Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 41 (1916)

Artikel: Note sur la théorie analytique des corps solides cotés [suite]
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742624

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

NOTE SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

CORPS SOLIDES COTÉS

PAR

C. CAILLER

(Suite [1])

Polyséries de Droites et de Corps non cotés

§ 20. Parmi les corps d'une n-série, ceux dont la cote est nulle sont naturellement les plus intéressants ; ces corps sont au nombre de ∞^{n-1}, puisque, à la définition (47) de la n-série, il faut ajouter la condition quadratique qui exprime la nullité de la cote, c'est-à-dire

$$\sum_k u_k^2 \omega_k = 0 .$$

Nous voyons donc que les corps de cote nulle forment une $(n-1)$-série ; et il en serait aussi de même pour les corps de la n-série qui ont une cote constante, car on voit presque immédiatement que si l'on diminue d'une constante la cote de tous les corps d'une n-série, les nouveaux corps obtenus font encore partie d'une n-série linéaire ([2]).

Dans l'étude des $(n-1)$-séries de corps non cotés il est avantageux de choisir pour base des corps qui ne soient pas cotés ; au lieu de représenter ces $n+1$ corps, comme précédemment, par les lettres ${}^1A$, ${}^2A$, ... ${}^{n+1}A$ j'emploierai plus simple-

[1]) Voir *Archives*, t. XL, p. 361 et 457.

[2]) Cela se voit, par exemple, immédiatement dans la formule (46).

ment les lettres $A, B, \ldots L$. Les corps ainsi dénotés sont *ordinaires* et l'on a $(AA)'' = (BB)'' = \ldots = 0$; nous allons voir qu'ils peuvent être pris quelconques, de manière à engendrer une $(n-1)$-série de corps ordinaires [1]

$$P = aA + bB + cC + \ldots lL \,. \tag{49}$$

En effet, il faut que $(PP)'' = 0$; cette équation se réduit, par la destruction spontanée des termes carrés, à la forme

$$ab(AB)'' + ac(AC)'' + bc(BC)'' + \ldots = 0 \,; \tag{50}$$

elle est linéaire par rapport à chacune des (n + 1) *variables* $a, b, c, \ldots$ Celles-ci peuvent donc s'exprimer linéairement en fonction de n nouveaux paramètres liés par la relation quadratique non homogène

$$(PP)' = a^2(AA)' + 2ab(AB)' + \ldots = 1 \,.$$

De là le théorème fondamental. *De même que* (n + 1) *corps cotés quelconques définissent une* n-*série linéaire de corps cotés, de même* (n + 2) *corps ordinaires quelconques déterminent une* n-*série linéaire de corps ordinaires* [2].

Ce théorème, transposé dans le domaine de la Géométrie réglée en substituant des bivecteurs aux quaternions $A, B, \ldots$, correspond aux faits connus ; il faut 3 droites pour définir une quadrique (monosérie linéaire de droites), 4 pour engendrer une congruence linéaire (bisérie), enfin 5 pour engendrer le complexe linéaire (trisérie). Seuls les maximas de l'indice n diffèrent pour les deux théories, il est 3 pour les systèmes de droites et 5 pour les systèmes de corps; tout le reste est identique. Par exemple, dans le cas des monoséries, en rapportant les trois corps de base à l'orthogonal commun, ils se transforment en vecteurs, et la monosérie elle-même se change en une monosérie de droites. Donc *on obtient la monosérie de corps la*

[1]) Les lettres $a, b, c, \ldots$ désignant des coordonnées sont naturellement réelles.

[2]) Remarquer que cet énoncé ne préjuge en aucune manière l'identité de structure géométrique des n-séries linéaires de corps ordinaires ou de corps cotés.

plus générale en prenant les symétriques d'un corps fixe relativement aux génératrices d'un demi-hyperboloïde réglé.

En terminant ce paragraphe revoyons, pour être clair, les faits de la Géométrie des corps qui répètent le plus exactement ceux bien connus de la Géométrie réglée.

1° Considérons, au lieu du complexe, la pentasérie générale

$$\alpha_0''A_0' + \alpha_0'A_0'' + \alpha_1''A_1' + \ldots = 0 , \qquad \text{ou} \qquad (\alpha A)'' = 0 ;$$

elle est spéciale si le corps central

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_k' \\ \alpha_k'' \end{Bmatrix}$$

vérifie la condition $(\alpha\alpha)'' = 0$. Cela posé, prenons deux corps non cotés B et C, nous les dirons *conjugués* par rapport à la pentasérie lorsqu'on peut déterminer deux coefficients numériques b et c de telle manière qu'on ait identiquement

$$bB + cC = \alpha . \tag{51}$$

Je dis que *tout corps B admet un conjugué et un seul.* En effet, la condition (51), écrite sous la forme $\alpha - bB = cC$, montre que $\alpha - bB$ doit être non coté; il faut et suffit pour cela que b vérifie la condition

$$(\alpha - bB, \alpha - bB)'' = (\alpha\alpha)'' - 2b(\alpha B)'' + b^2(BB)'' = 0 ;$$

mais comme $(BB)'' = 0$, cette condition s'écrit encore

$$(\alpha\alpha)'' - 2b(\alpha B)'' = 0 .$$

C'est une équation linéaire en b, par laquelle l'inconnue se trouve déterminée d'une manière unique; il n'y a d'exception que si B appartenait lui-même à la pentasérie, et vérifiait la condition $(\alpha B)'' = 0$.

2° Ayant choisi à volonté un couple de corps conjugués B et C, l'équation de la pentasérie $(\alpha A)'' = 0$ s'écrit sous la forme

$$b(AB)'' + c(AC)'' = 0 .$$

De là résulte que si un corps A, appartenant à la pentasérie, rencontre un corps quelconque B, c'est-à-dire s'il peut être amené sur B par une simple rotation, il rencontre aussi le conjugué de B.

En effet les conditions de rencontre $(AB)'' = 0$, et $(AC)'' = 0$, s'impliquent l'une l'autre en vertu de l'équation précédente.

3° Une pentasérie de corps est définie par le moyen du *corps central* ou quaternion α; il y a donc correspondance univoque entre ces deux objets géométriques, corps cotés et pentaséries de corps ordinaires, et cette correspondance permet de conclure des uns aux autres. C'est ainsi, par exemple, qu'aux polyséries linéaires de corps cotés correspondent des systèmes de pentaséries linéaires ; de même, en Géométrie réglée, les polyséries de droites cotées servent d'images aux polyséries corrélatives de complexes linéaires.

Prenons une tétrasérie, ou ce qui revient au même, deux pentaséries de corps simples, $A = (\alpha A)'' = 0$, $B = (\beta A)'' = 0$. La tétrasérie en question a pour image une monosérie de corps cotés γ, d'équation

$$\gamma = a\alpha + b\beta .$$

Mais nous savons que la monosérie γ contient tout juste deux corps de cote nulle[1] ; et on pourrait les prendre pour base des deux pentaséries A et B. S'il en est ainsi, on a $(\alpha\alpha)'' = (\beta\beta)'' = 0$; alors les équations $(\alpha A)'' = 0$, $(\beta A)'' = 0$ montrent qu'une *tétrasérie quelconque est formée par l'ensemble des corps qui en rencontrent deux autres*. Ainsi, en Géométrie réglée, la congruence linéaire est l'ensemble des sécantes communes à deux droites.

De même encore, les corps d'une trisérie sont ceux qui rencontrent trois corps fixes donnés; cette définition donnera la même trisérie ∞^1 fois parce que ∞^1 est le nombre des corps de cote nulle dans la bisérie de corps cotés.

En résumé, tandis que sauf exception, la pentasérie n'est

[1]) Ces corps peuvent être réels ou imaginaires; la distinction, importante pour la classification des tétraséries, ne joue aucun rôle dans la théorie générale.

pas formée des corps sécants d'un corps donné, en revanche la n-série d'indice $n < 5$ est toujours constituée par l'ensemble des corps sécants de $6 - n$ corps fixes ; il est vrai que ces derniers peuvent être réels ou imaginaires.

4° Prenons par exemple une trisérie de corps et soient $B, C, D,$ les trois corps fixes que rencontrent tous les A. Les équations $(AB)'' = (AC)'' = (AD)'' = 0$ entraînent comme conséquence que, quels que soient les coefficients b, c, d, nous avons

$$(A, bB + cC + dD)'' = 0 .$$

Ainsi les corps de la trisérie sont en involution avec tous les corps cotés de la bisérie $bB + cC + dD$; cette dernière contient une monosérie linéaire de corps à cote nulle. La trisérie donnée et la monosérie finale sont donc *complémentaires,* en ce sens que deux corps empruntés respectivement à chacune sont toujours concourants, ou se déduisent l'un de l'autre par une pure rotation.

5° Le corps coté α est équivalent à une pentasérie de corps simples. Soient donc deux pentaséries α et β ; supposons que les corps cotés correspondants soient en involution, ou vérifient la condition $(\alpha\beta)'' = 0$. Voici la relation qui s'ensuit pour les pentaséries elles-mêmes.

Si B et C sont deux corps conjugués relativement à la seconde pentasérie et que par suite $\beta = bB + cC,$ on a

$$(\beta\alpha)'' = b(\alpha B)'' + c(\alpha C)'' .$$

Or, par hypothèse, cette quantité est nulle ; si donc B appartient à la pentasérie α, on aura $(\alpha B)'' = 0$, d'où $(\alpha C)'' = 0$; C appartient aussi à la pentasérie α. Autrement dit : *si deux pentaséries α, β sont en involution, les corps de chacune d'elles peuvent être groupés en couples de corps qui sont conjugués par rapport à l'autre.*

VIII. Systèmes de Corps Concourants

§ 21. Nous avons d'abord étudié les systèmes linéaires de corps cotés, que ces systèmes se présentent sous forme d'équations ou sous forme paramétrique ; nous avons ensuite examiné les systèmes linéaires formés de corps ordinaires non cotés. La différence la plus saillante entre les deux catégories de polyséries est que, dans le premier cas, $n + 1$ corps linéairement indépendants déterminent une n-série, tandis qu'il en faut $(n + 2)$ pour la seconde espèce.

Toutefois cette dernière assertion n'est exacte que si on raisonne d'une manière générale, comme il a été fait au paragraphe précédent. La géométrie réglée, avec ses systèmes linéaires particuliers, les *gerbes*, les *faisceaux*, etc., qui jouent un rôle singulier parmi tous les systèmes linéaires, fait pressentir des exceptions. Elles existent en effet dans la Géométrie des corps solides, et donnent lieu à des polyséries particulières auxquelles je donne le nom générique de *couronnes* (1). Les couronnes comprennent, comme nous verrons, quatre types essentiellement différents qui sont la *couronne* ordinaire, le *couronoïde*, la *stéréocouronne à centre*, et la *stéréocouronne à plan* (2).

Soient $A, B, C, \ldots L$, $(n + 1)$ corps ordinaires ; la polysérie

$$P = aA + bB + cC + \ldots + lL \,, \tag{52}$$

1) Le cas des couronnes est seulement le cas extrême de toutes les exceptions possibles.

2) Ces *couronnes* sont identiques aux systèmes que M. L. Kasner appelle des *turbines*. *American Journal* 1910, p. 193-202. Cité par M. E. Study ; je suis hors d'état de vérifier cette indication.

La nomenclature la plus rationnelle donnerait les noms de mono-, bi-, tricouronne à centre et à plan, lesquels rappellent le nombre des dimensions de ces systèmes ; mais cette terminologie ne peut être adoptée puisqu'elle amènerait des confusions avec celle employée par M. de Saussure. D'autre part, le terme de *couronoïde* est aujourd'hui trop répandu pour pouvoir être remplacé.

ne donne un corps simple ordinaire que si

$$\frac{1}{2}(PP)'' = ab(AB)'' + ac(AC)'' + bc(BC)'' + \ldots = 0 . \qquad (53)$$

Or cette équation, qui n'est que la reproduction de (50), dégénère en une identité, quand on a

$$(AB)'' = 0 , \qquad (AC)'' = 0 , \qquad (BC)'' = 0 , \ldots$$

Dans ce cas, qui est celui où les corps de base se rencontrent deux à deux, ou se déduisent les uns des autres par simple rotation, la formule (52), dans laquelle les coefficients ont à vérifier la condition

$$(PP)' = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + 2ab(AB)' + \ldots = 1 ,$$

représente de nouveau une n-série de corps ordinaires, si du moins, ce que je suppose toujours, les $(n + 1)$ corps $A, \ldots L$ sont linéairement indépendants. Les polysériés de cette espèce sont précisément ce que j'appelle des *couronnes*.

Remarquons d'ailleurs que si $A, \ldots L$ se rencontrent deux à deux, tous les corps de la polysérie (52) sont aussi concourants : la chose est évidente d'après les relations telles que $(AA)'' = 0$, $(AB)'' = 0$, etc. Ainsi, avec plusieurs corps concourants, il est toujours possible de construire des ensembles infinis de corps qui soient aussi concourants deux à deux. L'énumération des couronnes, donnée plus haut, épuise toutes les éventualités que présentent ces systèmes infinis.

La *couronne* simple est un ensemble de ∞^1 corps concourants deux à deux, telle qu'entre trois de ces corps existe une relation linéaire.

Le *couronoïde* est un système de ∞^2 corps concourants deux à deux, tel qu'entre quatre de ces corps existe une relation linéaire.

Enfin la *stéréocouronne,* de l'une ou l'autre espèce, est un système de ∞^3 corps concourants deux à deux, tel qu'entre cinq de ces corps existe une relation linéaire.

Pour définir et construire ces systèmes un problème préliminaire doit tout d'abord être résolu.

Autour d'une droite

$$L = \left\{ \begin{matrix} L_k' \\ L^{k''} \end{matrix} \right\} .$$

imprimons à un corps A un mouvement hélicoïdal d'amplitude $u = a + bi$; de même, soumettons ce même corps A à un autre mouvement d'amplitude $v = c + di$, autour d'une nouvelle droite

$$M = \left\{ \begin{matrix} M_k' \\ M_k'' \end{matrix} \right\} .$$

Les deux positions finales correspondantes, B et C, sont

$$B = (\cos u + L \sin u) A , \qquad C = (\cos v + M \sin v) A ;$$

qu'on rapporte le corps C à l'autre corps B choisi comme système de référence, le quaternion correspondant sera

$$\Gamma = \bar{B}C = \bar{A} (\cos u - L \sin u)(\cos v + M \sin v) A .$$

La partie scalaire Γ_0 de ce quaternion, identique à celle du produit des deux parenthèses intérieures, vaut

$$\Gamma_0 = \cos u \cos v + (LM) \sin u \sin v .$$

Cela posé, imaginons que les deux mouvements primitifs soient purement rotatoires, et demandons-nous sous quelles conditions le mouvement final de B vers C sera aussi rotatoire ? Tel est le problème à résoudre ; la réponse est immédiate.

En effet, par hypothèse, u et v sont des quantités réelles et l'on veut que Γ_0 en soit une autre. Il faut pour cela, et il suffit, que $(LM)'' = 0$ (1).

Autrement dit : *si des corps A, B, C .. se rencontrent deux à deux et qu'on envisage les axes des rotations qui conduisent l'un d'eux, A par exemple, sur les autres corps B, C,..., ces axes L, M,... sont aussi concourants.*

Cette condition qui est nécessaire pour la rencontre est aussi suffisante ; il importe d'observer qu'elle est absolument indépendante de la grandeur des rotations, laquelle reste complète-

(1) L'autre moyen de satisfaire la condition susdite, soit $\sin u \sin v = 0$, donne rien de contradictoire avec la première hypothèse.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

ment arbitraire et ne sera, en conséquence, presque jamais mentionnée dans la suite. Passons à la formation systématique des quatres espèces de couronnes.

La Couronne

§ 22. Nous savons que, dans les couronnes des divers ordres, les axes $L, M, N, \ldots$ des rotations conduisant un des corps A sur tous les autres $B, C, D, \ldots$ doivent se rencontrer. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer ces axes identiques.

Tous les corps du système s'obtiennent alors en imprimant une rotation continue à un unique corps; ils forment ce que, dans le langage usuel, on appelle une *couronne.* Je dis qu'entre trois corps quelconques de la couronne existe une relation linéaire.

En effet, soient A, B, C ces trois corps, L le bivecteur qui représente l'axe rotatoire, nous aurons, u et v représentant des quantités réelles,

$$B\bar{A} = \cos u + L \sin u \ , \qquad C\bar{A} = \cos v + L \sin v \ ;$$

de là, par élimination de la lettre L

$$\sin v B\bar{A} - \sin u C\bar{A} = \sin (v - u) \ ,$$

ou encore, après avoir chassé le facteur $\bar{A}$, la forme symétrique

$$aA + bB + cC = 0 \ . \tag{54}$$

La signification des coefficients réels a, b, c résulte du précédent calcul; ces coefficients sont proportionnels aux sinus des demi-angles des rotations qui mènent B sur C, C sur A, ou A sur B.

Réciproquement si trois corps A, B, C vérifient une relation linéaire telle que (54), ces trois corps font partie d'une même couronne. En effet, en écrivant cette relation sous la forme résolue

$$A = bB + cC \ , \qquad \text{ou} \qquad 1 = bB\bar{A} + cC\bar{A} \ ;$$

on en tire

$$b[AB] + c[AC] = 0 \ . \tag{55}$$

Mais la condition $(AA)'' = 0$, ne peut être vérifiée que si $(BC)'' = 0$; il faut, autrement dit, que deux quelconques des trois corps soient concourants. Le sens de l'équation (55) se déduit de là; elle signifie que les rotations qui conduisent A sur B et sur C s'exécutent autour du même axe. C'était là justement le point à établir.

L'égalité (54) qui existe entre trois corps d'une même couronne fournit encore une autre définition, évidente d'ailleurs au point de vue géométrique.

Soit D le corps orthogonal aux corps A, B, C; multiplions (54) par $\bar{D}$, ce qui réduit les produits $A\bar{D}$, BD, CD à trois vecteurs L, M, N, et l'égalité elle-même à la forme

$$aL + bM + cN = 0 \; ; \tag{56}$$

elle veut dire que les trois vecteurs forment un faisceau plan.

Donc, *la couronne est formée de tous les corps symétriques d'un corps fixe par rapport aux droites d'un faisceau plan* [1].

Pour en finir avec la couronne, comptons combien il existe de couronnes possibles; l'énumération est facile. Car, dans le corps mobile, l'axe peut occuper ∞^4 positions, et autant dans l'espace extérieur. Après avoir transporté un des axes sur l'autre, on dispose encore d'un paramètre arbitraire dont la variation correspond aux glissements de la couronne le long de son axe; il y a donc au total $\infty^{4+4+1} = \infty^9$ couronnes possibles.

Le Couronoïde

§ 23. La couronne est un système de ∞^1 corps concourants tel que les axes des rotations entraînant l'un sur l'autre deux quelconques de ces corps ne forment qu'une seule et même droite. Il est aisé d'obtenir des systèmes de corps concourants,

[1]) Ce faisceau, en Géométrie non-euclidienne hyperbolique, peut affecter trois formes distinctes. En Géométrie euclidienne, il en a deux, selon qu'il est composé de trois droites concourantes ou parallèles.

sans qu'il y ait coïncidence des axes rotatoires ; par exemple, autour de deux axes L, M concourant au point O, faisons tourner un même corps, d'un angle quelconque, jusqu'à ce qu'il occupe les positions B, C. Dans ce cas, les trois corps A, B, C se rencontrent bien deux à deux, mais ils n'appartiennent pas à une couronne et ne sont liés entre eux par aucune équation linéaire du type (54).

La construction du *couronoïde* résulte immédiatement de là. Prenons trois axes coplanaires, qui se rencontrent en un point O, désignons ces axes par les lettres L, M, N. Comme ils font partie d'un faisceau, ils vérifient une équation telle que (56), ou

$$lL + mM + nN = 0 , \tag{57}$$

dont la signification géométrique est immédiate. En effet, si on multiplie par $\bar{L}$ et qu'on retienne seulement les parties scalaires, on a

$$l + m(LM)' + n(LN)' = 0 ,$$

ou

$$l + m \cos(LM) + n \cos(LN) = 0 .$$

De là, par le procédé usité en Trigonométrie,

$$\frac{l}{\sin(NM)} = \frac{m}{\sin(NL)} = \frac{n}{\sin(LM)} .$$

Cela posé, faisons tourner un corps fixe A, de trois angles arbitraires $2u$, $2v$, $2w$, autour des droites L, M, N, de manière à transporter ce corps dans les positions B, C, D données par les relations

$$B\bar{A} = \cos u + L \sin u , \qquad C\bar{A} = \cos v + M \sin v ,$$
$$D\bar{A} = \cos w + N \sin w .$$

Entre ces équations et l'équation (57) éliminons L, M, N ; nous obtenons un résultat tel que

$$aA + bB + cC + dD = 0 , \tag{58}$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes

$$a = \cot u \sin(MN) + \cot v \sin(NL) + \cot w \sin(LM) ,$$
$$b \sin u = \sin(MN) , \qquad c \sin v = \sin(NL) , \qquad d \sin w = \sin(LM) ,$$

relations que la symétrie permettrait d'écrire de bien des manières différentes.

En résumé, *si l'on fait tourner un corps d'un angle quelconque autour d'une droite mobile appartenant à un faisceau plan, ce corps prend une double infinité de positions, telles que deux quelconques d'entre elles sont concourantes. Entre quatre des corps de cette bisérie, qui prend le nom de couronoïde, existe une relation linéaire.*

Il est clair que, suivant que le centre du faisceau générateur a été choisi à distance finie ou infinie, tous les corps du couronoïde ont un centre commun, ou possèdent en commun un plan perpendiculaire à la direction dans laquelle le centre s'est éloigné à l'infini. Cela fait deux variétés de couronoïdes que M. de Saussure a désignés sous le nom de *couronoïdes à centre* et *couronoïdes à plan fixe;* les deux espèces ont d'ailleurs des propriétés identiques, et le plus souvent il est inutile de distinguer entre elles.

Voici la réciproque de la proposition énoncée ci-dessus.

Si trois corps B, C, D se rencontrent deux à deux [1], *les ∞^2 corps définis par l'équation.*

$$A = bB + cC + dD\,, \tag{59}$$

laquelle implique la condition

$$b^2 + c^2 + d^2 + 2bc(BC)' + 2bd(BD)' + \ldots = 1\,,$$

se rencontrent aussi deux à deux et forment un couronoïde.

Ce dernier point est seul à vérifier; il résulte du fait que l'équation supposée (59), étant écrite sous la forme

$$1 = bB\bar{A} + cC\bar{A} + dD\bar{A}\,,$$

entraîne la conséquence

$$0 = b[AB] + c[AC] + d[AD]\,,$$

ce qui signifie que les axes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ des trois rotations

[1]) A remarquer qu'une relation telle que (59) peut avoir lieu sans que les corps B, C, D soient concourants; la condition de rencontre doit donc être expressément mentionnée dans l'énoncé.

qui conduisent A successivement sur les trois autres corps forment un faisceau plan. C'est justement la définition du couronoïde.

On peut encore imiter, avec le couronoïde, la seconde définition vue ci-dessus à propos de la couronne. Supposons en effet que dans l'équation (59), les quaternions B, C, D soient remplacés par trois vecteurs concourants deux à deux ; il est clair que, dans ces conditions, A sera un vecteur rencontrant les précédents : pour obtenir ce cas, où tous les corps du couronoïde sont figurés par des vecteurs, nous n'avons qu'à rapporter les trois corps B, C, D à leur orthogonal commun, lequel sera aussi orthogonal à tous les corps du couronoïde.

Rappelons maintenant que si, avec trois vecteurs L, M, N concourants deux à deux, nous formons un faisceau de ∞^2 vecteurs concourants P, du type symétrique

$$lL + mM + nN + pP = 0 \,, \tag{60}$$

il peut se présenter deux cas géométriquement distincts.

En effet, si nous considérons les déterminants

$$D' = | L'_k M'_k N'_k | \qquad \text{et} \qquad D'' = | L''_k M''_k N''_k | \qquad (k = 1, 2, 3)$$

formés respectivement avec les parties réelles et les parties imaginaires des trois vecteurs donnés, le produit $D'D''$ est symétrique gauche d'ordre impair, comme il résulte des hypothèses

$$(LL)'' = 2 \sum L'_k L''_k = 0 \,,$$

$$(LM)'' = \sum (L'_k M''_k + L''_k M'_k) = 0 \,,$$

ou bien

$$\sum L'_k M''_k = - \sum M'_k L''_k \; \ldots \,.$$

Ainsi donc, puisque $D'D'' = 0$, la bisérie de base L, M, N donne tantôt $D'' = 0$, tantôt $D' = 0$ [1].

Le premier de ces deux cas est celui où les rayons L, M, N

[1]) Je laisse ici de côté le cas où les conditions $D' = 0$ et $D'' = 0$ auraient lieu à la fois ; ce cas redonne simplement la construction de la couronne.

concourent en un seul point, le second a lieu quand ces mêmes rayons sont coplanaires. Et suivant qu'on a l'un ou l'autre, les rayons P de la formule (60) sont ceux d'une gerbe ou balayent un plan fixe. En résumé, *le couronoïde est le lieu des symétriques d'un corps fixe par rapport à tous les rayons issus d'un point ou couchés sur un plan.*

Ces deux variétés de couronoïdes correspondent à celles que j'ai qualifiées plus haut de couronoïdes *à centre* ou *à plan fixe.*

§ 24. Les propriétés des couronoïdes sont connues depuis longtemps ; si je leur consacre le présent paragraphe c'est afin de montrer avec quelle facilité ces propriétés se déduisent des notions analytiques ci-dessus.

1° Il est d'abord évident que trois corps B, C, D présentant un point commun, lequel peut être éventuellement placé à l'infini, définissent un couronoïde et un seul, ou bien, *que deux couronoïdes qui ont trois corps communs sont identiques, à moins que ces corps dépendent linéairement les uns des autres ou appartiennent à une même couronne.* Tout ceci résulte de l'équation (59).

2° En second lieu si un couronoïde contient deux corps B et C, il contient aussi toute la couronne $bB+cC$ qui joint ces corps ; cette propriété ne suppose pas que les couronoïdes possèdent le même centre. Limitons-nous, désormais, à ce dernier cas.

3° Je dis alors que *deux couronoïdes de même centre ont toujours une couronne commune,* tandis que *trois couronoïdes de même centre possèdent, en général, un corps commun et un seul.*

Considérons un corps A et trois axes L, M, N d'une gerbe ; faisons tourner trois fois le corps A autour du centre de la gerbe, nous engendrons trois corps concourants P_k, tels que [1]

$$P_k = (l_k L + m_k M + n_k N + p_k) A \ , \qquad k = 1, 2, 3 \ ,$$

[1]) Remarquer que les indices, à l'encontre des notations habituelles, ne désignent pas ici les composantes d'un même quaternion.

formule où les l, m, n, p sont quatre paramètres réels liés entre eux par la condition

$$l_k^2 + m_k^2 + n_k^2 + p_k^2 = 1 .$$

Un premier couronoïde, de base P_1, P_2, P_3, a pour équation

$$P = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 .$$

On aura deux nouveaux couronoïdes de même centre

$$P' = c_1'P_1' + c_2'P_2' + c_3'P_3' , \quad \text{et} \quad P'' = c_1''P_1'' + c_2''P_2'' + c_3''P_3'' ,$$

en prenant au lieu des l, m, n, p d'autres valeurs $l', \ldots p'$, ou $l'', \ldots p''$, de manière à changer successivement P_k en P_k' et en P_k''.

Dans les équations des couronoïdes P, P', P'', les paramètres c sont seuls variables, les autres lettres $l, l', l'', \ldots p''$ sont des constantes données.

Cela posé, les corps communs aux deux couronoïdes P et P' doivent vérifier l'équation $P = P'$; et celle-ci se partage en quatre autres équations linéaires obtenues en égalant dans chaque membre les coefficients des quaternions indépendants LA, MA, NA, A. Il y a de la sorte quatre équations homogènes à satisfaire entre les six inconnues c et c', dont les valeurs absolues ont en outre à vérifier la condition quadratique $(PP) = 1$.

Donc, conformément à l'énoncé, il existe au moins ∞^1 corps communs aux deux couronoïdes ; ces corps communs, nous le savons d'ailleurs, forment une couronne. De plus, il est impossible que P et P' possèdent des corps communs en dehors de cette couronne, à moins qu'ils ne coïncident : c'est la première propriété démontrée plus haut.

De même, les équations $P = P' = P''$ qu'il faut écrire pour chercher les corps communs à trois couronoïdes se subdivisent en 8 équations algébriques, comportant 9 inconnues homogènes : ainsi, par un raisonnement identique au précédent, trois couronoïdes de même centre possèdent toujours au moins un corps commun, et en général ils n'en possèdent qu'un seul. Toutefois, il peut arriver que ces couronoïdes contiennent une même couronne ; celle-ci constitue alors leur intersection mutuelle complète.

4° Nous savons qu'on engendre le couronoïde en faisant tourner un corps A autour de tous les rayons d'un faisceau plan. Tout corps appartenant au couronoïde peut être employé dans cette construction à la place de A. De là résulte une correspondance entre les ∞^2 corps du couronoïde et les ∞^2 plans menés par son centre; étudions la loi de cette correspondance.

A cet effet, prenons les deux vecteurs L, M, associés au corps A, à angle droit l'un sur l'autre, de manière que non seulement $(LM)'' = 0$, mais même $(LM) = 0$; et puisque, de cette façon, LM est un vecteur, faisons $N = LM$.

Soient deux corps B, C, appartenant au couronoïde, de sorte que

$$B\bar{A} = l'L + m'M + n' \ , \qquad \text{et} \qquad C\bar{A} = lL + mM + n \ , \tag{61}$$

équations où les coefficients sont assujettis à satisfaire les conditions

$$l^2 + m^2 + n^2 = l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \ . \tag{62}$$

Par multiplication les équations (61) nous donnent

$$C\bar{B} = (n + lL + mM)(n' - l'L - m'M) \ ,$$

soit, calculs faits, et (ln') représentant le déterminant $ln' - l'n$, et ainsi des autres,

$$C\bar{B} = (ln')L + (mn')M + (ml')N + ll' + mm' + nn' \ . \tag{63}$$

Telle est la formule qui fournit le moyen de passer du corps fixe B, appartenant au couronoïde, à tout autre corps variable C faisant partie du même couronoïde. Il suffit de reconnaître que cette formule présente le même type que (61) : c'est bien ce qui a lieu.

En effet, d'une part, les déterminants (ln') vérifient l'identité, analogue à (62),

$$(ln')^2 + (mn')^2 + (ml')^2 + (ll' + mm' + nn')^2 = 1 \ ,$$

et, en second lieu, quand on fait varier l, m, n, en laissant fixes l', m', n', le vecteur

$$(ln')L + (mn')M + (ml')N \ , \tag{64}$$

engendre un faisceau plan; il est aisé de s'en assurer. Car tous ces vecteurs passent au même point, et en attribuant aux paramètres l, m, n successivement trois systèmes de valeurs, le déterminant des neuf quantités telles que (ln'), (ml'), (mn') est évidemment nul. De la sorte, le vecteur (64) peut être remplacé par $pP + qQ$, où P et Q sont deux vecteurs concourants; leur introduction ramène le couronoïde (63) à la forme

$$C = (pP + qQ + r)B$$

complètement analogue à (61).

5° Pour en finir avec le couronoïde, il ne nous reste plus qu'à compter le nombre de tous les couronoïdes possibles.

Ces systèmes possèdent un centre qu'il faut fixer à la fois dans le corps mobile et dans l'espace, ce qui se peut de $\infty^{3+3} = \infty^6$ manières. Le centre étant donné, il faut encore faire tourner le corps autour de rayons issus du centre et compris dans un certain plan. Or A, dont le centre est fixe, occupe ∞^3 positions différentes, et le plan ∞^2 positions différentes, d'où ∞^5 couronoïdes. Mais nous savons que de cette manière le même couronoïde est engendré à ∞^2 exemplaires; ainsi, au total, le nombre de tous les couronoïdes possibles monte à $\infty^{6+5-2} = \infty^9$.

(A suivre).