LES GÉOMÉTRIES FONDAMENTALES

DE

L'ESPACE EUCLIDIEN

PAR

René de SAUSSURE

Préliminaires.

Le but de cet article est : 1° de signaler l'existence, dans l'espace à *une* dimension, de géométries fondamentales à deux et même à trois paramètres ; 2° d'établir une classification rationnelle de toutes les géométries fondamentales, anciennes et récentes, en tâchant d'en unifier la terminologie.

La seule réalité spatiale est l'espace physique à trois dimensions. Les espaces dits « à plus de trois dimensions » sont de simples conceptions de notre esprit, ne correspondant à aucune réalité physique, car l'essence même de l'espace est d'avoir trois dimensions. Notre classification ne comprendra que les géométries relatives à l'espace réel considéré sous sa forme traditionnelle (espace euclidien).

Définitions.

Dans un article précédent[1] nous avons constaté qu'il existe *sept* figures géométriques, et seulement sept, qui sont de simples « positions », c'est-à-dire qui ne contiennent aucun paramètre de grandeur.

Ces figures sont :

1. Le *point*. Un point est une simple position ; il n'a pas de

[1] Voir René de Saussure, La géométrie des feuillets, *Arch. 1906*.

grandeur et il peut tourner sur lui-même, d'une façon quelconque, sans cesser d'être le même point.

2. La *règle,* ou ligne droite indéfinie, considérée comme élément spatial, comme tout indivisible (et non pas comme série de points). Une règle est une simple position; elle ne contient pas de grandeur et elle peut glisser ou tourner sur elle-même sans cesser pour cela d'être la même règle.

3. L'*èdre,* ou *monoèdre,* c'est-à-dire un plan indéfini, considéré comme élément spatial, comme tout indivisible (et non pas comme surface de points). Un èdre est une simple position; il ne contient pas de grandeur et il peut glisser sur lui-même, d'une façon quelconque, sans cesser d'être le même èdre.

4. La *flèche,* ou figure (PR) formée par un point P attaché[1] à une règle R. Le point P est l'*origine* de la flèche; la règle R en est la *hampe* et cette hampe est affectée d'un sens positif (indiqué par la pointe de la flèche). Une flèche est une simple position; elle ne contient pas de grandeur, et elle peut tourner autour de sa hampe sans cesser d'être la même flèche.

5. Le *bouclier,* ou figure (PE) formée par un point P attaché à un èdre E. Le point P est l'*origine* du bouclier; l'èdre E en est la *feuille* et les deux faces de cette feuille sont affectées respectivement des signes $+$ et $-$. La normale en P à l'èdre E est l'*axe* du bouclier. Un bouclier est une simple position; il ne contient pas de grandeur, et il peut tourner autour de son axe sans cesser d'être le même bouclier.

6. Le *drapeau,* ou figure (RE) formée par une règle R attachée à un èdre E (c'est-à-dire que la règle R est une droite marquée dans le plan de l'èdre E). La règle R affectée d'un sens, est la *hampe* du drapeau; l'èdre E, qui a une face positive et une négative, en est la *feuille.* Un drapeau est une simple position; il ne contient aucune grandeur et il peut glisser parallèlement à sa hampe sans cesser d'être le même drapeau.

7. Le *feuillet,* ou figure (PRE) formée par un point P attaché à une règle R, laquelle est elle-même attachée à un èdre E. Le point P est l'*origine,* la règle R la *hampe,* et l'èdre E la *feuille* du feuillet (PRE); la hampe a un sens déterminé (par une

[1] Dire qu'un point est « attaché » à une figure signifie que ce point est un point marqué sur la dite figure.

pointe de flèche) et les deux faces de la feuille sont distinguées par les signes + et —. Un feuillet est une simple position ; il ne contient aucune grandeur et il ne peut pas glisser sur lui-même. Il en résulte que si l'on attache un corps solide quelconque C à un feuillet (PRE), la position de ce feuillet déterminera complètement celle du corps C. Les systèmes de corps solides invariables sont donc réductibles aux systèmes de feuillets, ou, si l'on veut, le feuillet est ce qui reste d'un corps solide lorsque celui-ci a été dépouillé de sa forme et de sa grandeur.

En résumé, des sept figures-position fondamentales trois sont des éléments simples (point, règle, èdre), trois sont des éléments doubles (flèche, bouclier, drapeau), et une est un élément triple (feuillet).

Comme conséquence de la terminologie que nous avons adoptée, les mots *droite* et *plan* reprennent leur sens primitif (sens d'Euclide) ; ce ne sont plus des éléments spatiaux (ceux-ci étant désignés désormais par les vocables *point, règle* et *èdre),* ce sont des « espaces » respectivement à une et à deux dimensions ; en d'autres termes, le mot « droite » redevient synonyme de « ligne droite » (espace à une dimension), et le mot « plan » redevient synonyme de « surface plane » (espace à deux dimensions).

Il est donc indiqué de compléter notre terminologie en adoptant un nouveau terme pour différencier le « point » ordinaire (élément de position), du « point », considéré comme centre d'une gerbe de règles et d'èdres (espace angulaire à deux dimensions), que nous désignerons sous le nom *point-centre* ou *pivot.*

Rappelons encore que nous avons adopté le terme de *polysérie* pour désigner une série continue de figures égales (ou tout au moins de même espèce) en nombre multiplement infini ; ainsi :

Une	*monosérie*	est une série d'éléments		en	nombre	∞^1,
»	*bisérie*	»	»		»	∞^2,
»	*trisérie*	»	»		»	∞^3,
»	*tétrasérie*	»	»		»	∞^4,
	etc.					etc.

Par exemple, une ligne (ponctuée) est une monosérie de points, une surface (ponctuée) est une bisérie de points, une surface réglée est une monosérie de règles, un complexe est une trisérie réglée, etc., etc.

Enfin, pour unifier autant que possible la terminologie des différentes géométries fondamentales nous adopterons encore les définitions suivantes :

deux figures seront dites *inverses* lorsqu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point ;

deux figures seront dites *réflexes* lorsqu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un èdre ;

deux figures seront dites *contraires* lorsqu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à une règle ;

une figure *cotée* est une figure à laquelle on a associé une quantité constante (appelée *cote* de la figure [1]) ;

deux figures seront dites *réciproques* l'une de l'autre, lorsque l'une d'elles étant maintenue fixe, l'autre décrit, grâce à cette réciprocité, une polysérie *linéaire* [2].

La relation qui exprime la réciprocité de deux figures varie naturellement avec les figures considérées. Ainsi, par exemple, un point P et un èdre E sont réciproques, lorsqu'ils satisfont à la relation :

$$d = 0 ,$$

d étant l'intervalle, ou la distance, compris entre le point P et l'èdre E; en effet, si l'on maintient l'èdre E fixe, le lieu des points P réciproques de E est un plan (bisérie linéaire de points), et réciproquement, si l'on maintient fixe le point P, le lieu des èdres E réciproques de P est une gerbe (bisérie linéaire d'èdres).

Dans les géométries dont le caractère est *quadratique,* la relation de réciprocité contient une constante arbitraire, que nous désignerons sous le nom d'*indice de réciprocité;* ainsi, par exemple, en géométrie réglée, deux règles R et R' sont réciproques, lorsqu'elles satisfont à la relation :

$$h \tang \omega = c,$$

[1] La cote n'est pas un paramètre de grandeur, car elle ne correspond à aucune grandeur de la figure même à laquelle elle est associée. C'est pourquoi les figures-cotées font partie des figures-position.

[2] Cette terminologie diffère en quelques points de celle que j'avais

h et ω définissant l'« intervalle » des deux règles (h = leur plus courte distance et ω leur angle), et c étant une constante donnée. Nous dirons alors que *les règles R et R' sont réciproques pour l'indice c,* et l'on voit que si l'on maintient fixe la règle R, par exemple, le lieu des règles R', réciproques de R pour l'indice c, est bien une polysérie linéaire (complexe linéaire). Lorsque l'indice c est nul, il n'est pas nécessaire de le mentionner, et comme dans ce cas la plus courte distance h est nulle, on voit que : deux règles sont réciproques pour l'indice zéro, lorsqu'elles se rencontrent ; on peut donc dire que *deux règles qui se rencontrent sont réciproques* (sans mention d'indice).

Remarque. — Lorsque les deux figures réciproques sont de même nature, la géométrie qui en résulte sera dite *unisexuelle ;* ainsi, la géométrie des règles est unisexuelle, parce que la figure réciproque d'une règle est aussi une règle.

Au contraire, lorsque les deux figures réciproques sont de nature différente, comme par exemple les points et monoèdres réciproques, la géométrie qui en résulte sera dite *bisexuelle,* parce que toutes les formes d'une pareille géométrie peuvent être considérées sous un double aspect (séries de points ou enveloppes de monoèdres).

§ 1. — LES GÉOMÉTRIES FONDAMENDALES DE L'ESPACE A UNE DIMENSION.

Qu'est-ce que l'espace à une dimension ? A première vue, c'est simplement une série de points formant une ligne droite. Mais cette définition est incomplète.

Les espaces qui ont moins de trois dimensions n'ont pas d'existence indépendante ; ces espaces sont, au même titre que toutes les figures géométriques, des abstractions, des limitations fictives de l'espace réel à trois dimensions. Un plan, par exemple, est bien un espace à deux dimensions, mais il ne peut être conçu sans l'espace tridimensionnel dans lequel il est plongé ; il est solidaire de ce dernier.

adoptée dans mon travail sur la *Théorie géométrique du mouvement des corps.* Je me suis efforcé de la simplifier et de tenir compte des terminologies, employées par d'autres auteurs (R. S. Ball, C. Cailler, etc.).

Il existe bien des milieux continus, à moins de trois dimensions, qui jouissent d'une existence physique indépendante : ainsi, le *temps* est un continu à une dimension, mais ce continu n'est plus fait d'étendue, il est fait de *durée.* Entre le temps à une dimension et l'espace à une dimension, il n'y a pas seulement différence qualitative (durée et étendue) ; il y a différence de structure, par le fait que le temps est un tout indépendant, tandis qu'une ligne droite (espace à une dimension que nous désignerons par S_1) est solidaire de l'espace qui l'entoure. Dans le champ de la durée on ne perçoit qu'une suite d'*époques,* tandis que la ligne droite S_1 peut être considérée, soit comme une série de points P, soit comme une série de monoèdres E, se croisant sur la droite S_1 et formant un faisceau, porté par cette droite. Aussi, tandis que le temps ne connaît qu'une seule espèce de grandeur (la durée), l'espace à une dimension S_1 en connaît deux : la *longueur,* ou distance de deux points P et P', situés sur la droite S_1, et l'*angle dièdre,* ou grandeur angulaire, comprise entre deux èdres [1], passant par la droite S_1.

L'espace à une dimension contient-il seulement des grandeurs, ou bien contient-il aussi des *formes* géométriques ; en d'autres termes, existe-t-il une véritable géométrie à une dimension ?

A première vue, il semble que non, car les points P et les èdres E ne peuvent se déplacer que d'une seule manière dans l'espace S_1 ; ils ne peuvent donc pas engendrer une diversité de formes dans cet espace ; on ne peut donc parler ni de géométrie ponctuelle, ni de géométrie tangentielle, dans l'espace à une dimension. Mais l'espace S_1 ne contient pas seulement des points P et des èdres E; il contient aussi des boucliers *(PE),* et même une double infinité de boucliers, puisqu'on peut associer un point quelconque P à un èdre quelconque E d'une

[1] C'est grâce à l'existence de ces grandeurs spatiales à une dimension que le phénomène du mouvement se présente sous deux formes irréductibles l'une à l'autre. En effet, le temps, n'ayant qu'une dimension, ne peut être associé dans l'espace qu'à des grandeurs à une dimension ; il y a donc deux espèces possibles de mouvement : le *mouvement linéaire* (obtenu par association d'une longueur avec une durée) et le *mouvement angulaire* (par association d'un angle dièdre avec une durée).

double infinité de manières différentes. Le bouclier *(PE)* peut, en effet, tourner et glisser sur la droite S_1, d'une manière arbitraire, sans sortir de l'espace à une dimension; il peut donc engendrer dans cet espace des monoséries de différentes formes (tout comme un point peut engendrer des lignes de diverses formes dans un plan).

Il existe donc, dans l'espace à une dimension, une géométrie fondamentale à deux paramètres, géométrie dont l'élément spatial primitif est le bouclier (une des sept figures fondamentales). Exposons en quelques mots les éléments de cette nouvelle géométrie.

Géométrie des boucliers.

Soit S_1 la ligne droite représentant un espace à une dimension; soient *(PE)* et *(P'E')* deux boucliers situés dans cet espace (c'est-à-dire tels que leurs origines P et P' soient situées sur la droite S_1, et que leurs feuilles E et E' passent par cette droite); nous dirons que ces *deux boucliers sont réciproques pour l'indice c, lorsqu'ils satisfont à la relation :*

$$h \ tang \frac{\omega}{2} = c \ , \qquad (3)$$

h et ω définissant l'« intervalle » entre les deux boucliers ($h =$ distance des points P et P', et $\omega =$ angle des èdres E et E'), et c désignant une constante donnée. Pour justifier cette définition, il faut montrer que si l'on maintient fixe l'un des boucliers, par exemple le bouclier *(PE),* le lieu des boucliers *(P'E'),* réciproques de *(PE)* pour l'indice c, a les caractères d'une monosérie linéaire.

Remarquons d'abord que si *(PE)* est le bouclier fixe, la position du bouclier mobile *(P'E')* est déterminée univoquement par l'équation (3); en effet, pour chaque valeur de h, l'angle ω est déterminé à un multiple près de 2π, et réciproquement, à chaque valeur de ω ne correspond qu'une valeur de h, déterminée en grandeur et en signe.

Remarquons ensuite que la présence d'une constante arbitraire c, dans la formule de réciprocité (3), montre que *la géométrie des boucliers dans l'espace S_1 est une géométrie de caractère quadratique,* analogue par conséquent à la géométrie des règles (ou à celle des feuillets) dans l'espace à trois dimensions (S_3). C'est ce qui fait l'intérêt de cette géométrie des boucliers, car elle est, à ma connaissance, le premier exemple d'une *géométrie quadratique à deux paramètres;* elle vient ainsi compléter la série des géométries quadratiques, puisque la géométrie des règles est à quatre paramètres, et celle des feuillets, à six paramètres. On voit que toutes les géométries quadratiques sont à un nombre pair de paramètres[1].

On peut maintenant vérifier facilement que le lieu des boucliers réciproques d'un bouclier fixe (pour un indice donné c) est bien une *monosérie linéaire.* Et d'abord, que ce lieu est bien une monosérie, cela est évident, puisque l'équation de réciprocité (3) établit une relation entre les deux coordonnées h et ω du bouclier mobile. Désignons par M la monosérie des boucliers réciproques d'un bouclier fixe, pour l'indice a; cette monosérie jouera, dans la géométrie des boucliers, le même rôle que le complexe linéaire, dans la géométrie réglée (puisque le complexe linéaire est le lieu des règles réciproques d'une règle fixe, pour un indice donné). Or, dans toute géométrie quadratique, si n est le nombre de paramètres dont dépend l'élément spatial de cette géométrie, la polysérie linéaire fondamentale dépend de $n-1$ paramètres, et les éléments communs à n polyséries linéaires sont au nombre de *deux.* Dans l'espace S_1, la géométrie des boucliers est à deux paramètres; on a donc ici: $n = 2$; en d'autres termes, si la monosérie M est une monosérie linéaire, les boucliers communs à deux monoséries M doivent être au nombre de deux.

Or, c'est précisément ce qui a lieu. En effet, soient $(P_1 E_1)$ et $(P_2 E_2)$ les boucliers fixes, qui sont respectivement réciproques des deux monoséries données M_1 et M_2, boucliers que l'on peut appeler les *boucliers centraux* de ces monoséries[2]; et soient:

$$h_1 \, tang \frac{\omega_1}{2} = c_1 \qquad \text{et} \qquad h_2 \, tang \frac{\omega_2}{2} = c_2,$$

[1] Pour être tout à fait complet, il faudrait ajouter: « Dans les espaces qui ont un nombre impair de dimensions » (comme S_1 et S_3).

[2] Le bouclier central d'une monosérie M ne fait pas partie de cette monosérie, car pour $h = 0$, l'angle ω n'est pas nul.

les équations de ces monoséries, par rapport à leur bouclier central. Rapportons la seconde de ces équations au bouclier central de la première monosérie, au moyen des formules de transformation :

$$h_2 = h_1 + h \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \omega_1 + \omega,$$

(h et ω étant le glissement et la rotation qui séparent les deux boucliers centraux). Les équations des deux monoséries, rapportées au même bouclier (P_1E_1) sont alors :

$$h_1 \, tang \, \frac{\omega_1}{2} = c_1 \qquad \text{et} \qquad (h_1 + h) \, tang \, \frac{\omega_1 + \omega}{2} = C^1. \qquad (4)$$

Les racines de ces équations, par rapport aux variables h_1 et ω_1, seront les coordonnées des boucliers communs aux deux monoséries. Or, si on élimine la variable $tang \, \frac{\omega_1}{2}$, entre ces deux équations, il reste une équation du second degré en h_1 ; et puisqu'à toute valeur de h_1 ne correspond qu'une valeur de $tang \, \frac{\omega_1}{2}$, on voit que *les deux monoséries M_1 et M_2 ont toujours deux, et seulement deux, boucliers communs.* C. q. f. d.

On peut voir d'une autre manière que la monosérie M est une monosérie linéaire: il suffit de remarquer que dans toute géométrie quadratique, la monosérie linéaire est complètement déterminée par 3 éléments[1] ; ainsi, par exemple, trois règles déterminent un hyperboloïde réglé (monosérie linéaire de règles), trois feuillets déterminent une monosérie linéaire de feuillets. Donc, dans l'espace S_1, trois boucliers doivent déterminer complètement la monosérie M.

C'est en effet ce qui a lieu ; en effet, en développant la seconde des équations (4), qui représente l'équation d'une monosérie M rapportée à un bouclier fixe quelconque, pris comme origine des coordonnées courantes h_1 et ω_1, on obtient une équation de la forme :

$$h_1 \, tang \, \frac{\omega_1}{2} + Ah_1 + B \, tang \, \frac{\omega_1}{2} + C = 0,$$

[1] Plus généralement, on peut dire que, dans toute géométrie de degré m, la monosérie linéaire est déterminée par $m + 1$ éléments ; la bisérie linéaire, par $m + 2$ éléments ; la trisérie linéaire, par $m + 3$ éléments ; etc.

où A, B, C désignent des constantes. On pourra donc choisir ces trois constantes de manière à faire passer la monosérie par trois boucliers donnés ; et il n'y a qu'une solution, puisque ces constantes ne figurent qu'au premier degré dans l'équation. En d'autres termes : *par trois boucliers donnés arbitrairement, dans l'espace S_1, on peut toujours faire passer une monosérie M, et on n'en peut faire passer, en général, qu'une seule.*

En résumé, *le lieu des boucliers réciproques d'un bouclier fixe, pour un indice donné c, est bien une monosérie linéaire.* Lorsque l'indice c est nul, l'équation de la monosérie linéaire se réduit à

$$h \ \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = 0 \ ,$$

et la monosérie sera dite *spéciale.* Elle se décompose alors (autour de la droite S_1) en un faisceau de boucliers ayant une origine P commune, et en une file de boucliers ayant une feuille E commune. On voit donc que deux boucliers sont réciproques pour l'indice zéro, ou plus simplement (sans mention d'indice) : *deux boucliers sont réciproques lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une simple rotation* (ω), *ou par un simple glissement* (h), *le long de l'axe S_1*. Ou encore : *deux boucliers sont réciproques, dans l'espace S_1, lorsqu'ils ont une origine commune* (et des feuilles différentes), *ou une feuille commune* (et des origines différentes).

Signalons encore quelques-unes des analogies qui existent entre les trois géométries quadratiques de l'espace euclidien (boucliers, règles, feuillets) :

Dans l'espace S_1, deux monoséries linéaires ont en commun deux boucliers ; dans l'espace S_3, quatre complexes linéaires ont en commun deux règles, et six monoséries linéaires de feuillets ont en commun deux feuillets.

Dans l'espace S_1, deux boucliers sont réciproques lorsqu'ils ont même origine, ou même feuille (c'est-à-dire lorsque $h = 0$, ou $\omega = 0$) ; dans l'espace S_3, deux règles sont réciproques lorsqu'elles se rencontrent, ou sont parallèles (c'est-à-dire lorsque $h = 0$, ou $\omega = 0$), et deux feuillets sont réciproques lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une simple rotation, ou par un simple glissement (c'est-à-dire lorsque $h = 0$, ou $\omega = 0$).

Dans l'espace S_3; la bisérie linéaire de feuillets et la monosérie linéaire de règles (hyperboloïde réglé) sont susceptibles d'une double génération. L'hyperboloïde réglé, par exemple, peut être considéré, de deux manières différentes, comme une monosérie linéaire de règles; en outre, ces deux monoséries sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que chaque règle d'une des monoséries est réciproque de chaque règle de l'autre (puisque toute génératrice du premier système rencontre toutes les génératrices du second, et réciproquement). Dans l'espace S_1, la géométrie des boucliers offre un phénomène analogue: un couple de points, P et P^1 associé à un couple de monoèdres, E et E^1, peut être considéré de deux manières différentes comme un couple de boucliers[1]; on peut le considérer comme le couple PE et P^1E^1, ou bien comme le couple PE^1 et P^1E, et les boucliers du premier système sont bien réciproques des boucliers du second, car le bouclier PE, par exemple, est réciproque des boucliers PE^1 et P^1E (puisque les boucliers PE et PE^1 ont une origine P commune, et que les boucliers PE et P^1E ont une feuille E commune).

On pourrait trouver encore beaucoup d'autres analogies entre la géométrie des boucliers dans l'espace S_1 et les autres géométries quadratiques.

Nous nous bornerons à mentionner la suivante, à cause de sa portée générale: *à toute géométrie quadratique à n paramètres correspond une géométrie linéaire à n + 1 paramètres,* obtenue en ajoutant une *cote* à l'élément spatial qui sert de point de départ (règle ou feuillet); il suffit, pour passer de la géométrie quadratique à la géométrie linéaire correspondante, de remplacer l'indice de réciprocité par la somme des cotes des deux éléments réciproques. C'est ainsi que pour passer, par exemple, de la géométrie quadratique des règles à la géométrie linéaire des règles-cotées[2], il suffit de remplacer, dans la relation de réciprocité

$$h \tan \omega = c ,$$

[1] Dans les géométries quadratiques, le *couple d'éléments* (boucliers, règles ou feuillets) doit être considéré comme la *série linéaire d'ordre zéro* de multiplicité.

[2] Une règle cotée est identique, au point de vue géométrique, à ce que R. S. Ball appelle une vis (voir Theory of Screws, de cet auteur).

l'indice c par la somme des cotes r et r^1 des règles-cotées réciproques $R(r)$ et $R^1(r^1)$, ce qui donne :

$$h \tan g\, \omega = r + r^1 .$$

De même, dans l'espace S_1, il existe, outre la géométrie quadratique des boucliers, une géométrie linéaire de boucliers cotés, qui sera à trois paramètres, puisque celle des boucliers non cotés est à deux paramètres. On arrive ainsi à cette constatation assez curieuse que l'espace à une dimension S_1 est le siège de géométries fondamentales, non seulement à *deux*, mais encore à *trois* paramètres. Ce fait n'a du reste rien d'anormal, puisque nous avons déjà constaté l'existence d'une géométrie fondamentale à 3 paramètres dans l'espace à deux dimensions (géométrie des flèches), ainsi, que de géométries fondamentales à 6, et même à 7, paramètres dans l'espaee à trois dimensions (géométrie des feuillets). Il ne sera pas inutile d'exposer ici les éléments de la géométrie des boucliers cotés, dans l'espace S_1.

Géométrie des boucliers cotés.

Un bouclier coté $B(b)$ est une figure composée d'un bouclier B auquel on a associé une cote b. Pour qu'un tel bouclier fasse partie de l'espace à une dimension S_1, il faut et il suffit que son origine P soit située sur la droite S_1, et que sa feuille E passe par cette droite. Bien entendu, les deux faces de cette feuille constituent des èdres distincts, différenciés par les signes + et —. L'individualité d'un bouclier coté $B(b)$ dans l'espace S_1 dépend de trois paramètres : 2 coordonnées h et ω pour définir la position du bouclier B (par rapport à un bouclier fixe B_0, pris comme origine) et une quantité b pour servir de cote au bouclier B.

Boucliers-cotés réciproques. — Soient $B(b)$ et $B^1(b^1)$ deux boucliers-cotés de l'espace S_1 ; h et ω le glissement et la rotation qui permettent d'amener B en coïncidence avec B^1. Nous dirons que ces *deux boucliers-cotés sont réciproques, lorsqu'ils satisfont à la relation :*

$$h \tan g\, \frac{\omega}{2} = b + b^1 . \qquad (5)$$

Si le bouclier $B(b)$ est maintenu fixe, le lieu des boucliers

$B^1(b^1)$ réciproques de $B(b)$ sera une *bisérie*, puisque l'équation (5) établit une relation entre les trois paramètres variables h, ω et b^1. En outre, d'après ce que nous avons dit plus haut, la géométrie des boucliers cotés, dans l'espace S_1, sera une géométrie de caractère *linéaire* (dérivée de la géométrie quadratique des boucliers non cotés), et la bisérie représentée par l'équation (5) sera la *bisérie linéaire*, c'est-à-dire la forme fondamentale de cette géométrie. Nous donnerons à cette bisérie linéaire le nom de *bifaisceau*.

Il est à remarquer que tous les boucliers de l'espace S_1 font partie de ce bifaisceau, car les paramètres h et ω peuvent prendre toutes les valeurs possibles ; mais dès que h et ω sont donnés, c'est-à-dire dès que la position du bouclier B^1 est donnée, l'équation (5) détermine univoquement la cote b^1 qui doit être assignée à ce bouclier, pour qu'il fasse partie du bifaisceau (puisque la cote b du bouclier fixe $B(b)$ est donnée).

Réciproquement, si l'on se donne une cote b^1, l'équation (5) représentera une monosérie de boucliers définie par l'équation :

$$h \ \mathrm{tang} \ \frac{\omega}{2} = c \ ,$$

c étant une constante, puisque les cotes b et b^1 sont alors toutes deux données. Cette équation représente une monosérie linéaire de boucliers B^1, puisque cette équation est la même que la relation (3) qui nous a servi à définir le lieu des boucliers B^1 réciproques de B pour l'indice c. D'où le théorème : *dans tout bifaisceau de boucliers-cotés $B^1(b^1)$, l'ensemble des boucliers qui sont affectés d'une même cote b^1 est une monosérie linéaire de boucliers*[1] *(non cotés) B^1.*

Ce théorème correspond dans les autres géométries quadratiques à des théorèmes analogues : par exemple, dans la géométrie des règles-cotées, « l'ensemble des règles d'un tétrafaisceau, qui ont une cote donnée, forme un complexe linéaire (trisérie

[1] En particulier, dans tout bifaisceau le lieu des boucliers de cote nulle est une monosérie linéaire de boucliers (non cotés). Nous constatons donc ici de nouveau, ce que nous avons constaté dans les autres géométries quadratiques, à savoir qu'une figure non cotée est équivalente à une figure cotée dont la cote est nulle.

linéaire de règles, non cotées) » ; ou encore, dans la géométrie des feuillets cotés, « l'ensemble des feuillets d'une hexacouronne, qui ont une cote donnée, forme une pentasérie linéaire de feuillets (non cotés). Plus généralement, dans toute géométrie cotée, l'ensemble des figures, qui ont une cote donnée et qui font partie d'une polysérie linéaire d'ordre n de multiplicité, forme une polysérie linéaire d'ordre $n-1$ de la même figure (non cotée). Ainsi toute polysérie linéaire cotée, d'ordre n, peut être considérée comme formée par l'assemblage d'une infinité de polyséries linéaires non cotées, d'ordre $n-1$, obtenue en donnant à la cote successivement toutes les valeurs possibles, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Comme la géométrie non cotée est quadratique, tandis que la géométrie cotée correspondante est linéaire, on peut considérer toutes les géométries quadratiques comme des géométries incomplètes, dont les formes ne sont que des parties des formes complètes qui sont réalisées dans les géométries linéaires correspondantes, c'est-à-dire dans les géométries cotées.

Le caractère linéaire de la géométrie des boucliers cotés nous permet d'énoncer, sans autre, les théorèmes suivants, que l'on démontrerait d'ailleurs facilement :

1. *Dans l'espace S_1, trois bifaisceaux ont toujours un bouclier-coté commun, et n'en ont en général qu'un seul.*

2. *Par trois boucliers-cotés, situés d'une manière arbitraire dans l'espace S_1, on peut toujours faire passer un bifaisceau, et on n'en peut faire passer, en général, qu'un seul*[1].

Deux bifaisceaux ont en commun une infinité de boucliers-cotés, formant une *monosérie linéaire,* à laquelle nous donnerons le nom de *monofaisceau.* On a donc encore les théorèmes suivants :

3. *L'intersection de deux bifaisceaux est un monofaisceau.*

4. *Par deux boucliers cotés, situés d'une manière quelconque dans l'espace S_1, on peut toujours faire passer un monofaisceau, et on n'en peut faire passer qu'un seul*[2].

[1] Il résulte de ce théorème, que dans l'espace S_1, *il existe un bouclier-coté réciproque de trois boucliers-cotés donnés,* et il n'en existe, en général, qu'un seul.

[2] Le monofaisceau de boucliers-cotés n'est qu'un cas particulier de la

Soient $B(b)$ et $B^1(b^1)$ deux boucliers donnés et soit M le monofaisceau passant par ces deux boucliers. Construisons le bifaisceau réciproque du bouclier $B(b)$, ainsi que le bifaisceau réciproque du bouclier $B^1(b^1)$; ces deux bifaisceaux se coupent suivant un monofaisceau N. Nous allons démontrer que *les monofaisceaux M et N sont réciproques l'un de l'autre*, c'est-à-dire que tout bouclier-coté appartenant à l'un de ces monofaisceaux est réciproque de tout bouclier-coté appartenant à l'autre monofaisceau. En effet, d'après la construction du monofaisceau N, tout bouclier-coté appartenant à N est réciproque des boucliers $B(b)$ et $B^1(b^1)$; si donc on prend deux boucliers quelconques dans N, le monofaisceau réciproque de ces deux boucliers contiendra $B(b)$ et $B^1(b^1)$; ce monofaisceau réciproque coïncidera donc avec M (puisqu'il n'existe qu'un monofaisceau contenant deux boucliers donnés). Réciproquement, si l'on prend deux boucliers quelconques dans M, le monofaisceau réciproque de ces deux boucliers coïncidera avec N.

Pour construire le monofaisceau N réciproque d'un monofaisceau donné M, on remarque d'abord que *dans tout monofaisceau il existe deux boucliers-cotés, qui ont une cote donnée*[1] ; ensuite que *deux boucliers-cotés sont réciproques si les mêmes boucliers,*

monocouronne de feuillets-cotés. Ce cas est celui où la hampe du feuillet coïncide avec l'axe S_1 de la monocouronne. On peut donc construire le monofaïsceau passant par 2 boucliers-cotés, comme on construit une monocouronne passant par 2 feuillets cotés : soient B(b) et B¹(b¹) les deux boucliers cotés, donnés dans l'espace S_1 ; soit R une règle quelconque normale à l'axe S_1 ; on construit le bouclier B_0 symétrique de B par rapport à la règle R ; ce bouclier B_0 est alors aussi symétrique de B^1 par rapport à une certaine règle R^1, qui est aussi normale à l'axe S_1 ; on assigne aux règles R et R^1 des cotes r et r^1, respectivement égales à la moitié des cotes b et b^1 ; les deux règles-cotées. $R(r)$ et $R^1(r^1)$ déterminent alors un monofaisceau de règles-cotées (conoïde de Plücker), ayant pour axe l'axe S_1 ; on construit tous les boucliers symétriques du bouclier fixe B_0, par rapport aux différentes génératrices de ce conoïde ; enfin, on assigne à chacun de ces boucliers une cote égale au double de celle de la génératrice correspondante du conoïde. Les boucliers-cotés, ainsi construits, constituent le monofaisceau passant par les deux boucliers donnés $B(b)$ et $B^1(b^1)$.

[1] Cette propriété se retrouve dans toutes les géométries cotées ; ainsi, dans le monofaisceau de règles-cotées, il existe deux règles ayant une cote donnée ; dans la monocouronne de feuillets cotés, il existe deux feuillets ayant une cote donnée.

non cotés, sont réciproques (c'est-à-dire si $h = 0$, ou $\omega = 0$) *et si la somme de leurs cotes est nulle* (car alors la relation de réciprocité $h \, tang \, \frac{\omega}{2} = b + b^1$ se réduit à $0 = 0$)[1]. On a donc la construction suivante : Pour construire le monofaisceau N réciproque d'un monofaisceau donné M, on prend dans M deux boucliers PE et P^1E^1 de même cote (b); en intervertissant les origines P et P^1, ainsi que les feuilles E et E^1 de ces boucliers, on obtient deux nouveaux boucliers PE^1 et P^1E qui, d'après les remarques précédentes, seront réciproques des deux premiers, pourvu qu'on leur donne une cote égale et de signe contraire ($-b$). Les boucliers PE^1 et P^1E, affectés de la cote ($-b$), font partie du monofaisceau réciproque N (puisqu'ils sont réciproques de deux boucliers-cotés appartenant à M). En faisant varier la cote b, on pourra construire tout le monofaisceau N.

Les deux monofaisceaux réciproques M et N sont intimement unis l'un à l'autre, puisqu'ils se composent chacun d'une famille de boucliers accouplés deux à deux par une cote commune, de telle façon que chaque couple de cote b dans M est composé de boucliers ayant les mêmes origines et les mêmes feuilles que ceux du couple de même cote dans N ; les origines et les feuilles du couple sont seulement interverties, et le signe de la cote est changé[2].

Correspondance entre les espaces à une et à deux dimensions, — Il existe deux sortes d'espaces à deux dimensions : l'espace *plan*, formé des points et des règles situés dans un même plan, et l'espace *angulaire*, formé des règles et des èdres attachés à un même point-centre. Or, il y a autant de boucliers-cotés, dans l'espace à une dimension, que de flèches dans l'espace plan, ou de drapeaux dans l'espace angulaire; et comme les trois géomé-

[1] Cette propriété se retrouve aussi dans toutes les géométries cotées : ainsi, par exemple, deux règles-cotées sont réciproques lorsque ces règles se rencontrent ($h = 0$ ou $\omega = 0$) et que la somme de leurs cotes est nulle.

[2] Cette construction des monofaisceaux réciproques est à rapprocher de celle des bifaisceaux réciproques dans la géométrie des règles-cotées : on sait que les règles d'un bifaisceau, qui ont une même cote r, forment un hyperboloïde (monosérie linéaire), dont le second système de génératrices (système réciproque) appartient au bifaisceau complémentaire, à condition de donner à ces génératrices une cote égale et de signe contraire ($-r$).

tries, correspondant à ces trois éléments, sont toutes trois linéaires et unisexuelles, on peut établir entre elles une correspondance parfaite: au bouclier-coté attaché à la droite S_1, on fera correspondre une flèche attachée au plan S_2, ou un drapeau attaché au pivot S_2^1. A deux boucliers-cotés réciproques, correspondront deux flèches réciproques (flèches contraires dans le plan S_2), ou deux drapeaux réciproques (drapeaux réflexes attachés au pivot S_2^1). Au monofaisceau de boucliers-cotés, correspondra la couronne de flèches, ou la couronne de drapeaux; aux monofaisceaux réciproques, correspondront les couronnes réciproques (couronnes contraires, de flèches, ou couronnes réflexes, de drapeaux). Au bifaisceau de boucliers-cotés, correspondra le coronoïde de flèches, ou de drapeaux. Etc., etc.

Correspondance entre les espaces à une et à trois dimensions. — Il y a autant de boucliers-cotés dans l'espace à une dimension S_1 que de points ou d'èdres dans l'espace à trois dimensions S_3. On peut donc faire correspondre à tout bouclier coté de l'espace S_1 un point, ou un èdre, de l'espace S_3; et comme la géométrie des boucliers-cotés est linéaire, on pourra la faire correspondre à la géométrie des points et des èdres, dans l'espace S_3. La seule différence est que la première de ces géométries est unisexuelle, tandis que la seconde est bisexuelle, c'est-à-dire que le bouclier-coté de l'espace S_1 correspondra, dans l'espace S_3, tantôt à un point, tantôt à un èdre.

Ainsi, par exemple, à deux boucliers-cotés réciproques correspondront un point et un èdre réciproques (c'est-à-dire, un point et un èdre passsant par ce point).

A un bouclier-coté et à son bifaisceau réciproque, correspondront dans l'espace S_3: ou bien, un point et la bisérie des èdres passant par ce point; ou bien, un èdre et la bisérie des points situés dans le plan de cet èdre.

A deux monofaisceaux réciproques, correspondra, dans l'espace S_3, une ligne droite considérée sous ses deux aspects: monosérie de points ou faisceau d'èdres. Etc., etc.

Résumé.

En résumé, l'espace à une dimension contient trois figures fondamentales: le *point*, l'*èdre* et le *bouclier*.

Le point et l'èdre ne donnent naissance à aucune géométrie digne de ce nom, parce qu'il n'existe pas de géométries à un seul paramètre.

L'espace à une dimension ne donne donc lieu qu'à deux géométries fondamentales:

1. La *géométrie des boucliers*, qui est une géométrie unisexuelle, à deux paramètres et de caractère quadratique. Cette géométrie est basée sur la relation de réciprocité:

$$h \ tang \frac{\omega}{2} = c \ ,$$

avec, comme cas particulier :

$$h \ tang \frac{\omega}{2} = 0 \ .$$

Les formes fondamentales de cette géométrie sont: le *couple de boucliers* et la *monosérie linéaire* (déterminée par 3 boucliers), avec, comme cas particulier la monosérie linéaire *spéciale.*

2. La *géométrie des boucliers cotés*, qui est une géométrie unisexuelle, à trois paramètres et de caractère linéaire. Cette géométrie est basée sur la relation de réciprocité:

$$h \ tang \frac{\omega}{2} = b + b^1 \ ,$$

et ses formes fondamentales sont: le *monofaisceau* (déterminé par 2 boucliers cotés) et le *bifaisceau* (déterminé par 3 boucliers cotés).

On pourrait imaginer, dans l'espace S_1, des géométries à plus de 3 paramètres ; ainsi, par exemple, on pourrait prendre, comme élément spatial de cet espace, un monofaisceau, en considérant ce monofaisceau, non plus comme une monosérie, mais comme un tout indivisible; on obtiendrait ainsi une géométrie à 4 paramètres de l'espace S_1, qui correspondrait à la géométrie réglée de l'espace S_3. Mais une telle géométrie ne serait plus une géométrie *fondamentale*, puisque son élément spatial ne ferait plus partie des sept figures fondamentales de l'espace euclidien.

Remarque. — Un bouclier mobile dans l'espace à une dimension S_1 est équivalent à un corps solide quelconque libre de tourner ou de glisser sur la droite fixe S_1; en d'autres termes, si l'on dépouille ce corps solide de sa forme et de sa grandeur, il ne reste plus qu'un bouclier mobile dans l'espace S_1. Ainsi un corps solide, mobile dans l'espace à une dimension peut occuper, dans cet espace une double infinité de positions différentes. (On sait d'ailleurs qu'un corps solide peut occuper ∞^3 positions différentes dans l'espace à deux dimensions, et ∞^6 positions différentes dans l'espace à trois dimensions, car ce corps est équivalent dans le premier cas, à une flèche mobile dans un plan, ou à un drapeau mobile autour d'un pivot, et, dans le second cas, à un feuillet mobile dans l'espace).

Etant donnés deux corps solides égaux, dans l'espace à trois dimensions, on sait que l'on peut amener le premier en coïncidence avec le second par une rotation et un glissement sur une certaine droite S_1, d'ailleurs unique. Ce théorème peut maintenant s'énoncer d'une façon plus simple et plus rationnelle, de la façon suivante : de même que par deux points quelconques on peut toujours faire passer une ligne droite, et une seule, de même *par deux positions quelconques d'un corps solide, on peut faire passer un espace à une dimension S_1, et on n'en peut faire passer qu'un seul.* *(A suivre.)*