ mm^2

2. $a = \sqrt{132^2 + 55^2}$ mm, $b = \sqrt{90^2 + 48^2}$ mm, $c = \sqrt{35^2 + 84^2}$ mm
$a = 11\sqrt{12^2 + 5^2}$ mm, $b = 6\sqrt{15^2 + 8^2}$ mm, $c = 7\sqrt{5^2 + 12^2}$ mm
$a = 143$ mm, $b = 102$ mm, $c = 91$ mm
$h_1 = \frac{60 \,.\, 154}{143}$ mm, $h_2 = \frac{60 \,.\, 154}{102}$ mm, $h_3 = \frac{60 \,.\, 154}{91}$ mm
$h_1 = 64^8/_{13}$ mm, $h_2 = 90^{10}/_{17}$ mm, $h_3 = 101^7/_{13}$ mm

3. Wie erhalten wir den Mittelpunkt O des Inkreises? Wie sind die Abstände der Ecken des Dreiecks von den benachbarten Berührungspunkten des Inkreises beschaffen? Bezeichnet R den Berührungspunkt auf der Seite AC und s den halben Dreiecksumfang, so ist

$$CR = s - c = 168 - 91 \text{ mm} = 77 \text{ mm}.$$

Die Verbindungsgeraden des Punktes O mit den Ecken des Dreiecks zerlegen dieses in drei Dreiecke mit der gemeinsamen Höhe ρ; daher ist

$$I = s\rho,$$
$$\rho = 27^1/_2 \text{ mm}.$$

4. Um die Abstände x und y des Punktes O von CF und CD zu erhalten, fällen wir von O die Normalen OT auf CD und OU auf CF. Die durch R zu CF gezogene Parallele schneidet CD in V und die durch R zu CD gezogene Parallele schneidet OT in S. Nun ist $x = CV - RS = 90 \cdot \frac{77}{102} - 48 \cdot \frac{27^1/_2}{102} = 55$ mm. $y = RV + SO = 48 \cdot \frac{77}{102} + 90 \cdot \frac{27^1/_2}{102} = 60^1/_2$ mm. Was folgt aus der Gleichheit von EB und CT? Man bringe BA mit CD zum Schnitt in W und berechne zur Probe die Strecke $TW = TD + DW$.

$$\left[DW = \frac{35}{84} \cdot 48 = 20.\right]$$

B 15 *Pyth., Kr.-Fl., Quader, Zyl.-Vol.)*

Bei einem geraden, 24 cm hohen, quadratischen Prisma mißt eine Körperdiagonale 25 cm. Wie groß ist sein Rauminhalt? (588 cm³.)

Der Um- und der Inkreis der Basis begrenzen einen Ring. Wie groß ist der Rauminhalt eines über dem Ring stehenden 24 cm hohen Hohlzylinders? ($\pi = {}^{22}/_7$.) (462 cm³.)

B 16 *(Pyth., In- u. Ankr.)*

Die Hypotenuse und die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks unterscheiden sich vom Siebenfachen des vierten Teiles der andern Kathete je um 4 cm. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks und die Radien des Inkreises und des Ankreises, der die Verlängerungen der beiden Katheten berührt?

Wegleitung: Ist die zuletzt genannte Kathete x cm lang, so mißt die andere Kathete $({}^7/_4\,x - 4)$ cm und die Hypotenuse $({}^7/_4\,x + 4)$ cm, somit wird x bestimmt durch die Gleichung

$$({}^7/_4\,x + 4)^2 - ({}^7/_4\,x - 4)^2 = x^2.$$

Weil die auf zwei Seiten des Dreiecks oder auf deren Verlängerungen liegenden Berührungspunkte eines Kreises vom Schnittpunkt der ersteren gleich weit entfernt sind, so bilden die Strecken, die den Schnittpunkt der beiden Katheten mit den beiden Kreismittelpunkten verbinden, die Diagonalen zweier Quadrate, welche die gesuchten Radien zu Seiten haben. Bezeichnet man also die Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c, den Radius des Inkreises mit y und den des Ankreises mit z, so ist

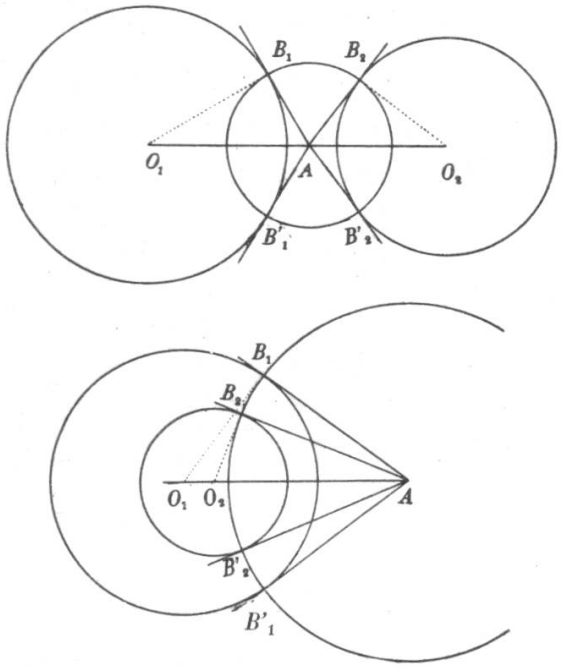
$$a - y + b - y = c$$
$$z - a + z - b = c$$

$$(a = 28,\ b = 45,\ c = 53,\ y = 10,\ z = 63.)$$

B 17 *(Tang., Pyth., Gl. m. 1 Unb.)*

a.

b.



Es seien r_1 und r_2 die Radien zweier Kreise, die keinen Punkt gemein haben, c die Entfernung ihrer Mittelpunkte O_1 und O_2.

1. Es soll auf der Zentralen der beiden Kreise ein Punkt A ermittelt werden, von dem aus an diese vier gleich lange Tangenten, gemessen von A bis zu den Berührungspunkten, gezogen werden können.

2. Es soll O_1A und die Länge der von A ausgehenden Tangenten berechnet werden für den Fall (a), wo $r_1 = 28$ cm, $r_2 = 22$ cm, $c = 60$ cm und für den Fall (b), wo $r_1 = 27$ cm, $r_2 = 15$ cm und $c = 6$ cm ist.

Wegleitung: Es sei $r_1 > r_2$ und es werde O_1A mit x bezeichnet.

Schließen die Kreise einander aus (Fig. a), so liegt der Punkt A zwischen den beiden Kreisen und es sind dann die Quadrate der Tangentenlängen AB_1 und AB_2

$$x^2 - r_1^2 = (c - x)^2 - r_2^2$$

daher $$x = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}$$

Schließt aber der eine Kreis den andern ein (Fig. b), so kann der Punkt A nur auf der Verlängerung der Strecke $O_1 O_2$ über O_2 hinaus liegen, also ist dann

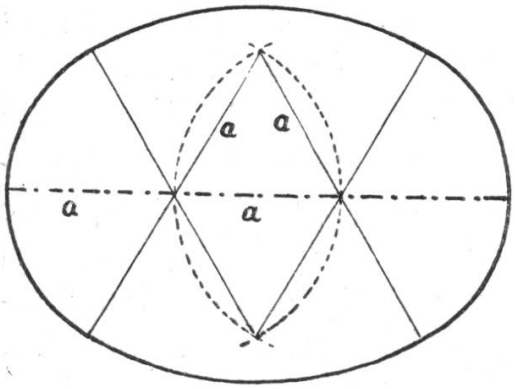
$$x^2 - r_1^2 = (x - c)^2 - r_2^2,$$

woraus sich wieder der oben berechnete Ausdruck für x ergibt.

Nach (2) zu fragen: Welche Lage hat der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AB_1 zu den gegebenen Kreisen?

[(a) $AB_1 = 16^1/_2$ cm, (b) $AB_1 = 36$ cm.]

B 18 *(Fl. des gleichseit. Dreiecks u. des Kr.-Sektors.)*



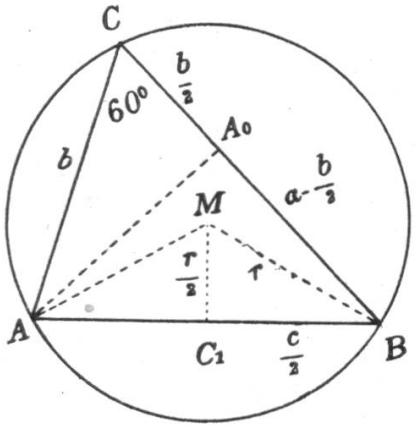
Konstruktion eines Ovals aus Kreisbogen mit dem Radius a und $2a$ nach der Skizze. Wie groß sind Umfang und Inhalt der Figur? Wie lang sind die Symmetrieachsen?

$$\left[\frac{8a\pi}{3}, \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2; \; 3a, \; a\,(4 - \sqrt{3}).\right]$$

B 19 *(Pyth., Periph.-W., Sektorfl.)*

In einem Dreieck ABC seien a und b die Maßzahlen der Seiten BC und AC; der Winkel ABC messe 60°. Man drücke die Maßzahl c der Seite AB, sowie die Maßzahl F der Fläche des über dieser Seite liegenden Segmentes des Umkreises des Dreiecks durch a und b aus.

Wegleitung: Es sei $a > b$. Wir ziehen die Höhe AA_0. Im Dreieck AA_0C mißt die Kathete CA_0 $\frac{b}{2}$, folglich das



Quadrat über AA_0 $b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$; daher ist im rechtwinkligen Dreieck ABA_0

$$c^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$c^2 = a^2 - ab + b^2.$$

Bezeichnet M den Mittelpunkt, r die Maßzahl des Radius des Umkreises und C_1 den Halbierungspunkt der Seite AB, so ist im Dreieck BMC_1 der Winkel bei M 60°, daher

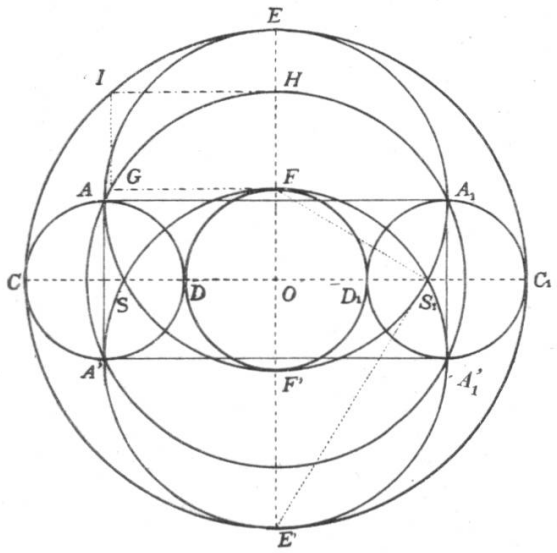
$$r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{c^2}{3} \text{ und } r = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Die Fläche des Kreissektors AMB ist $\frac{\pi}{3} r^2$, die Fläche des Dreiecks AMB $\frac{cr}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{12}$, mithin

$$F = \frac{\pi}{9} c^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} c^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36}(a^2 - ab + b^2).$$

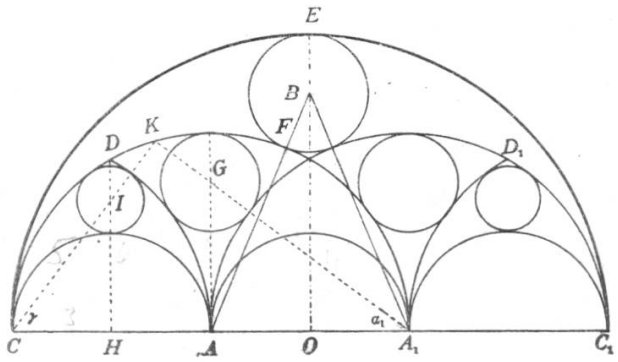
B 20 (*Kr.-Berühr., Kr.-Fl., Hyp. u. Höh.-Quadr.*)



$AA_1A_1'A'$ seien die Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten die Maßzahlen $2x$ und $2y$ haben, wo $x > y$ ist. Wir legen um alle vier Seiten als Durchmesser Kreise. Die beiden kleineren schneiden die zu den längeren Seiten parallele Symmetrieachse des Rechteckes in den Punkten C und D, C_1 und D_1, während die beiden

größeren Kreise die zu den kürzeren Seiten parallele Symmetrieachse des Rechteckes in den Punkten E und F', E' und F schneiden. Sowohl OC und OC_1, als auch OE und OE' messen $(x+y)$ L.-E., deshalb berührt ein Kreis um O, dessen Radius $(x+y)$ L.-E. hat, die vier vorhin genannten Kreise umschließend. $OD = (x-y)$ L.-E. Weil $OF = E'F - E'O$, so messen OF und OF' $2x - (x+y) = (x-y)$ L.-E.; mithin berührt ein Kreis um O, dessen Radius $(x-y)$ L.-E. hat, die Kreise mit den Durchmessern AA' und A_1A_1' von außen und die Kreise mit den Durchmessern AA_1 und $A'A_1'$ von innen. Wie viele L.-E. mißt der Radius des Umkreises des Rechtecks? Wie teilt dieser Kreis die Fläche des Ringes, der von den Kreisen mit den Durchmessern CC_1 und DD_1 begrenzt wird? Wenn wir die Tangente mit dem Berührungspunkt F mit dem Umkreis des Rechtecks in G und die Tangente, die den zuletzt genannten Kreis in H berührt, mit dem Kreis um CC_1 in I schneiden, welche Maßzahlen haben dann die Strecken FG und HI? Wie groß ist schließlich der Abstand der Schnittpunkte S und S_1 der um die größeren Rechteckseiten gelegten Kreise vom Mittelpunkt des Rechtecks? [$FG = HI = \sqrt{2xy}$, $OS = OS_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$.]

B 21 *(Kr.-Berühr., Pyth., Gl. m. 1 Unb., Ähnlichk.)*



Das Gerippe des Maßwerkes eines Kirchenfensters in Florenz ergibt sich aus einem gleichschenkligen Dreieck AA_1B bei dem Verhältnis das des Schenkels AB zur Basis AA_1 $^{13}/_{10}$ ist, indem man um A durch A_1 einen Halbkreis A_1C und um A_1 durch A einen Halbkreis AC_1 legt. Um C und C_1

legen wir mit dem Radius AA_1 die Kreisbogen AD und A_1D_1. Der um den Halbierungspunkt O der Basis AA_1 durch C gelegte Halbkreis endigt in C_1 und schneidet die Gerade OB in einem Punkt E. Wählen wir den zehnten Teil von AA_1 als Maßeinheit, so hat AB die Maßzahl 13, OB die Maßzahl 12 und OE die Maßzahl 15. Der Schenkel AB wird vom Kreis um A im Punkt F geschnitten. Da die Strecken BE und BF die Maßzahl 3 haben, berührt der Kreis um B durch E die Halbkreise um A und A_1.

Es soll nun ein Kreis gelegt werden, der die von A ausgehenden Kreisbogen von außen und den Halbkreis um A von innen berührt. Sein Mittelpunkt G liegt auf der in A auf CC_1 errichteten Normalen. Ist x die Maßzahl seines Radius, so haben die Seiten GA, AA_1 und A_1G des rechtwinkligen Dreiecks GAA_1 der Reihe nach die Maßzahlen $10 - x$, 10 und $10 + x$, folglich besteht die Gleichung

$$(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 10^2,$$

aus der sich

$$x = 2^1/_2$$

ergibt. Es hat daher GA $7^1/_2$, AA_1 10 und A_1G $12^1/_2$ L.-E., d. h. es verhält sich

$$GA : AA_1 : A_1G = 3 : 4 : 5.$$

Wir beschreiben jetzt über CA, AA_1 und A_1C_1 als Durchmesser Halbkreise und bestimmen einen Kreis, der den Halbkreis über CA von außen und die Kreisbogen CD und AD von innen berührt. Bezeichnen wir den Halbierungspunkt von CA mit H, den Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit I und die Maßzahl seines Radius mit y, so haben die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks CHI der Reihe nach die Maßzahlen 5, $5 + y$ und $10 - y$; somit ist

$$5^2 + (5 + y)^2 = (10 - y)^2$$
$$y = {}^5/_3.$$

Die soeben genannten Maßzahlen haben also die Werte 5, $^{20}/_3$, $^{25}/_3$; d. h. es verhält sich

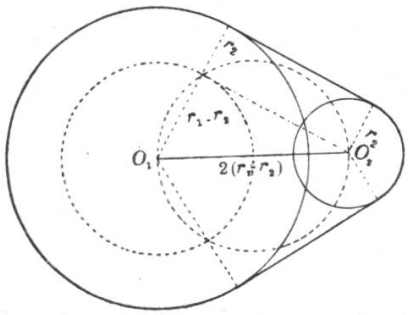
$$CH : HI : IC = 3 : 4 : 5.$$

Somit $\triangle CHI \sim \triangle GAA_1$;

die Winkel γ und α_1 sind komplementär. Die beiden Geraden CI und A_1G schneiden einander in einem Punkt K des Halbkreises um A; überdies ist das Dreieck CKA_1 den vorhin genannten Dreiecken ähnlich, weshalb $CK = {}^3/_5\ CA_1$ ist, also die Maßzahl 12 hat und daher ebenso lang wie OB ist. Damit ist der Punkt K bestimmt, dessen Verbindungslinien mit C und A, bezw. aus den in H und A errichteten Normalen von CC_1 die Punkte I und G ausschneiden.

Man zeige umgekehrt auf Grund dieser Konstruktion, daß die Kreise um I und G den gestellten Anforderungen genügen.

B 22 *(Gemeins. Tang. 2er Kr., Pyth., Trapezfl., Kr.-Berechn.)*



Der Abstand der Mittelpunkte O_1 und O_2 zweier Kreise ist gleich dem doppelten Unterschied ihrer Radien r_1 und r_2 ($r_1 > r_2$). Man drücke durch diese die Fläche F und den Umfang u des nirgends konkaven Flächenstückes aus, das von den äußeren gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise und den zwischen deren Berührungspunkten befindlichen Bogen begrenzt wird.

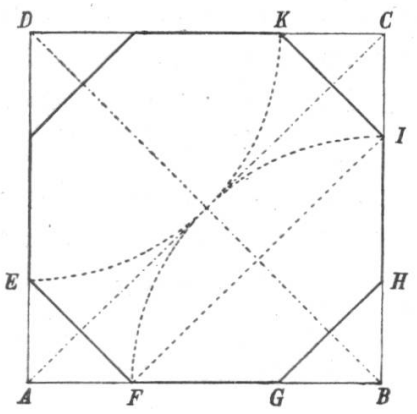
Wegleitung: Konstruktion der äußeren gemeinsamen Tangenten mit Hilfe des Kreises um O_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ und des Kreises mit dem Durchmesser O_1O_2. Beim Dreieck mit der Hypotenuse O_1O_2 und der einen Kathete $r_1 - r_2$ ist die andere Kathete $(r_1 - r_2)\sqrt{3}$ und gleich einer äußeren gemeinsamen Tangente; der kleinere spitze Winkel des Dreiecks beträgt 30^0. Hieraus ergibt sich

$$u = 2\,(r_1 - r_2)\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi\,(2\,r_1 + r_2)$$

$$F = (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2)\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\,(2\,r_1^2 + r_2^2).$$

B 23 *(Regul. Achteck, Vol. u. Gew. des Prismas)*

Welches Gewicht hat auf 1 kg genau eine 4 m hohe Säule aus Granit von der Dichte 2,75, deren Basis ein regelmäßiges Achteck ist, dessen Gegenseiten 50 cm Abstand haben?



Wegleitung: Die Ecken eines Achteckes mit dem Gegenseitenabstand b werden aus den Seiten eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge b durch Kreise herausgeschnitten, die um die Ecken des Quadrates durch seinen Mittelpunkt O gelegt werden. Sind $EFGHIK$ aufeinanderfolgende Ecken des Achteckes, so ist FI gleich b. Die Diagonale des Quadrates übertrifft somit b an Länge um die Achteckseite x; folglich ist $x = b\,(\sqrt{2} - 1)$. Die vier gleichschenkligen Dreiecke, die das Achteck zum Quadrat $ABCD$ ergänzen, können zu einem Quadrat mit der Seite x zusammengeschoben werden. Es ist daher die Fläche des Achteckes

$$F = b^2 - x^2 = 2\,b^2\,(\sqrt{2} - 1),$$

folglich das Gewicht der Säule

$$G = 2\,.\,5^2\,(\sqrt{2} - 1)\,.\,40\,.\,2{,}75 \text{ kg} = 5500\,(\sqrt{2} - 1) \text{ kg}.$$

Weil das Resultat auf kg genau sein soll, müssen wir $\sqrt{2}$ auf 4 Dez.-Stellen ausrechnen und erhalten

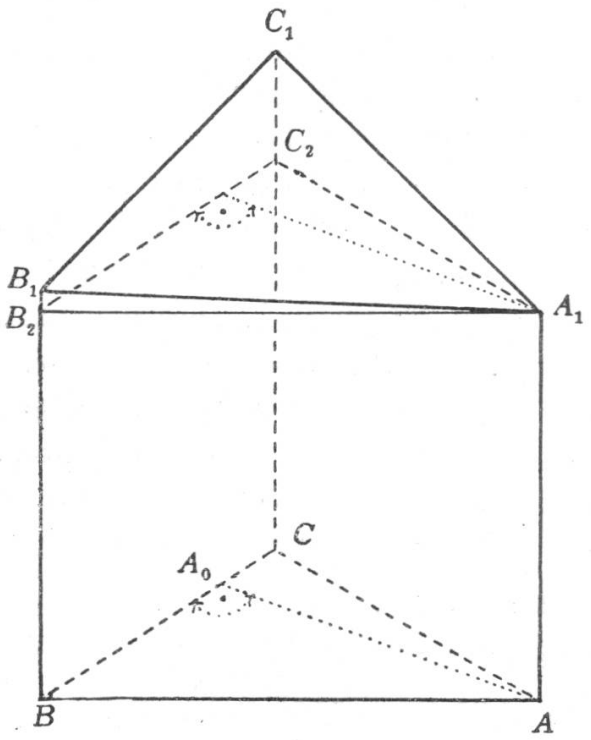
$$G = 5500\,.\,0{,}4142 \text{ kg} = 2278 \text{ kg}.$$

B 24 (*Vol. u. Gew. des Prismas u. der Pyr., Gl. m. 1 Unb.*)

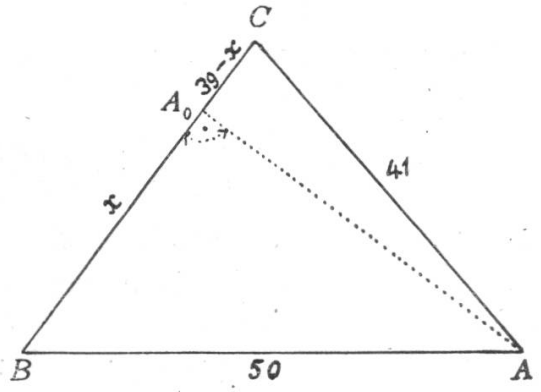
Ein senkrechtes, jedoch oben schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma $ABCA_1B_1C_1$ (Fig. a) aus Eisen von der Dichte 7,5 hat die Grundkanten $AB = 5$ cm, $BC = 3{,}9$ cm, $CA = 4{,}1$ cm. Jede Seitenkante ist ebenso lang wie die ihr gegenüberliegende Grundkante. Wie viel wiegt dieser Körper?

Wegleitung: Wir zerlegen den Körper durch einen ebenen Schnitt, den wir durch den oberen Endpunkt A_1 der kürzesten Seitenkante legen, in das senkrechte dreiseitige Prisma $ABC\,A_1B_2C_2$ und in die vierseitige Pyramide, deren Grundfläche das Trapez $B_2C_2C_1B_1$ und deren Spitze der Punkt A_1 ist. Die Seitenfläche $B_2C_2A_1$ dieser Pyramide liegt normal zu deren Grundfläche; die von A_1 auf B_2C_2 gefällte Normale,

gemessen von A_1 bis zu ihrem Fußpunkt, ist daher nicht nur die Höhe des Dreiecks $B_2C_2A_1$, sondern zugleich die Höhe der Pyramide. Da aber die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_2C_2$ kongruent sind, so ist die Höhe des letzteren gleich der Höhe AA_0 des ersteren. Das Dreieck ABC ist in Fig. b, deren Maßzahlen sich auf Milimeter beziehen, in wahrer Gestalt gezeichnet. Um die Strecke AA_0 zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Maßzahl x der Strecke BA_0. Für die Maßzahl des Quadrates über der gemeinsamen Seite der Dreiecke AA_0B und AA_0C erhalten wir die Gleichung $5^2-x^2=4{,}1^2-(3{,}9-x)^2$ woraus sich $x=3$ und daher $AA_0=4$ cm ergibt. Das Dreieck ABC hat somit einen Flächeninhalt von 7,8 cm² und das Prisma $ABCA_1B_2C_2$ einen Rauminhalt von 7,8 . 3,9 cm³ = 30,42 cm³. Die Grundfläche der Pyramide ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $B_1B_2 = 0{,}2$ cm und $C_1C_2 = 1{,}1$ cm und der Höhe $B_2C_2 = 3{,}9$ cm, das $\frac{1{,}3}{2}$. 3,9 cm² mißt. Die Pyramide hat folglich einen Rauminhalt von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}3}{2} \cdot 3{,}9 \cdot 4$ cm³ = 3,38 cm³. Das Gewicht des ganzen Körpers beträgt (30,42 + 3,38) 7,5 g = 253½ g.



a



b

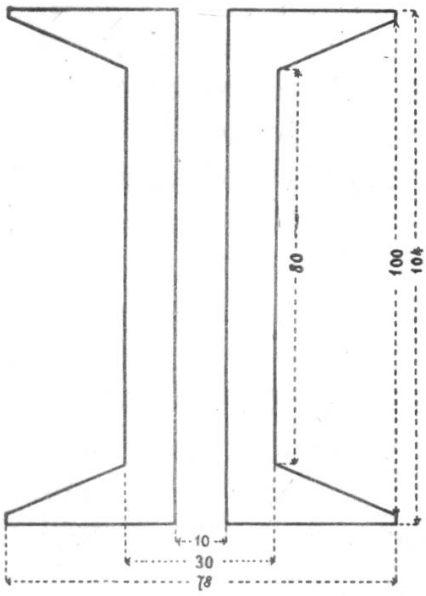
(Die Probe nach der Formel $V = F \cdot \frac{p+q+r}{3}$ für den Rauminhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas mit der Normalschnittfläche F und den Seitenkanten p, q, r ergibt $V = 7{,}8 \cdot \frac{5+3{,}9+4{,}1}{3} = 33{,}8$.)

B 25 *(Sektor- u. Kr.-Fl., Pyth., ähnl. Dreiecke)*

Ein Sektor, dessen Radius 53 cm mißt, wird von einem 176 cm langen Kreisbogen begrenzt. Er wird durch Aneinanderlegen der ihn begrenzenden Radien zum Mantel eines Kegels zusammengebogen. Wie groß ist der Mantel M und der Rauminhalt V des Kegels? ($\pi = {}^{22}/_{7}$.) [$M = 4664$ cm², $V = 36\,960$ cm³.]

Wenn man den Kegel durch eine 15 cm von der Spitze abstehende Ebene parallel zur Grundfläche in zwei Körper zerschneidet, was ist dann der Rauminhalt des kleineren Körpers für ein Bruchteil von dem des größeren? (${}^{1}/_{26}$.)

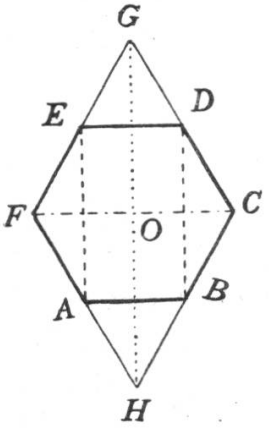
B 26 *(Vol. u. Gew. des Zyl. u. Kegelstumpfes)*



Es soll auf Gramm genau das Gewicht einer Spule aus Steinbuchenholz (Dichte 0,679) bestimmt werden, deren Achsenschnitt die Figur darstellt, wo die beigesetzten Maßzahlen sich auf Millimeter beziehen. ($\pi = \frac{22}{7}$.)

[79 g.]

B 27 *(Mantel, Vol. u. Gew. des Kegels, Zyl.-Mantel, Rechn. m. Näherungswerten)*



Man konstruiert ein regelmäßiges Sechseck von 1 dm Seitenlänge $ABCDEF$ und läßt es um die normal zu AB liegende Symmetrieachse rotieren.

1. Man beschreibe den entstehenden Rotationskörper und berechne seinen Rauminhalt.

Wegleitung: Wenn man CD und FE bis zum Schnitt in G, ferner CB und FA bis zum Schnitt in H verlängert, erhält man den Rhombus $FHCG$, durch dessen Rotation um GH der Doppelkegel mit den Spitzen G und H entsteht, dessen Basis die Fläche des Kreises um O durch C ist. Höhe des einfachen Kegels $\sqrt{3}$ dm, Rauminhalt $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ dm³. Der Kegel, der durch Rotation des Dreiecks EDG entsteht, hat $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$ dm³; somit ist der Rauminhalt des zu berechnenden Rotationskörpers $2\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)=\frac{7}{12}\pi\sqrt{3}$ dm³.

2. Man stelle sich vor, der Rotationskörper sei aus Holz von der Dichte 0,6 hergestellt und hierauf der Zylinder, der durch die Rotation des Rechtecks $ABDE$ um GH entsteht, herausgedreht worden. Wie groß ist die Oberfläche S des übrig bleibenden Ringes auf 1 mm² und sein Gewicht P auf 1 g genau?

Wegleitung: Die Oberfläche des Körpers besteht aus den Mänteln zweier Kegelstumpfe und aus einem Zylindermantel. Was entsteht durch Abwicklung eines Kegelmantels? Wie berechnet man die Fläche eines Kreissektors? Der durch die Rotation des Dreiecks FCG entstehende Kegel hat die Mantelfläche 2π dm²; die Mantelfläche des aus EDG entstehenden Kegels mißt $\frac{\pi}{2}$ dm², daher die des Ringes $2\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=3\pi$ dm². Der Zylindermantel mißt $\pi\sqrt{3}$ dm². Somit ist die Gesamtoberfläche des Ringes

$$S = (3\pi + \pi\sqrt{3})\ \mathrm{dm}^2.$$

Der Zylinder hat den Rauminhalt $\frac{\pi}{4}\sqrt{3}\ \mathrm{dm}^3$; der Ring mißt somit $\frac{7}{12}\pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{dm}^3$.

Ein Kubikdezimeter Wasser wiegt 1 kg, ein Kubikdezimeter Holz 0,6 kg. Folglich beträgt das Gewicht des Ringes

$$P = 0{,}6 \,.\, \frac{\pi}{3}\sqrt{3} = 0{,}2\,\pi\sqrt{3}\ \mathrm{kg}.$$

Wir haben S auf 4 und P 3 Dez.-Stellen zu bestimmen, müssen daher π auf 5 Dez.-Stellen genau kennen und $\sqrt{3}$ ebenso genau ausrechnen. $\pi = 3{,}14159$, $\sqrt{3} = 1{,}73205$, $\pi\sqrt{3} = 5{,}4414$, $3\pi = 9{,}4248$, daher $S = 14{,}8662\ \mathrm{dm}^2$, $P = 1{,}088$ kg.

B 28 *Diagonale u. Vol. des Quaders, Kugelvol.)*

Welchen Durchmesser muß eine hölzerne Kugel mindestens haben, damit man aus ihr einen Quader herausschneiden kann, dessen Kanten 8 cm, 11 cm und 16 cm messen? Wie viel Prozent des Rauminhaltes der Kugel beträgt in diesem Fall der Rauminhalt des Quaders? $\pi = {}^{22}/_{7}$.

Wegleitung: Der Minimaldurchmesser der Kugel d ist gleich der Körperdiagonale des Quaders, somit

$$d^2 = 64 + 121 + 256 = 441$$
$$d = 21\ \mathrm{cm},$$

daher in diesem Fall das Verhältnis des Quader- zum Kugelvolumen

$$\frac{8 \,.\, 11 \,.\, 16}{\frac{22}{42} \cdot 21^3} = \frac{128}{441} = 0{,}29 \text{ oder } 29\,\%.$$

B 29 *(Kugelvol., Auftrieb)*

Eine Schale aus Aluminium von der Dichte 2,56 hat die Gestalt einer hohlen Halbkugel von 1 dm äußerem Durchmesser und 5 mm Dicke.

1. Schwimmt die Schale im Wasser oder sinkt sie unter?
2. Wie viele Einfrankenstücke kann sie höchstens aufnehmen, soll sie nicht untersinken?

Wegleitung: 1. Sie schwimmt leer oder sinkt unter, je nachdem

$$^2/_3\,\pi\,(50^3 - 45^3)\;2{,}56 \gtrless {}^2/_3\,\pi\,.\,50^3$$
$$\text{oder } 50^3\,.\,1{,}56 \gtrless 45^3\,.\,2{,}56$$
$$10^3\,.\,39 \gtrless 9^3\,.\,64.$$
$$39000 < 729\,.\,64,$$

somit schwimmt die leere Schale im Wasser.

2. Die obere Grenze G des Gewichtes, das die Schale tragen kann, ohne im Wasser unterzusinken, wird bestimmt durch die Gleichung:

$$^2/_3\,\pi\,(50^3 - 45^3)\;2{,}56 + G = {}^2/_3\,\pi\,50^3$$
$$G = {}^2/_3\,\pi\,[45^3\,.\,2{,}56 - 50^3\,.\,1{,}56]\ \text{mg}$$
$$G = 10\,\pi\,(243\,.\,64 - 10^3\,.\,13)\ \text{mg} = 80{,}17\ \text{g}.$$

Da ein Frankenstück 5 g wiegt, so kann die Schale 16 Einfrankenstücke aufnehmen, ohne im Wasser unterzusinken.

Abkürzungen.

Berühr.	für	Berührung
Fl.	„	Fläche
Gew.	„	Gewicht
Gl.	„	Gleichung
Hyp.	„	Hypotenuse
Kr.	„	Kreis
m.	„	mit
Periph.	„	Peripherie
Pyr.	„	Pyramide
Pyth.	„	Pythagoräischer Lehrsatz
Quadr.	„	Quadrat
reg.	„	regelmäßig
Tang.	„	Tangente
Unb.	„	Unbekannte
Vol.	„	Volumen
W.	„	Winkel
Zyl.	„	Zylinder