

# Développement d'une fonctionnelle dont l'argument est une fonction harmonique et son interprétation dans quelques problèmes de physique mathématique

Autor(en): **Wavre, Rolin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **3 (1921)**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-741135>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

qu'elle présente. Dès lors, il ne reste que deux hypothèses possibles : Ou bien cette Epidote est d'origine primaire et représente un produit consolidé avant la Biotite ; ou bien cette Epidote résulte d'une résorption de roches à Epidote par le granite à Plagioclase, qui en a assimilé tous les éléments, à l'exception de l'Epidote même, restée comme témoin, mais qui a néanmoins été fortement corrodée par l'action du magma. Il est difficile de choisir entre ces deux interprétations, la seconde cependant me paraît plus vraisemblable, et ceci pour les motifs suivants :

1. D'abord parce que le plagiogranite en question affleure au milieu de granulites très acides, et qu'il y représente un type local très riche en chaux. Or dans les granulites acides voisines, on trouve aussi, mais exceptionnellement, de l'Epidote qui se présente sous les mêmes conditions.

2. L'aspect corrodé et squelettique des cristaux provient évidemment d'une corrosion magmatique prolongée, qui, je le reconnais, peut se faire aussi bien sur des produits déjà consolidés que sur des minéraux étrangers au magma non résorbés.

3. Je n'ai jamais observé de Sphène en inclusions dans l'Epidote ou vice-versa, ce qui, semble-t-il, ne manquerait pas de se produire dans l'hypothèse où l'un des minéraux se serait consolidé avant l'autre.

#### Séance du 1<sup>er</sup> décembre 1921.

Rolin WAVRE. — *Développement d'une fonctionnelle dont l'argument est une fonction harmonique et son interprétation dans quelques problèmes de physique mathématique.*

Depuis une vingtaine d'années, l'étude des fonctions dont la valeur dépend à la fois de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs autres fonctions a fait l'objet de nombreuses recherches. Ces fonctions générales, qu'il importe de ne pas confondre avec les fonctions de fonctions au sens ordinaire, portent aujourd'hui le nom de fonctionnelles. L'inclinaison  $i$  d'une aiguille aimantée placée sous l'influence d'un courant électrique filiforme décrivant un circuit  $c$  et une fonctionnelle de la ligne  $c$ .

$$i = U_c$$

VOLTERRA, HADAMARD<sup>1</sup> et Paul LÉVY ont fait l'étude d'une catégorie de fonctionnelles qui ont un rapport étroit avec les problèmes classiques de la physique mathématique. HADAMARD a donné d'autre part une représentation générale d'une fonctionnelle linéaire sous forme de la limite d'une intégrale. FRÉCHET, en se plaçant à un point de vue plus général, a donné le développement, sous forme d'une série d'intégrales multiples, d'une fonctionnelle continue dont la variable ou argument est une fonction continue à une variable définie sur un intervalle fini. Ce résultat de FRÉCHET est exposé dans un article intitulé *Sur les fonctionnelles continues* paru dans les « Annales Scientifiques de l'Ecole normale supérieure », 1910, pp. 193-216. J'ai étendu le résultat de FRÉCHET au cas où la fonction argument appartient à un ensemble **E** satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les fonctions de **E** sont holomorphes à un nombre quelconque  $n$  de variables.

2° Il existe un domaine **D** de l'espace à  $2n$  dimensions comprenant l'origine, situé tout entier à distance finie et intérieur au sens étroit à un domaine **D'**, lui-même intérieur à toutes les étoiles d'holomorphic des fonctions de **E**.

3° Dans **D** les fonctions de **E** sont toutes bornées en module par un nombre fixe **M**.

L'essence de mon raisonnement, qui exigerait de nombreuses pages de développement, consiste à établir ceci :

On peut donner d'une fonction  $f$  de **E** une approximation par un polynôme

$$P_{pf}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

telle que l'on ait

$$(\alpha) \quad |f(z_1, \dots, z_n) - P_{pf}(z_1, \dots, z_n)| < \varepsilon$$

$\varepsilon$  désignant un nombre arbitrairement petit, pourvu que  $p$  soit supérieur à un nombre fixe **L**; et cela quels que soient le point  $(z_1, \dots, z_n)$  de **D** et l'argument  $f(z_1, \dots, z_n)$  dans **E**.

<sup>1</sup> HADAMARD. *Leçons sur le calcul des variations*. Paris, 1910, p. 281 et suivantes.

Ce point étant admis, en faisant jouer aux polynômes

$$P_{pf}$$

le rôle que FRÉCHET fait jouer aux sommes de Fejer

$$\sigma_{pf}$$

attachées au développement de Fourier, il n'y a aucune difficulté à étendre sa méthode et son résultat au cas actuel.

De plus l'ensemble **E** forme dans **D** une famille normale, un ensemble compact et le développement en série d'intégrales converge uniformément dans **E**.

Chaque intégrale simple du développement de FRÉCHET est remplacée par une intégrale *n*<sup>uple</sup> prise suivant *n* courbes fermées situées dans les plans des variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$  respectivement.

*Cas particulier des fonctions harmoniques.*

Si l'ensemble **E** est formé de fonctions harmoniques réelles dans l'espace réel, le développement peut être obtenu sans avoir recours au domaine complexe, ce qui est bien naturel. On sait, en effet, que l'intégrale de Poisson qui résout le problème de Dirichlet pour le cercle ou la sphère permet d'obtenir le développement d'une fonction harmonique en série de Taylor au voisinage de l'origine. Dans le cas du cercle le développement est analogue à celui de Fourier, dans le cas de la sphère il procède suivant les fonctions sphériques de Laplace.

Dans le premier cas, les intégrales du développement de la fonctionnelle seront prises le long d'un cercle entourant l'origine. Ce cas ne diffère guère de celui de FRÉCHET. Dans le second cas, le développement de la fonctionnelle procédera suivant une série d'intégrales étendues à la sphère, que je suppose bien entendu intérieure au domaine **D**, et dépendra des coefficients des polynômes de Legendre.

*Sur quelques interprétations physiques.*

Les potentiels newtoniens, électrostatiques, magnétiques, sont des fonctions harmoniques en dehors des masses matérielles ou électriques. Dans les problèmes de l'équilibre d'un corps élastique, de l'équilibre calorifique d'une plaque isotrope, de la distri-

bution de l'électricité à la surface d'un conducteur, du mouvement d'un liquide incompressible, etc., on est conduit à déterminer une certaine fonction potentielle harmonique. En supposant que les éléments qui entrent dans la donnée du problème varient d'une manière continue, on est amené à étudier une fonctionnelle continue du potentiel, Ce que je voudrais signaler ici en terminant est que la restriction que j'ai dû m'imposer en ne considérant que des domaines tels que  $D$ , qui est indispensable au point de vue de la théorie des fonctions analytiques et en particulier de la convergence uniforme des polynômes  $P_n$ , n'est pas sans rapport aussi avec la polydromie de la fonctionnelle dont VOLTERRA<sup>1</sup> a prouvé l'existence, dans ses leçons de Stockholm, pour une fonction de ligne dans le cas d'espace dont la connexité superficielle n'est pas simple. Je signale encore ici, pour qui voudrait approfondir mon raisonnement, que la propriété exprimée par l'inégalité ( $\alpha$ ) s'obtient facilement, en employant la méthode de BOREL<sup>2</sup> pour la formation des développements de MITTAG-LEFFLER et PAINLEVÉ.

G. TIERCY. — *A propos d'une définition de la simultanéité de deux événements.*

Dans une communication présentée à la séance du 7 mai 1921 de la Société suisse de Physique, R. DE SAUSSURE arrive à cette conclusion : « Pour deux systèmes en mouvement l'un par

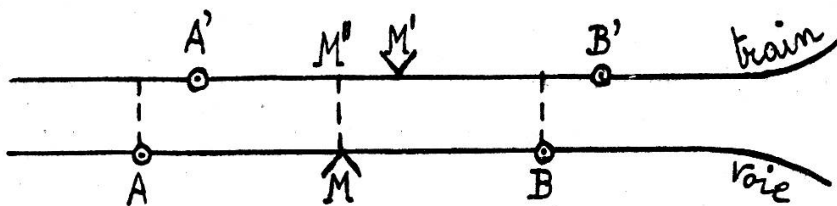


Fig. 1.

rapport à l'autre, si l'on admet la définition einsteinienne<sup>3</sup> de la

<sup>1</sup> VOLTERRA. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*. Paris, Hermann, 1912.

<sup>2</sup> BOREL. *Leçons sur les fonctions monogènes*. Paris, Gauthier-Villars, 1916.

<sup>3</sup> EINSTEIN. *La théorie de la relativité* (trad. J. ROUVIÈRE), Paris, 1921.