Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 42 (1916)

Artikel: Géométrie des corps solides et géométrie imaginaire
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743282

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GÉOMÉTRIE DES CORPS SOLIDES

ET

GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

PAR

C. CAILLER

I. Introduction

Dans une série d'articles publiés récemment ici même [1], j'ai exposé avec des développements partiellement nouveaux les principes de la théorie des corps solides que l'on doit aux importants travaux poursuivis dans des directions très différentes par MM. de Saussure et Study. Me sera-t-il permis de revenir, une fois encore, sur un sujet qui ne me semble pas épuisé par les recherches antérieures?

Une idée que suggère presque invinciblement la représentation analytique du corps solide par ses coordonnées me paraît cependant avoir été laissée dans l'ombre jusqu'ici. Et pourtant, à bien considérer les choses, cette conception donne la clef des propriétés géométriques des corps solides; elle est comme un centre de perspective qui livre sur toute la question la vue d'ensemble la plus complète et la plus simple.

D'un mot, *la Géométrie des corps solides est identique avec la Stéréométrie imaginaire.* Ou bien, pour exprimer la même vérité en termes moins absolus: *il existe entre la Géométrie des corps solides et la Géométrie à trois dimensions une correspondance qui*

[1]) Voir ma « Note sur la théorie analytique des corps cotés », *Archives*, 1915, t. XL, p. 361 et 457; 1916, t. XLI, p. 5 et 93. Dans le présent mémoire, la notion de corps *cotés* ne joue aucun rôle; les corps considérés sont *ordinaires*, ou purement géométriques.

conserve la forme des relations métriques ponctuelles; seulement les arguments qui figurent dans les dites relations sont complexes dans l'un des cas et réels dans l'autre.

Pour comprendre exactement la nature, et aussi la portée de la correspondance dont il s'agit, il faut ajouter immédiatement que la stéréométrie imaginaire par laquelle s'expriment les propriétés de l'espace feuilleté [1] est nécessairement non-euclidienne, du type elliptique, cela quelle que soit la courbure de l'espace ponctuel qui sert de lieu au corps solide mobile.

La relation qui existe entre les deux géométries de l'espace feuilleté et de l'espace ponctuel est, en résumé, de la même espèce que celle, bien connue [2], qui unit la Géométrie réglée à la Planimétrie imaginaire. Les deux ordres de faits sont dans un lien d'étroite dépendance, car, comme je l'ai fait remarquer précédemment, la Géométrie des corps solides est une sorte de système complet qui renferme, parmi ses différentes particularisations, les diverses Géométries qu'on peut élaborer successivement, ponctuelle, tangentielle, réglée, etc. En généralisant notre Géométrie ordinaire, de manière à rendre complexes les éléments réels qui la constituent, il se trouve que les lois si connues qui existent entre eux se prolongent, sans modifications, dans le complexe, et que d'ailleurs les faits nouveaux s'interprètent avec une entière netteté par l'introduction du corps solide substitut adéquat du point imaginaire. Une homogénéité absolue se manifeste entre les propriétés des divers objets, corps et points, droites et vrilles, plans et vrilloïdes, etc., qu'on peut être appelé à étudier successivement.

Cette permanence, caractéristique de notre espace à 3 dimensions, est bien remarquable. Il serait fort intéressant de l'étudier à fond ; au point de vue axiomatique, par exemple, il importerait d'élaborer, pour la Géométrie des corps solides, un système d'axiomes qui représentent, à l'égard de l'espace feuilleté, l'équivalent de ceux qu'a donnés M. Hilbert pour l'espace réel.

[1]) Expression due à M. de Saussure. Cet auteur donne toujours au corps solide la forme particulière d'un feuillet.

[2]) Par exemple, voir, du même auteur, les mémoires, « Etude de géométrie cinématique réglée » et « Calcul géométrique réglé », *American Journal of Mathematics*. Vol. XVIII et XIX.

Le but que je poursuis ici est beaucoup plus modeste ; il consiste à exposer aussi clairement que possible, par les moyens les plus élémentaires, le fait de correspondance énoncé plus haut. C'est l'objet de la première partie de ce travail ; elle est presque entièrement synthétique, et pour la lire il suffit d'un bagage bien léger de connaissances antérieures. Les quaternions notamment n'interviennent que fort tardivement, au chapitre XI, à propos du changement des repères. Au prix de quelques longueurs il aurait été sans doute possible d'en éviter l'emploi d'une manière complète ; je n'ai pas cru devoir éliminer ainsi, artificiellement, un instrument analytique dont l'intervention dans la théorie se justifie par d'excellentes raisons.

La seconde partie du mémoire contient, avec quelques développements, les éléments de la Géométrie des vrilles qui n'est que l'aspect réel de la Géométrie réglée imaginaire.

II. La Vrille

Le corps solide auquel nous avons affaire a une forme quelconque qui doit seulement être bien définie. Ce sera, si on veut, un ellipsoïde, un cylindre, un trièdre trirectangle, ou un feuillet. Il importe cependant de ne pas donner trop de symétrie à la forme adoptée, de manière que l'aspect de la surface extérieure du solide suffise à en marquer la position dans l'espace. Mieux que par les figures ci-dessus le solide serait représenté à l'aide d'un polyèdre dénué d'éléments de symétrie, un cristal du système triclinique par exemple.

Une fois sa forme choisie, le solide est défini intrinsèquement, mais comme il est librement mobile dans l'espace il peut occuper une sextuple infinité de positions. La Géométrie des solides est l'histoire des propriétés de l'hexasérie engendrée par ces divers mouvements.

Envisagé comme lieu du corps mobile, l'espace possède donc six dimensions. Or, on peut aussi définir, dans l'espace ponctuel ordinaire, des points imaginaires aux coordonnées x, y, z, dont chacune ait la forme complexe $a + bi$; dans ce cas encore, l'espace aura six dimensions.

Comme je l'ai dit plus haut, il se trouve que les propriétés de l'espace, dans les deux hypothèses, sont identiques, ou que plutôt, le corps solide doit être regardé comme la figure réelle du point imaginaire.

Qu'on imprime au corps solide C tous les mouvements hélicoïdaux possibles, toutes les *torsions,* autour d'un certain axe fixe. Le mobile passera par une bisérie de positions qui forment ce que j'appelle une *vrille.* La vrille est, pour la Géométrie des solides, l'analogue de la *droite* en Géométrie ponctuelle ordinaire; c'est elle qui va nous apparaître comme l'image réelle de la droite imaginaire de l'espace.

La première des analogies entre la droite et la vrille, c'est que la vrille contient d'une manière symétrique tous les corps qui la composent. Avec chacun d'eux, animé d'un mouvement hélicoïdal autour de l'axe de notre vrille, on peut la reproduire dans son entier. De même, la droite est une ligne uniforme dont tous les points jouissent de propriétés identiques.

La droite porte ∞^1 éléments qui sont des points. La vrille est le support de ∞^2 éléments qui sont des solides. Il n'y a pas lieu de s'étonner de la différence des deux nombres; on sait que le passage du réel au complexe s'accompagne d'une duplication dans le nombre des données réelles.

Et puisque l'espace renferme une quadruple infinité de droites, il faut qu'il contienne une octuple infinité de vrilles. C'est bien ce qui a lieu.

En effet, le solide C étant donné en forme et en position, on obtiendra d'abord ∞^4 vrilles, intrinsèquement différentes, en déplaçant l'axe de la torsion à l'intérieur du corps. Qu'on transporte ensuite chacune des vrilles précédentes dans l'espace absolu, en appliquant l'axe de la vrille sur l'une quelconque des ∞^4 droites que renferme l'espace, la double opération aura donné un total de ∞^8 vrilles, différentes soit en forme, soit en position.

Ainsi donc, tandis que toutes les droites sont superposables, les vrilles ne le sont pas en général. Une semblable constatation semble marquer d'emblée la borne, très rapprochée, des parallélismes qu'il est loisible d'établir entre les deux objets. Il n'en

est pas ainsi cependant ; l'impossibilité de transporter une vrille déterminée sur n'importe quelle autre n'existe en effet que si on limite les mouvements de l'espace aux seuls mouvements *réels,* elle disparaît pour l'ensemble de tous les mouvements, réels ou complexes.

De même que deux points définissent une droite, de même, par deux corps quelconques passe une vrille et, généralement parlant, une seule vrille ; nous admettons ce fait comme une des bases de la théorie. Ainsi, étant données deux positions quelconques d'un corps solide, une torsion convenable exécutée autour d'un certain axe conduira toujours de l'une à l'autre ; l'axe de la vrille qui joint les deux solides est la droite qui leur est commune.

Cette droite commune, il convient de le remarquer, existe toujours ; en Géométrie euclidienne, elle est généralement unique. Toutefois, lorsque les deux solides sont orientés de la même manière, tous les axes qui joignent un couple de points homologues sont communs aux deux corps. Dans ce cas, qui est celui de la translation, n'importe quelle droite, pourvu qu'elle soit parallèle à la translation, appartient aux deux corps à la fois, et peut servir d'axe à une vrille qui contiendrait l'un et l'autre.

Ainsi donc, deux solides d'orientation semblable déterminent non pas une vrille unique mais une double infinité de vrilles. C'est une exception semblable à celle qu'offre la Géométrie riemannienne pour un couple de points distants d'une demi-circonférence ; un tel couple définit une infinité de droites au lieu d'une droite unique.

L'exception que je viens de signaler, pour le théorème de l'existence d'une vrille unique joignant deux solides quelconques, ne joue qu'un rôle des plus restreints dans le développement de la théorie ; elle n'en est pas moins très gênante parce qu'elle compromet à chaque instant la généralité des raisonnements et des déductions. Pour éviter les longueurs fastidieuses qu'elle occasionne, je présenterai ici le sujet au point de vue de la Géométrie non-euclidienne, laissant le lecteur opérer lui-même le passage à la Géométrie ordinaire ; la dite transformation est toujours des plus aisées.

On sait que si deux corps appartiennent à l'espace rieman-

nien, ils possèdent toujours, sans exception aucune, non seulement une droite commune, mais même deux droites communes ; seulement celles-ci, formant les deux individus d'une paire de droites conjuguées par rapport à la sphère de l'infini, ont exactement la même signification qu'une droite unique.

Les faits sont tout pareils dans la Géométrie de Lobatchewsky ; mais ici une seule des droites du couple est réelle, l'autre est idéale et représente l'axe idéal du faisceau formé par les plans perpendiculaires à la première. Ce cas de l'espace hyperbolique est ainsi le plus précis des trois ; il laisse, il est vrai, subsister une légère exception. Quand le mouvement qui entraîne un des solides sur l'autre devient horicyclique, l'axe commun aux deux corps n'existe plus, à moins qu'on ne le considère comme rejeté à l'infini. C'est en acceptant la possibilité d'un semblable passage à la limite que nous admettrons, dans ce cas de l'espace de Lobatchewsky qui est le seul que nous aurons à envisager ci-après, l'existence sans exception d'une droite unique commune à deux corps quelconques.

Toutes les différences dont il vient d'être question entre les diverses Géométries n'ont d'ailleurs, au point de vue de la Géométrie des corps solides, qu'une importance des plus minimes ; elles entraînent des modifications presque insignifiantes, et sous ses divers aspects, la Géométrie des corps solides reste en réalité identique à elle-même. M'en étant expliqué dans un précédent article je ne ferai plus que de brèves allusions aux légères variantes qu'elle peut présenter.

III. Corps orthogonaux. Vrilles conjuguées

Parmi les divers mouvements dont un corps est susceptible, un des plus importants est celui qui consiste à faire tourner ce corps de 180° autour d'un axe fixe. Dans ce mouvement les positions extrêmes occupées par le corps sont réciproques l'une de l'autre, et la seconde est la symétrique de la première par rapport à l'axe de rotation.

Pour désigner ce cas particulier du mouvement, nous dirons volontiers que le corps a *chaviré*, a *basculé*, ou encore, s'est *ren-*

versé autour de l'axe [1]. Quand deux corps sont ainsi symétriques l'un de l'autre par rapport à une droite, ils prendront le nom de corps *conjugués* ou *orthogonaux*. Ce qui fait l'importance de cette notion c'est que les corps orthogonaux jouent, dans la Géométrie des corps solides, le même rôle que les points *conjugués* dans la Géométrie ponctuelle ordinaire.

Les couples de corps conjugués correspondent aux couples de points conjugués imaginaires ; et puisqu'un point réel admet ∞^2 points conjugués, également réels, il faut s'attendre à trouver ∞^4 corps qui soient orthogonaux à un même corps donné. Cela est vrai ; il suffit pour les obtenir, de renverser le corps primitif autour des ∞^4 droites de l'espace.

Retournons bout pour bout tous les corps d'une même vrille V, le long de l'axe de cette vrille, de manière à échanger entre elles les deux extrémités de l'axe. Nous obtenons ainsi une seconde vrille V′.

Les deux vrilles V et V′, réciproques l'une de l'autre et qui ne possèdent évidemment aucun corps commun, sont dites *conjuguées* l'une de l'autre. Il est clair que deux corps quelconques, respectivement empruntés à l'une et l'autre vrille, sont orthogonaux entre eux ; on verra tout à l'heure que cette propriété peut servir de définition aux vrilles conjuguées.

Remarquons que si on considère les axes autour desquels il faut faire basculer un corps C, appartenant à la vrille V, pour qu'il vienne s'appliquer sur un corps C′, appartenant à la conjuguée V′, ces divers axes forment une congruence composée de toutes les normales à l'axe commun des vrilles V et V′ [2].

Les vrilles conjuguées sont les images réelles de deux droites de l'espace imaginaire, conjuguées par rapport à la sphère de l'infini ; cette comparaison marque tout de suite le rôle prépondérant qui leur est dévolu dans la Géométrie des corps solides.

[1]) Je demande pardon des néologismes que j'ai été conduit à introduire de nouveau ; ils me paraissent indispensables à la clarté ou à la brièveté du discours.

[2]) Dans le mémoire cité plus haut, M. de Saussure a nommé *recticongruence* une pareille congruence. J'emploierai ce terme dans la suite.

Etant donnés deux corps C et C′, il est clair qu'il existe une double infinité de corps dont chacun est orthogonal à la fois à C et C′. Ces orthogonaux communs forment justement une vrille V′, conjuguée de celle qui réunit les corps donnés. Mais il est indispensable de faire la preuve qu'en dehors de la vrille V′ il n'y a plus aucun corps qui soit orthogonal aux deux solides C et C′ simultanément.

Soit A un corps orthogonal à C et C′. Sur l'axe commun à ces derniers marquons deux paires *ab* et *a′b′*, de points homologues, correspondant dans A à un même couple $\alpha\beta$ (fig. 1). Puisqu'on obtient *ab*, par exemple, en faisant chavirer $\alpha\beta$ autour d'un certain axe L du plan de la figure, cet axe doit bissecter l'espace angulaire *ab*, $\alpha\beta$. Les deux mouvements de bascule qui conduisent le corps A respectivement sur C et sur C′ s'exécutent donc autour d'un seul et même axe de rotation L, et ainsi, les deux solides C et C′ ne sont pas différents.

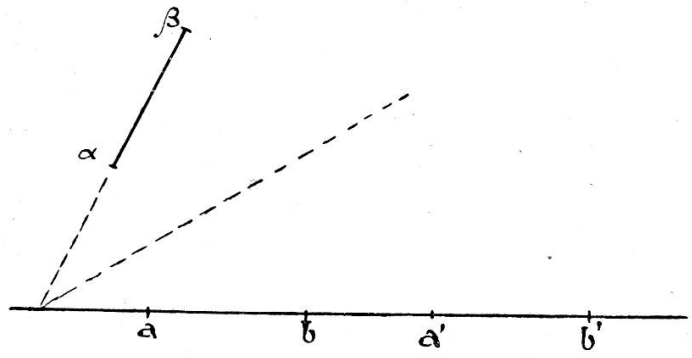

Fig. 1

Pour échapper à cette conséquence, il faut que les droites *ab* et $\alpha\beta$ admettent plusieurs bissectrices, ce qui n'a lieu que si elles coïncident. La seule disposition que puissent présenter les trois solides est donc celle de la figure 2. Quand elle est réalisée, il existe toujours un axe perpendiculaire à la droite *ab*, tel qu'en faisant chavirer A autour du dit axe on obtienne le corps C, par exemple. On voit ainsi que la vrille V′, conjuguée de la vrille V qui réunit les corps C et C′, contient sans exception tous les corps A qui sont orthogonaux à C et à C′ simultanément.

Etant donnés trois corps quelconques C_1, C_2, C_3, ne faisant pas partie d'une même vrille, je dis qu'il existe un corps, et un seul, qui soit orthogonal à chacun des trois autres.

Désignons par L_1 l'axe commun aux deux corps C_2 et C_3, par L_2 l'axe commun à C_3 et C_1, par L_3 l'axe commun à C_1 et C_2, et soient encore V_1, V_2, V_3 les trois vrilles correspondantes, distinctes par hypothèse.

La collection de tous les solides orthogonaux à C_2 et C_3 s'obtient en soumettant un corps choisi à volonté dans la vrille V_1, C_3 par exemple, à toutes les symétries autour d'axes normaux à l'axe L_1. De même, l'ensemble des orthogonaux à C_3 et C_1 s'obtiendra en faisant chavirer le même solide C_3 autour de tous les axes normaux à L_2.

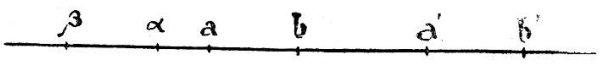

Fig. 2

Donc enfin, le corps orthogonal aux trois solides C_1, C_2, C_3 s'obtiendra en renversant C_3 autour de la normale commune aux deux droites L_1 et L_2. Ces deux droites étant nécessairement distinctes n'admettent qu'une seule perpendiculaire commune ; et ainsi, en Géométrie de Lobatchewsky, il ne peut exister qu'un seul orthogonal commun à trois corps quelconques C_1, C_2, C_3 [1].

Il est clair que la construction précédente, dissymétrique par rapport aux trois corps donnés, donnera en les échangeant, un théorème de Cinématique. Voici l'énoncé qu'il revêt dans la Géométrie des corps solides.

Si trois vrilles unissent deux à deux trois corps donnés, les vrilles conjuguées des vrilles données possèdent un corps commun.

C'est le pendant du théorème de la Géométrie élémentaire ; *si trois droites forment un triangle, les droites conjuguées se rencontrent en un seul point.*

[1]) Comme on voit, le théorème peut présenter des exceptions, en Géométrie euclidienne.

IV. Le Vrilloïde

La *vrille* est l'image de la droite imaginaire ; le *vrilloïde* est, de la même manière, l'image du plan imaginaire. La définition du vrilloïde se fait de deux manières.

Prenons d'abord tous les renversements possibles d'un même corps solide, en le faisant chavirer autour des ∞^4 droites de l'espace : le *vrilloïde* est le lieu des positions finales ainsi obtenues. Cette définition est calquée sur celle du plan. De même que le plan est l'ensemble de tous les points conjugués à un point fixe donné, de même le vrilloïde est l'ensemble des positions d'un corps mobile, orthogonales à un corps fixe ; j'appellerai celui-ci le *corps polaire*, ou, plus simplement, le *pôle* du vrilloïde.

La duplication caractéristique du passage au complexe se manifeste ici comme toujours : tandis que le plan contient une bisérie de points, le vrilloïde est une tétrasérie de corps.

Il est clair aussi que le pôle d'un vrilloïde peut occuper ∞^6 positions dans l'espace ; il existe donc en tout un nombre égal de vrilloïdes, soit deux fois autant que de plans. Tous ces vrilloïdes sont d'ailleurs identiques à la position près et peuvent être superposés en exécutant des mouvements réels de l'espace.

La seconde définition du vrilloïde est la suivante (fig. 3) :

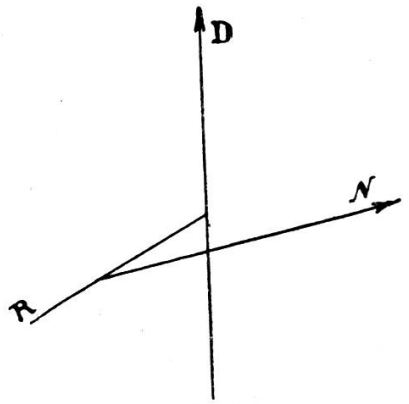

Fig. 3

Considérons un axe fixe D, ainsi que la recticongruence qui comprend toutes les normales à cet axe ; soit R l'une des normales. Imprimons à un corps C tous les mouvements hélicoïdaux possibles le long de chaque droite telle que R.

L'ensemble des positions du corps mobile ainsi engendrées est une tétrasérie ; je dis qu'elle coïncide avec le vrilloïde dont le pôle P s'obtient en renversant le solide C autour de l'axe D de la recticongruence.

En effet, si R est une droite appartenant à la recticongruence, et N une perpendiculaire quelconque élevée sur R, il est clair que N est une droite arbitraire de l'espace. Or, au lieu d'engendrer une vrille en faisant glisser et tourner le solide C le long de R, nous savons qu'il revient au même de faire basculer le corps P autour de toutes les droites telles que N ; par là apparaît l'identité des deux définitions.

Le vrilloïde étant supposé tracé, le second mode de construction est réalisable de ∞^4 manières différentes. Pour l'employer il faudra choisir le corps C à volonté parmi les ∞^4 corps appartenant au vrilloïde ; l'axe de la recticongruence correspondante est la droite commune à ce corps et au pôle du vrilloïde.

Parmi les corps du vrilloïde (P) (1), considérons tous ceux qui possèdent un point commun. Soit α l'homologue du dit point dans P, a sa position dans l'espace, p le milieu de la droite $a\alpha$. Visiblement, les axes autour desquels P doit basculer pour que le point α vienne se placer sur a, sont ceux qui, passant en p, y sont perpendiculaires à la droite $a\alpha$ (fig. 4). En renversant le solide P autour de ces divers axes on obtient le lieu cherché ; c'est une *couronne* ayant la ligne $a\alpha$ comme axe.

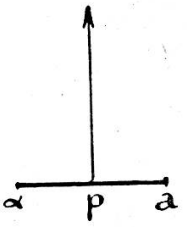

Fig. 4

Le résultat est différent si a et α coïncident ; dans ce cas, l'axe du mouvement de bascule est quelconque, pourvu qu'il passe en a. Et alors, l'ensemble des corps contenus dans le vrilloïde et qui possèdent le point commun donné, dessine la configuration bien connue sous le nom de *couronoïde*.

Un raisonnement identique au précédent fait voir que le vrilloïde contient un corps, et un seul, tel que l'homologue dans ce corps d'une demi-droite déterminée, appartenant au pôle du vrilloïde, occupe une position arbitrairement donnée dans l'espace.

Enfin, il existe dans le vrilloïde ∞^1 corps tels que les homo-

(1) Par la notation (P), je représente le vrilloïde, admettant P comme corps polaire.

logues dans chacun d'eux d'un plan fixe du corps polaire se confondent en un seul et même plan arbitrairement choisi dans l'espace. La monosérie de ces corps est encore une couronne [1].

V. Les relations entre les vrilles et les vrilloïdes

Ces relations sont absolument identiques à celles qui existent entre les droites et les plans de la Géométrie projective ordinaire : on n'en peut pas douter puisque les rapports projectifs entre les points, les droites et les plans de la Géométrie ordinaire se rattachent intimement à la notion de couples de points conjugués, et que la Géométrie des corps solides, avec ses corps orthogonaux, nous présente l'équivalent de cette notion.

Le raisonnement synthétique se transporte immédiatement dans le domaine de la Géométrie des corps. Appliqué aux êtres nouveaux que sont le *solide,* la *vrille* et la *vrilloïde*, il nous livrera, par les moyens connus, les propriétés élémentaires qui sont les analogues des faits classiques de la Géométrie ordinaire. Il suffira donc, sans entrer dans les détails, de présenter les nouveaux énoncés, en limitant les démonstrations à quelques remarques qui seraient elles-mêmes superflues si elles n'étaient parfois utiles à la clarté.

On voudra d'ailleurs observer que, bien que l'espace ponctuel qui sert de base à nos raisonnements soit lobatchewskien, les théorèmes énumérés dans un instant sont valables sans exception, ou du moins qu'ils n'en présentent que d'insignifiantes. C'est donc que l'espace de Lobatchewsky offre, relativement aux solides qui y sont contenus, tous les caractères de l'espace ponctuel *elliptique ;* il n'en ira pas autrement quand on passera au cas limite de l'espace euclidien.

1° *Par trois corps donnés à volonté, qui ne sont pas contenus dans une seule et même vrille, passe un vrilloïde et un seul.*

[1]) Pour la généralité de cet énoncé, il faut remarquer que, dans l'espace hyperbolique, les couronnes peuvent affecter deux formes distinctes, selon qu'elles sont de *rotation* ou de *translation.*

Pour construire ce vrilloïde, il suffit en effet de déterminer le solide orthogonal aux trois corps donnés. Un tel solide existe toujours et il est unique de son espèce; on en a vu la construction plus haut.

2° *Deux vrilles, qui possèdent un corps commun, déterminent un vrilloïde unique qui les renferme toutes deux.*

3° *Si deux corps font partie d'un même vrilloïde, tous les corps appartenant à la vrille qui joint les deux premiers font aussi partie du vrilloïde.*

Car le pôle du vrilloïde, étant orthogonal aux deux solides donnés, est conjugué à toute la vrille qui joint ces corps [1].

4° *Par deux corps, donnés à volonté, ou par la vrille qui les joint, passent* ∞^2 *vrilloïdes différents.*

Les pôles de ces vrilloïdes décrivent la vrille conjuguée à la vrille donnée. On remarquera que, comme il est naturel, à la monosérie qui constitue le faisceau de plans de la Géométrie réelle, correspond, par duplication, une bisérie de vrilloïdes en Géométrie imaginaire.

5° *Par un corps C passent* ∞^4 *vrilloïdes distincts, le lieu de leurs pôles est le vrilloïde ayant* C *pour corps polaire.*

6° *Deux vrilloïdes, (C) et (C'), admettant les corps C et C' pour leurs pôles respectifs, se rencontrent toujours suivant une vrille.* L'intersection des deux vrilloïdes est la vrille conjuguée de celle qui joint les pôles C et C'.

7° *Si une vrille V n'est pas contenue dans un vrilloïde (P), leur intersection commune est un corps solide unique.*

Pour obtenir l'intersection, il suffira de déterminer le corps unique qui est orthogonal au pôle P du vrilloïde et à la vrille V' conjuguée de la vrille donnée.

8° *Si deux vrilles appartiennent au même vrilloïde elles possèdent un corps commun.*

Cette propriété est la réciproque de celle qui nous apprend que deux vrilles concourantes appartiennent au même vrilloïde. Pour construire le corps commun, remarquons que les vrilles étant tracées dans le vrilloïde (P), leurs conjuguées se rencon-

[1]) Ici et plus loin, j'étends sans explication, à la Géométrie imaginaire, le langage usité en Géométrie réelle.

trent sur P. Avec ces conjuguées construisons un nouveau vrilloïde dont Q soit le pôle. Le corps Q est l'intersection demandée, c'est la seule.

9° *Trois vrilloïdes, qui n'appartiennent pas au même faisceau, se rencontrent suivant un corps commun unique.*

L'intersection Q se trouve au pôle du vrilloïde formé avec les corps polaires des trois vrilloïdes donnés.

VI. Vrilles et Vrilloïdes perpendiculaires

En Géométrie non-euclidienne, la notion générale de *perpendicularité* se rattache, sous le point de vue projectif, à quelques idées simples. Rappelons-les sommairement en fixant l'usage de quelques termes qui vont servir avec une signification plus étendue, mais analogue, dans la Géométrie des corps solides.

Deux points, conjugués l'un de l'autre par rapport à la quadrique de l'infini, s'appellent encore *orthogonaux*. En Géométrie de Riemann, les deux points d'un couple orthogonal sont réels l'un et l'autre, ils sont séparés par la distance d'un quadrant. En Géométrie de Lobatchewsky, un seul des points du couple peut être réel, l'autre est idéal ; mais il se peut aussi que les deux points conjugués soient idéaux l'un et l'autre.

Deux plans sont *perpendiculaires, orthogonaux* ou *normaux* l'un sur l'autre, si leurs pôles sont des points conjugués. En Géométrie de Lobatchewsky, par exemple, des plans perpendiculaires entre eux sont les représentants réels de deux points conjugués idéaux.

Un plan et une droite sont dits *perpendiculaires, orthogonaux* ou *normaux* entre eux, lorsque la droite passe au pôle du plan ; dans ce cas, comme dans le précédent, il n'y a aucune distinction à faire entre les trois termes qui sont rigoureusement synonymes. Et l'on peut remarquer que si D et D′ (fig. 5) sont deux droites conjuguées les plans perpendiculaires à D sont ceux qui contiennent D′.

Deux droites D et E sont dites *perpendiculaires* (non concourantes) si l'une d'elles, E par exemple, rencontre la conjuguée D′ de l'autre ; la définition, malgré l'apparence, est symétrique.

Lorsque deux droites perpendiculaires se rencontrent en un point, comme F et D, elles prennent le nom de droites *orthogonales* ou de droites *normales*. Autrement dit, les normales d'une droite D sont les sécantes qui sont communes à cette droite et à sa conjuguée, de sorte que les normales d'une droite sont aussi les normales de sa conjuguée.

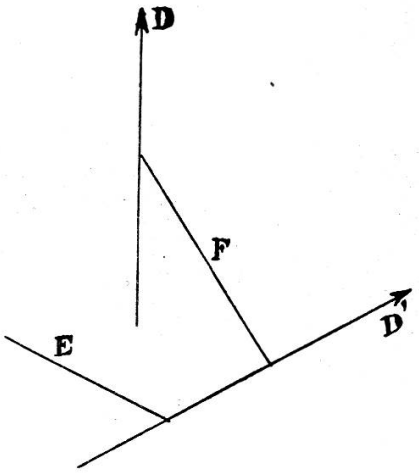

Fig. 5

Mais nous savons que les corps symétriques l'un de l'autre relativement à une droite quelconque représentent l'équivalent d'un couple conjugué de points imaginaires ; en outre, aux *droites* et aux *plans* de la Géométrie ordinaire correspondent, de manière parfaite, les *vrilles* et *vrilloïdes* de la Géométrie des corps solides.

Nons étendrons donc simplement aux *vrilles* et *vrilloïdes* les définitions données ci-dessus pour la perpendicularité. La fig. 5 qui exprime les relations entre éléments perpendiculaires ou orthogonaux nous servira encore à exprimer schématiquement les mêmes relations lorsque les éléments, devenus imaginaires, s'extériorisent dans le réel sous forme de corps solides.

Ainsi donc, seront dits *orthogonaux* ou *perpendiculaires* deux vrilloïdes dont les pôles sont orthogonaux, ou encore une vrille et un vrilloïde lorsque la première contient le pôle du second.

De même, deux vrilles sont simplement *perpendiculaires* si l'une contient un corps appartenant à la conjuguée de l'autre ; elles sont *normales* ou *orthogonales* si elles possèdent en outre un corps commun. Une vrille F, normale à une autre D, contient deux corps respectivement empruntés à D et à sa conjuguée D'.

Il résulte de ces définitions et des théorèmes énoncés au précédent chapitre que les propriétés classiques de la perpendicularité sont les mêmes pour les vrilles et les vrilloïdes perpendiculaires que pour les droites et les plans. Et nous pourrions

nous dispenser de les reproduire ici si, comme plus haut, le souci de la clarté ne nous obligeait de revoir succinctement la forme que présentent, avec de légères variantes, les relations anciennes appliquées aux nouveaux objets.

1° *Par un corps quelconque qui ne coïncide pas avec le pôle d'un vrilloïde (P), on peut abaisser une vrille, et une seule, qui soit normale au vrilloïde.*

Il suffit, pour l'obtenir, de joindre le corps C au pôle P du vrilloïde. L'intersection de la vrille normale s'appelle la *projection* de C sur (P). Et comme il y a, au total, ∞^4 corps compris dans (P), il existe aussi ∞^4 vrilles perpendiculaires à un vrilloïde donné.

2° Si le pôle P d'un vrilloïde (P) orthogonal à une vrille V chavire autour de toutes les droites normales à l'axe de la vrille il engendre une vrille V′ qui est conjuguée à V. Cette vrille V′ appartient au vrilloïde (P), et l'on peut dire, réciproquement, que *pour qu'un vrilloïde (P) soit normal à une vrille V, il faut et suffit qu'il contienne la vrille V′, conjuguée de la première.*

De la sorte, *par un corps donné quelconque C nous pouvons toujours abaisser un vrilloïde perpendiculaire à une vrille donnée V.*

Pour construire le vrilloïde (P) il suffit de joindre C à la vrille V′, conjuguée de V ; l'intersection de (P) et V s'appelle la *projection* de C sur V.

De là résulte que le vrilloïde normal est unique, ainsi que la projection, excepté si C fait partie de V′ ; dans ce cas tous les vrilloïdes contenant V′ sont perpendiculaires à V.

3° *Toute vrille T, contenue dans un vrilloïde (P) qui est perpendiculaire à une autre vrille V, est aussi perpendiculaire à V.*

En effet la condition de perpendicularité exige que T possède un corps commun avec V′ ; il en est bien ainsi puisque, par hypothèse, T et V′ sont tracés sur le même vrilloïde.

Si la vrille T, toujours contenue dans (P), contient la projection de V, elle est non seulement perpendiculaire mais normale à V. Donc *si une vrille est perpendiculaire à un vrilloïde elle est normale à toutes les vrilles qui passent par son pied dans le vrilloïde.*

4° *Par un corps C qui n'est contenu ni dans une vrille donnée*

V, ni dans sa conjuguée V', on peut, d'une seule manière, abaisser une vrille normale à V.

Il suffit, pour l'obtenir, de joindre C à sa projection sur V. Si C appartenait à V, toutes les vrilles issues de C et contenues dans le vrilloïde perpendiculaire à V, mené par C, seraient aussi normales à V. Donc, *par un corps donné d'une vrille, on peut élever ∞^2 vrilles normales formant par leur ensemble le vrilloïde normal.*

Si C appartenait à V', les ∞^2 vrilles qui joignent le corps aux ∞^2 solides contenus dans V seraient normales à V ; l'ensemble de ces normales forme un vrilloïde contenant V.

5° Reprenons une vrille V, orthogonale au vrilloïde (P), de manière que V contienne le pôle P. Suivant V menons un nouveau vrilloïde (A) ; son pôle A est orthogonal à la vrille V, donc au corps P qui y est contenu. Ainsi, *tout vrilloïde qui passe par une vrille normale au vrilloïde (P) est perpendiculaire à ce dernier.*

Réciproquement, *deux vrilloïdes normaux à un troisième se coupent suivant une vrille qui est orthogonale au dernier vrilloïde.*

L'intersection s'obtient en construisant la vrille conjuguée de celle qui réunit les pôles des deux vrilloïdes donnés.

6° Soient deux vrilles V et U, perpendiculaires mais non orthogonales l'une sur l'autre. Chacune renferme un corps appartenant à la conjuguée de l'autre ; par exemple U renferme un corps C qui est orthogonal à tous les corps de V.

Suivant V menons un vrilloïde (C), de pôle C, et soit A son intersection avec U. La vrille U, contenant le pôle C, est orthogonale au vrilloïde (C) ; elle est donc normale à toutes les vrilles qui, passant par son pied A, sont contenues dans le vrilloïde.

De là résulte que *si on projette tous les corps appartenant à une vrille V sur une vrille U qui lui est perpendiculaire, ces projections se confondent en un seul et même corps.*

Les deux vrilloïdes semblables à (C), menés respectivement par V et U sont, en outre, perpendiculaires l'un sur l'autre.

Cet ensemble de propriétés constitue le théorème des trois perpendiculaires.

VII. Nouvelles Propriétés de la Perpendicularité Parallélisme de Clifford

L'absence d'exceptions dans les théorèmes que nous venons de passer en revue souligne le caractère de la Géométrie des corps solides ; de plus en plus l'espace feuilleté se révèle comme doué des propriétés de l'espace ponctuel elliptique.

L'ensemble de ces analogies ne permet guère de mettre en doute que de même qu'on peut, dans la Géométrie de Riemann, tirer, de deux manières, une droite qui soit normale à deux droites données, on ne puisse également construire deux vrilles, et deux seulement, qui soient normales à deux vrilles données.

Désignons ces dernières par V et V′, par U et U′ leurs conjuguées. Le problème des vrilles normales se réduit à tracer les vrilles sécantes communes de quatre autres vrilles qui sont V, V′, U et U′.

Si une première sécante D était construite, la conjuguée de celle-ci, à savoir D′, serait une autre sécante commune.

En effet, les pôles de 4 vrilloïdes passant tous par D, puis respectivement par V, V′, U, ou U′, appartiennent d'une part aux vrilles U, U′, V, V′, de l'autre à la vrille D′, laquelle est ainsi sécante commune. On voit que si le problème des normales communes est déterminé, il est au moins du second degré.

Pour montrer qu'il atteint effectivement ce degré, il faudrait étendre aux vrilles les propriétés projectives connues des surfaces du second ordre, montrer qu'une quadrique de corps solides est rencontrée par une vrille suivant deux corps, etc. Une telle extension, établissant l'existence d'un double système de génératrices qui sont des vrilles, fournirait immédiatement une foule de théorèmes tels que le suivant.

Neuf positions arbitraires d'un même corps solide étant données, il existe une tétrasérie de positions contenant celles-ci, tétrasérie telle qu'elle se décompose, de deux manières différentes, en une bisérie de vrilles.

Mais au lieu de suivre cette marche banale, laquelle, bien que basée sur des analogies immédiates, offre probablement des

points délicats, nous allons en adopter une autre, beaucoup plus instructive, qui repose directement sur la conception du corps solide.

Il nous faut d'abord transformer la définition donnée plus haut pour le système de deux vrilles orthogonales entre elles.

Soient C le corps commun à deux vrilles V et V′, normales entre elles, dont nous désignons les axes par v et v'. Les vrilles étant orthogonales, il faut que l'une d'elles, V′ par exemple, contienne un corps C′ qui appartienne à la conjuguée de V et qui, par suite, soit orthogonal à C. Pour que le renversement autour de v', qui conduit C sur C′, nous donne un corps C′ conjugué à la vrille V, il est clair qu'il doit avoir lieu autour d'un axe qui rencontre v à angle droit. La condition est suffisante, on le voit à l'instant.

Donc, *on obtient tous les systèmes possibles de deux vrilles normales en imprimant à un même corps deux mouvements hélicoïdaux indépendants autour de deux droites rectangulaires* v *et* v′.

La nouvelle définition de l'orthogonalité donne pour les problèmes concernant les vrilles normales des solutions très simples. Prenons, par exemple, celui de la normale à abaisser d'un corps C sur une vrille V.

Marquons dans le corps C, en u par exemple (fig. 6) la droite qui occupe dans ce corps une situation homologue à celle de l'axe v parmi les corps formant la vrille V ; pour la clarté, les deux droites ont été munies d'un sens, la flèche regardant la même extrémité du corps.

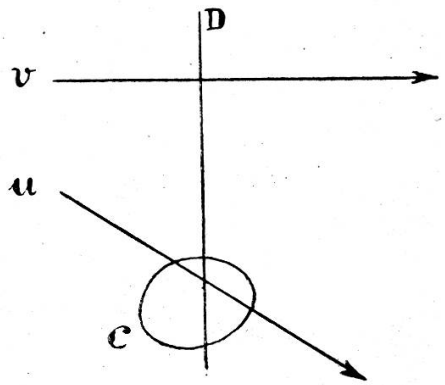

Fig. 6

Menons la perpendiculaire commune D aux deux droites v et u et imprimons à la droite u, solidaire du corps C, une torsion autour de D, de manière à l'amener en définitive à coïncider avec v ; il est clair que si C participe au mouvement il décrit la

vrille normale cherchée. Sa position finale est la projection de C sur V.

La construction précédente est parfaitement déterminée. sauf dans le cas où les deux droites v et u coïncideraient [1]. Le corps C fait alors partie de la vrille V, et le problème comporte autant de solutions qu'il existe de droites D, dans la recticongruence d'axe v, à savoir ∞^2. L'ensemble des vrilles ainsi tracées forme un vrilloïde normal à V.

Nous trouvons ainsi, sous une nouvelle forme, la condition d'orthogonalité entre vrilles et vrilloïdes ; elle est corrélative de la seconde définition donnée plus haut pour le vrilloïde, définition qui ne nous a pas encore servi. Voici la nouvelle condition :

Si un corps C décrit une vrille d'axe v, *et si, en second lieu, ce même corps engendre un vrilloïde en glissant et tournant le long de toutes les arêtes qui forment la recticongruence d'axe* v, *la vrille et le vrilloïde successivement tracés par le corps C sont normaux l'un sur l'autre.*

On remarquera que la vrille V′, conjuguée de V, appartient au vrilloïde quel que soit le corps descripteur C. Pour obtenir les différents solides qui composent V′, il suffit que C chavire autour des arêtes de la recticongruence ; ces renversements sont contenus, comme mouvements particuliers, dans ceux qu'exécute C pour engendrer le vrilloïde.

La nouvelle notion d'orthogonalité est donc de tout point conforme à l'ancienne ; il est inutile de poursuivre dans le détail l'analyse des problèmes déjà résolus au paragraphe précédent. Le seul qui restait en suspens se traite de la manière la plus simple par les moyens dont nous disposons maintenant.

Soient C le corps, considéré à part (fig. 7), u et u' deux droites solidaires de ce corps qui vont servir d'axes à deux vrilles successivement engendrées par le solide C. Pour la clarté, considérons ces droites comme des vecteurs en leur assignant un sens par le moyen d'une flèche marquée à une de leurs extrémités.

[1]) Qu'on n'oublie pas ici que nous raisonnons dans l'espace hyperbolique.

Soient maintenant U et U′ deux demi-droites qui figurent les axes des précédentes vrilles considérées dans leurs positions véritables. Nommons *d*, la normale commune aux droites *u* et *u′*, D celle relative aux droites U et U′.

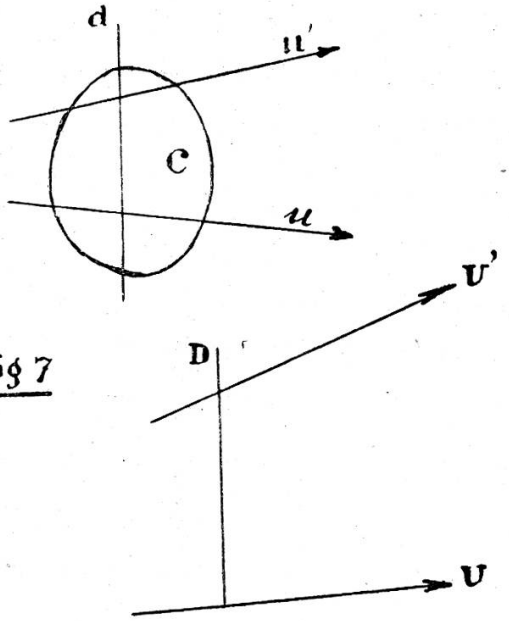

Fig 7

S'il existe une vrille normale aux vrilles U et U′, son axe ne peut être que D, ainsi que nous le savons depuis le début de ce paragraphe. Transportons donc le solide C dans la situation C′, de manière que *u* coïncide avec U et *d* avec D. Si C′ part de cette position pour engendrer la vrille D (fig. 8), cette dernière est bien normale à la vrille U ; elle sera aussi normale à U′, puisque *u′* rencontrant D à angle droit une torsion convenable autour de la droite D amènera *u′* sur sa correspondante U′.

Il importe de remarquer que les sens suivant lesquels se correspondent les lignes *d* et D est arbitraire ; en intervertissant ce sens, comme l'indique la figure [1], nous trouvons précisément deux vrilles qui sont normales aux vrilles données. Elles sont conjuguées entre elles, et l'on obtient l'une en renversant l'autre autour des droites appartenant à la recticongruence dont l'axe est D.

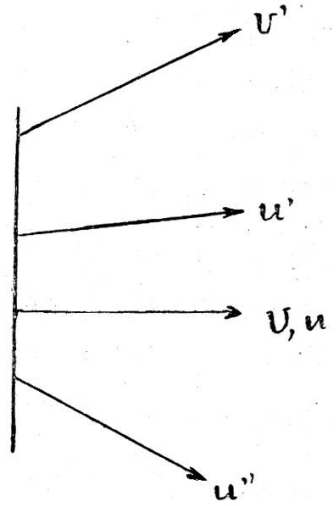

Fig. 8

[1]) *u′* et *u″* y représentent les deux positions possibles de la droite *u′*.

En Géométrie de Lobatchewsky la construction précédente admet les exceptions suivantes. Si U et U′ sont parallèles la droite D est rejetée à l'infini; d serait de même à l'infini si c'étaient u et u' qui devenaient parallèles. Laissons de côté ces cas limites; il ne reste que ceux où U coïncide avec U′, ou bien u avec u'. Ces deux cas correspondent à ce qu'on appelle, en Géométrie riemannienne, le *parallélisme de Clifford;* ils fournissent même, pour le phénomène du parallélisme, une interprétation aussi simple que remarquable.

Généralisant le langage nous dirons donc que deux vrilles V et V′ sont *parallèles au sens de Clifford* lorsque les axes de ces vrilles coïncident dans l'espace, ou encore, lorsque les deux axes, différents dans l'espace, sont homologues l'un de l'autre par rapport au corps descripteur. Les deux cas du parallélisme peuvent être réunis, mais alors les deux vrilles sont identiques.

On voit immédiatement, comme une conséquence particulière de la construction précédente, que si deux vrilles sont parallèles au sens de Clifford toute vrille normale à l'une et qui rencontre l'autre sera aussi normale à celle-ci. De la sorte un couple de vrilles parallèles admet un système de ∞^2 normales communes.

Les propriétés du parallélisme de Clifford se déduisent facilement de ce qui précède; elles sont identiques à celles du parallélisme ordinaire de la Géométrie euclidienne, sauf un point. Les vrilles parallèles ne sont jamais situées dans le même vrilloïde; il en résulte, comme nous allons voir, que par un corps C, extérieur à une vrille V, passent deux vrilles parallèles à celles-ci.

Pour obtenir la première parallèle, il faut imprimer au corps C un mouvement hélicoïdal quelconque autour de l'axe v de la vrille V; on aura la seconde en vrillant le solide C autour de la droite V′ homologue de v par rapport à C.

Soit (fig. 9) C_1 C_2 la vrille normale à une vrille V, élevée par le corps C_1, lequel appartient à V. Si on imprime à cette vrille C_1 C_2 un mouvement hélicoïdal autour de l'axe v, de manière que C_1 arrive en C_3, et en même temps, C_2 en C_4, la vrille C_2 C_4 est parallèle à la vrille C_1 C_3 comme ayant le même axe que celle-ci, à savoir v. Mais C_1 C_2 et C_3 C_4 sont aussi parallèles, au

second sens du terme, puisque les axes de ces deux vrilles sont homologues l'un de l'autre relativement au corps descripteur.

A l'inverse, on aurait pu définir d'abord deux vrilles quelconques C_1 C_2 et C_3 C_4, d'axes homologues, par suite parallèles au second sens. Dans ce cas, il existe toujours un mouvement hélicoïdal qui amène l'une en coïncidence avec l'autre, et l'axe de ce mouvement, ou v, est la normale commune aux axes des vrilles données. Si C_1 et C_3 d'une part, C_2 et C_4 de l'autre, se correspondent dans le mouvement hélicoïdal susmentionné, les vrilles C_1 C_3 et C_2 C_4 seront parallèles au premier sens du mot. Ces propriétés sont identiques à celles que possède le rectangle en Géométrie euclidienne. La ressemblance des deux ordres de faits devient plus parfaite encore, si on remarque qu'une même torsion transporte C_1 sur C_3 et C_2 sur C_4, et que deux autres torsions, intrinsèquement identiques, transportent à la fois C_1 sur C_2 et C_3 sur C_4. C'est dire que les deux couples de corps qui se font face sur les côtés opposés du rectangle doivent être regardés comme *équidistants*.

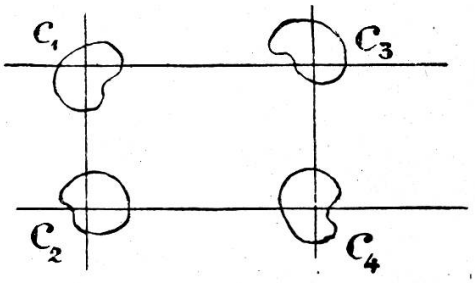

Fig. 9

VIII. Notions Métriques.

Au point où nous sommes parvenus, les notions métriques n'ont joué, dans la Géométrie des corps solides, qu'un rôle effacé ; elles n'y sont pas absentes puisqu'elles interviennent implicitement dans la conception même du mouvement hélicoïdal, laquelle est à la base de toute la théorie. Il n'en est pas moins vrai que l'idée de *mesure* est restée jusqu'ici à l'arrière plan ; c'est elle, au contraire, qui est appelée à intervenir, de la manière la plus positive, dans l'étude des propriétés qui nous restent à voir. Ces propriétés métriques doivent nous conduire enfin à représenter un corps solide à l'aide de *coordonnées* qui en fixent la position dans l'espace.

Parmi les différentes manières d'établir les relations métriques entre deux ou plusieurs corps solides, j'en utiliserai presque exclusivement une seule ; le procédé consiste à substituer aux solides certaines droites, qui les représentent, et la représentation est *congruente*, dans ce sens que les rapports métriques entre les corps sont identiques à ceux qui existent entre leurs images rectilignes.

Distance de deux corps. On sait comment se définit l'*intervalle*, ou pour employer un terme qui ait l'avantage de rappeler des analogies profondes, la *distance* de deux corps solides.

Le mouvement hélicoïdal qui conduit un corps sur un autre, se compose d'une rotation et d'un glissement le long d'un axe fixe. Soient u' la *moitié* de la rotation, et u'' la *moitié* du glissement ; soit encore i l'unité imaginaire, alors la *distance*, ou l'*intervalle* des deux corps est la quantité complexe

$$u' + iu'' .$$

Rangeons les deux corps dans l'ordre C_1 C_2, prenons à volonté le sens de l'axe de la torsion qui amène C_1 sur C_2. Alors u'' est positif ou négatif selon que le glissement a eu lieu dans le sens de l'axe ou en sens opposé ; quant à l'angle de rotation $2u'$, si nous le comptons dans le sens dextrorsum autour du même axe, suivant les règles trigonométriques, il admettra une infinité de déterminations possibles contenues dans la formule générale $2u' + 2k\pi$. La moitié u' n'est ainsi connue qu'aux multiples près du module π. Si, d'autre part, on change le sens de l'axe, ou qu'on intervertisse l'ordre des corps, les quantités u' et u'' changeront de signes.

En un mot, l'*intervalle*, variable suivant la manière de l'estimer, admet une infinité de valeurs différentes, données par la formule

$$\pm (u' + iu'' + k\pi) \qquad \text{ou} \qquad \pm (u + k\pi) ,$$

où k joue le rôle d'un entier quelconque positif ou négatif.

L'indétermination inhérente à la notion de distance de deux solides n'a aucune importance. Qu'on donne une quelconque de ses valeurs, ainsi que l'axe de la torsion qui conduit le premier corps sur le second, l'*amplitude* de cette torsion et la situation

relative de deux corps sont connues sans ambiguité. D'ailleurs l'intervalle n'intervient ordinairement que par son cosinus ; c'est une quantité complexe, connue au signe près, et que j'appellerai souvent l'*invariant* (1) des deux corps. Sa valeur est

$$\cos u = \cos(u' + iu'') = \cos u' \operatorname{ch} u'' - i \sin u' \operatorname{sh} u'' ,$$

formule qui devient, pour le cas euclidien (2)

$$\cos u = \cos u' - iu'' \sin u' .$$

Il importe de remarquer que les définitions précédentes n'ont pas un caractère d'absolue généralité. Dans la Géométrie de Lobatchewsky certains mouvements particuliers, dits *horicycliques,* ne sont équivalents à aucune torsion ; ils dérivent du mouvement hélicoïdal, comme cas limites, quand l'axe de la torsion, d'abord à distance finie, s'éloigne à l'infini. Qu'on prenne, par exemple, les symétriques d'un même corps par rapport à deux droites parallèles ; le mouvement qui conduirait les positions finales du corps l'une sur l'autre est précisément horicyclique.

Dans le cas du mouvement horicyclique, la notion de *distance* s'évanouit ; mais celle d'*invariant* subsiste. On voit aisément que la valeur de l'invariant, dans ce cas singulier, est égale à ± 1 ; c'est la même valeur qu'on obtient pour l'invariant de deux corps coïncidents. Il importe de ne pas confondre ces deux cas, si différents, de la coïncidence et de l'horicyclisme, quoiqu'ils ne puissent être distingués l'un de l'autre par la valeur de l'invariant (3).

Rappelons encore qu'à l'inverse de ce qui a lieu pour deux points la *distance* de deux corps ne suffit pas pour fixer la situation relative de ces corps dans l'espace. Il faut joindre à cette donnée l'axe de la torsion par le moyen de laquelle un des corps s'applique sur l'autre. Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit dans une circonstance analogue, cette différence avec la Géomé-

1) Pour rappeler qu'elle ne dépend pas d'un système particulier de référence.

2) Dans ce cas l'imaginaire i doit vérifier la condition $i^2 = 0$, au lieu de $i^2 = -1$.

3) De même en Géométrie euclidienne, l'invariant est égal à ± 1, non seulement si les deux solides coïncident, mais encore toutes les fois qu'ils sont orientés semblablement.

trie ponctuelle n'a rien de fondamental, et pour la voir s'évanouir, il suffit de soumettre l'espace feuilleté à la totalité des mouvements dont il est susceptible. Dans l'ensemble des mouvements *complexes,* les mouvements *réels,* seuls pris en considération tout à l'heure, sont une imperceptible minorité ; on conçoit que ces mouvements spéciaux puissent manifester certaines propriétés d'invariance qui n'appartiennent pas au système complet de tous les mouvements.

THÉORÈME FONDAMENTAL. (1). *Si on prend les symétriques d'un même corps C_0, en le faisant chavirer successivement autour de deux droites telles que L_1 et L_2, l'intervalle des positions finales C_1 et C_2, est le même que celui des droites.*

Le théorème est presque évident (fig. 10). Soit D la normale commune aux axes L_1, L_2 ; a_1 et a_2 les points du corps C_0 où elle rencontre ces axes. Dans le premier renversement subi par le corps C_0, autour de la droite L_1, a_1 reste fixe, a_2 vient en A_2, et l'on a $a_1 A_2 = a_1 a_2$. Dans le second renversement, autour de L_2, a_2 reste fixe, a_1 vient en A_1 et l'on a $a_2 A_1 = a_1 a_2$.

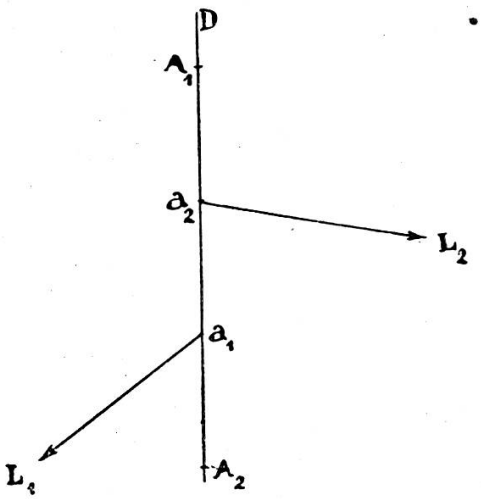

Fig. 10

Ainsi donc la droite D est commune aux corps C_1, C_2. C'est autour de cette droite que C_1 glisse pour venir s'appliquer sur C_2 ; quant à la grandeur du glissement, soit $a_1 A_1$ ou $A_2 a_2$, elle est bien égale au double de la distance des deux axes, soit $a_1 a_2$.

Si maintenant on envisage trois plans P_0, P_1, P_2 qui, passant par la ligne D, occupent respectivement les mêmes positions dans les trois corps C_0, C_1 et C_2, il est clair que l'angle des deux derniers plans est deux fois plus grand que celui formé par

1) Déjà cité dans ma *Note. Archives,* t. XL, p. 460.

les droites L_1 et L_2. Le fait est identique avec la propriété connue de l'optique géométrique ; *si un miroir tourne autour d'un axe perpendiculaire à un rayon lumineux, le rayon réfléchi tourne de l'angle double.*

Il importe de remarquer que C_1 et C_2 peuvent être deux positions arbitraires du corps solide ; le théorème fondamental peut donc revêtir encore la forme suivante.

Soit D l'axe de la torsion qui amène un des corps en coïncidence avec le second. Perpendiculairement à la droite D, traçons une paire de droites L_1 et L_2, dont chacune rencontre D : *il suffit que l'intervalle des deux droites soit égal à celui des solides donnés pour que le symétrique de C_1, relativemenl à L_1, soit identique avec le symétrique de C_2 par rapport à L_2*. Les ∞^2 corps, orthogonaux communs à C_1 et C_2, s'obtiendront en faisant glisser et tourner, le long de la droite D, le couple L_1 L_2 dont la forme est déterminée et la position variable.

Revenons à l'énoncé primitif, et rappelons que l'*intervalle* de deux droites ne saurait être défini avec précision que si elles sont *dirigées*, c'est-à-dire ont été converties en vecteurs à l'aide de flèches apposées à leurs extrémités.

Qu'on se place sur la perpendiculaire commune, les pieds sur l'une des droites, la tête au delà de la seconde ; l'angle dont il faudra tourner, dans le sens direct, le premier vecteur pour que l'observateur le voie disparaître derrière le second, représente la partie réelle de l'intervalle ; quant à la partie imaginaire, elle est égale à la grandeur même de la perpendiculaire. Si on détermine la situation relative des deux droites à l'aide de l'*invariant,* égal au cosinus du dit intervalle, la règle ne laissera subsister aucune ambiguïté, et redonne le même résultat quand on alterne les deux droites.

Quant à la distance qui sépare deux corps, elle n'est connue qu'aux multiples près de la quantité π, et son cosinus comporte une indétermination de signe. Il faut donc revenir sur l'égalité indiquée par le théorème fondamental, afin d'en préciser nettement les conditions. Concevons, dans ce but, que quand un corps chavire autour d'un vecteur, ce soit toujours dans le sens dextrorsum qu'ait lieu la rotation de 180° d'amplitude.

Cela posé, admettons qu'un corps mobile C se rende de C_1 à C_2 en décrivant, dans la vrille qui joint ces corps, un mouvement entièrement déterminé, et prenons dans la vrille conjuguée un corps fixe C_0, lequel sera nécessairement orthogonal à C dans toute la série des positions de ce dernier. Si on suppose que l'axe du renversement qui conduit C_0 sur C ne puisse varier que d'une manière continue, on reconnaît immédiatement que les positions finales du dit axe sont séparées par un intervalle précisément égal à celui des corps C_1 et C_2.

Relation trigonométrique. Soit C un corps solide qui décrit tour à tour deux vrilles V et V′, d'axes (V) et (V′), en se déplaçant, dans chacune, des quantités v et v', de manière à occuper finalement les positions A et A′. Si Ω est l'intervalle des axes (V), (V′), et que ω représente la distance $\overline{AA'}$, je dis que nous avons la relation trigonométrique

$$\cos\omega = \cos v \cos v' + \sin v \sin v' \cos\Omega \ . \qquad (1)$$

Pour faire la preuve de cette proposition fondamentale, prenons un système d'axes coordonnés direct, dont l'axe des z soit la normale commune aux axes (V) et (V′). Traçons un seul des axes, (V) par exemple, et nommons $\varphi = \omega' + i\omega''$, sa distance à $\overline{OX}$.

Nommons C′ la position occupée par C quand on imprime à ce dernier une rotation de 180°, rétrograde autour de $\overline{OZ}$. La distance $v = \overline{CA}$ est égale, nous le savons, à l'intervalle qui sépare les axes des deux renversements qui ramènent le corps C′ tantôt sur C, tantôt sur A. L'un de ces axes est $\overline{OZ}$ lui-même; soit α l'autre, nécessairement normal à la ligne (V), comme le montre la fig. 11. Il nous faut, d'après les règles de la Géométrie réglée, les coordonnées complexes de la droite α par rapport à notre système d'axes [1].

Les coordonnées du vecteur (V) sont évidemment

$$\cos\varphi \ , \qquad \sin\varphi \ , \qquad 0 \ ;$$

[1]) Un mode d'exposition qui éviterait ce recours à la Géométrie réglée serait certainement de beaucoup supérieur à celui que j'adopte ici par motif de brièveté.

celles de α, que j'appelle λ, μ, ν, se déterminent en écrivant que ce vecteur est normal au précédent et à la distance v de l'axe OZ. On a ainsi

$$\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi = 0 \ , \qquad \nu = \cos v \ ,$$

puis, comme toujours,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \ .$$

De là

$$\lambda = \pm \sin v \sin \varphi \ , \qquad \mu = \mp \sin v \cos \varphi \ , \qquad \nu = \cos v \ ,$$

et c'est le signe supérieur qui convient, comme on voit par l'hypothèse $\varphi = 0$, laquelle ramène (V) dans la situation OX.

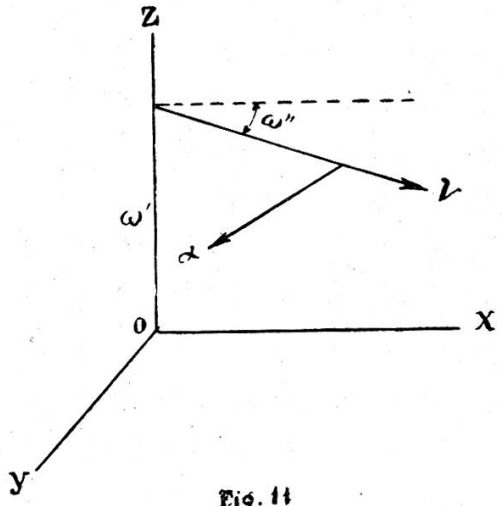

Fig. 11

Les coordonnées de l'axe α', autour duquel C' doit basculer pour venir se mettre sur A', seraient de même

$$\lambda' = \sin v' \sin \varphi' \ , \qquad \mu' = - \sin v' \cos \varphi' \ , \qquad \nu' = \cos v' \ .$$

Enfin la distance des axes α, et α', c'est-à-dire celle des corps A et A' eux-mêmes, vaudra

$$\cos \omega = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \cos v \cos v' + \sin v \sin v' \cos (\varphi - \varphi') \ .$$

C'est la même formule que (1), puisque $\Omega = \pm (\varphi - \varphi')$.

Le mode de construction nous a conduit à donner à la *distance* ω des positions extrêmes A et A' une signification précise ; cela provient du fait que le corps C a exécuté deux mouvements parfaitement définis, dans les vrilles V et V', avant de s'arrêter finalement en A et en A'. Il va de soi que le plus souvent on ne

se trouvera pas dans des conditions aussi nettes ; on écrira alors la formule avec l'ambiguïté de signe

$$\pm \cos \omega = \cos v \cos v' + \sin v \sin v' \cos (\varphi - \varphi') , \qquad (2)$$

qui n'en limite aucunement l'emploi.

L'équation (1), ou (2), laquelle n'est autre que la relation connue des distances de trois points dans l'espace elliptique, illustre de nouveau la parenté qui existe entre la Géométrie des corps solides et la Géométrie ponctuelle. La formule s'interprètera schématiquement à l'aide d'un triangle (fig. 12).

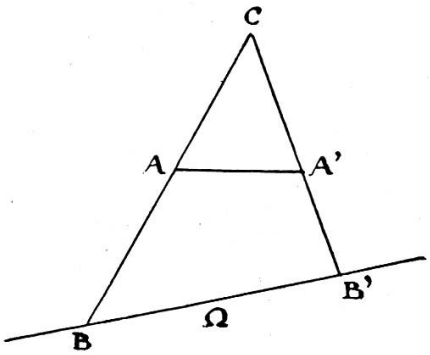

Fig. 12

Le sommet C y représente le corps faisant fonction d'origine, les droites CA, CA′ y figurent les vrilles décrites par C ; les longueurs des segments sont les déplacements dans chacune de ces vrilles ; les points B et B′, placés dans le plan conjugué à C, à la distance Ω, représentent les projections de C sur le vrilloïde (C), et ainsi de suite.

(A suivre.)