Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 3 (1921)

Artikel: Recherches théoriques et expérimentales sur la mesure de l'amortissement d'un circuit à étincelle [suite et fin]

Autor: Lambossy, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741061

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Recherches théoriques et expérimentales

SUR LA

Mesure de l'amortissement d'un circuit à étincelle

PAR

Paul LAMBOSSY

(Avec 25 fig.)

(Suite et fin).

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette deuxième partie est :

1° d'établir l'équation de la courbe de résonance, en partant de l'hypothèse que la courbe des amplitudes du courant dans le primaire a une forme intermédiaire entre celle d'une exponentielle et celle d'une droite.

2° d'exposer les mesures destinées à vérifier la théorie.

§ 13. — *Nouvelle hypothèse.*

Les recherches théoriques d'Heydweiller [1], et les résultats expérimentaux de Zenneck [2], Roschansky [3] ont montré que la courbe de décroissance de l'amplitude du courant dans un cir-

[1] Heydweiller, A. *Ann. d. Phys.*, 19, p. 649, 1906.
[2] Zenneck, J. *Ann. d. Phys.*, 13, p. 822, 1904.
[3] Roschansky, D. *Ann. d. Phys.*, 36, p. 281 1911.

cuit à étincelle ressemble beaucoup plus à une droite qu'à une exponentielle. Cela nous conduit à poser $I = I_0(1 - at)$ pour l'équation de la courbe des amplitudes, et à désigner par a l'amortissement linéaire. On pourrait aussi, comme l'a proposé Zenneck, approcher de la vraie droite par l'équation $I = I_0 e^{-\alpha t - \beta t^2}$. Dans ce cas le phénomène de l'amortissement serait caractérisé par deux constantes α et β.

Et alors le problème se pose : *trouver dans les hypothèses précédentes la forme de la courbe de résonance.* La forme du courant dans le secondaire a moins d'intérêt.

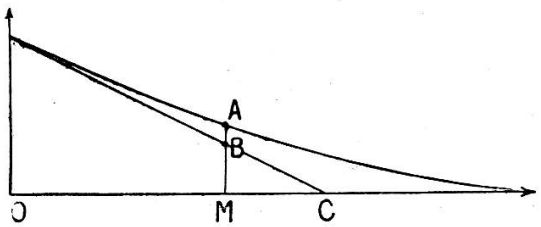


Fig. 12.

Cependant les difficultés mathématiques sont très considérables avec des hypothèses de la forme indiquée. J'en propose une autre.

La courbe représentée dans la fig. 12 est une exponentielle $y = e^{-\alpha t}$. Quelle modification faut-il apporter à chaque ordonnée MA pour la réduire à l'ordonnée correspondante MB de la droite ? Il faut la multiplier par un certain facteur plus petit que l'unité. Ce facteur, égal à 1 pour l'abscisse zéro, décroît d'abord lentement, ensuite plus vite et devient nul pour le point C. Or un tel facteur est fourni par

$$\cos nt$$

où n est une constante dont la signification sera donnée par les résultats de l'intégration.

Il est donc probable que la courbe

$$y = e^{-\alpha_1 t} \cos nt$$

se rapproche d'une droite, au moins dans un certain intervalle.

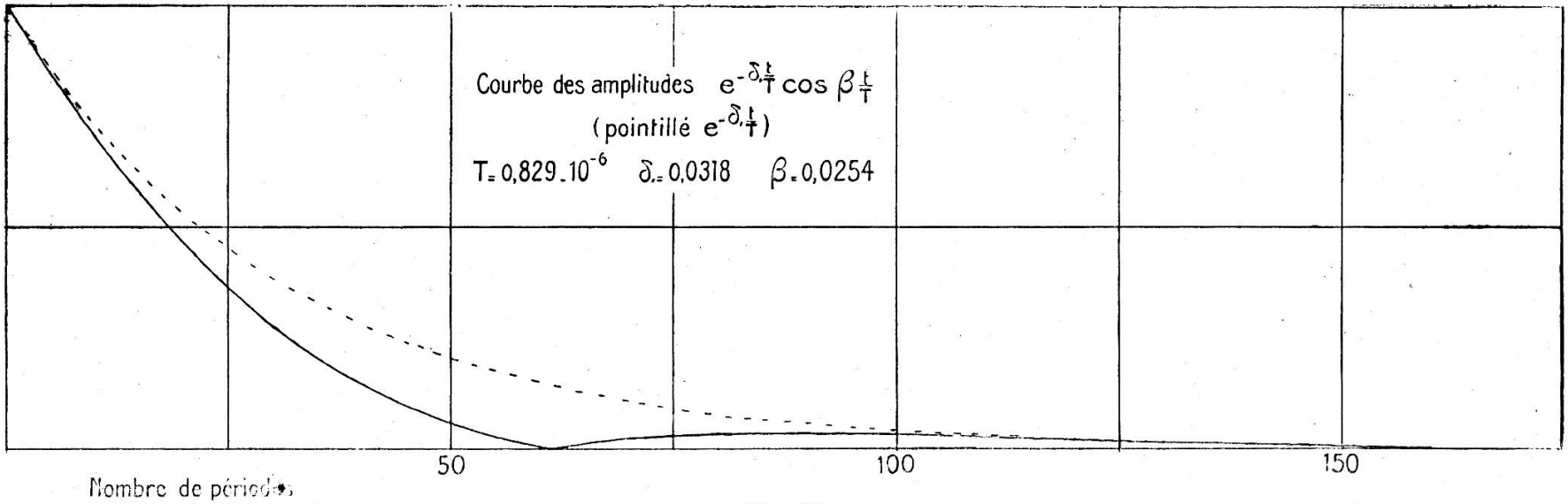

Courbe des amplitudes $e^{-\delta_1 \frac{t}{T}} \cos \beta \frac{t}{T}$
(pointillé $e^{-\delta_1 \frac{t}{T}}$)
$T = 0{,}829 . 10^{-6}$ $\delta_1 = 0{,}0318$ $\beta = 0{,}0254$
50
100
150
Nombre de périodes

Fig. 13.

On peut s'inquiéter de voir la périodicité de $\cos nt$ se communiquer à la courbe ; mais si n n'est pas trop grand, aux instants qui suivent celui déterminé par l'équation $\cos nt = 0$, $e^{-\alpha_1 t}$ est assez réduite pour que $e^{-\alpha_1 t} \cos nt$ n'ait plus une valeur appréciable.

La fig. 13 représente la courbe $y = e^{-\alpha_1 t} \cos nt$. J'ai adjoint l'exponentielle $y = e^{-\alpha_1 t}$ afin qu'on puisse comparer la forme des deux courbes. La première atteint l'axe, dans l'exemple choisi, au bout d'une soixantaine de périodes. Dès cet instant à peu près, la courbe ne représente plus le phénomène réel, ni plus ni moins d'ailleurs que l'exponentielle simple. Comme on le voit, on ne peut préciser d'avance le degré de légitimité de l'hypothèse; l'expérience seule en est capable. On notera cependant que les parties de la courbe appartenant aux premiers moments ont une importance prépondérante, et que pour celles-là l'allure, sans être tout à fait linéaire, se rapproche quand même de celle qu'on trouve expérimentalement.

La *nouvelle hypothèse* consiste à admettre que la force électromotrice extérieure qui agit sur le secondaire est de la forme

$$E \cos nt \cos m_1 t$$

Par conséquent l'équation de Bjerknes modifiée est

$$V'' + 2\alpha_2 V' + m_2^2 V = m_2^2 E e^{-\alpha_1 t} \cos nt \cos m_1 t$$

C'est l'équation de départ pour le calcul de l'effet thermique.

Les deux paragraphes qui suivent contiennent l'ensemble des calculs qui conduisent à l'équation de la courbe de résonance sous sa forme la plus simplifiée.

§ 14. — *Calcul de l'effet thermique.*

On traite l'équation

$$V'' + 2\alpha_2 V' + m_2^2 V = m_2^2 E e^{-\alpha_1 t} \cos nt \cos m_1 t \qquad (14)$$

comme dans la première partie. Mais auparavant on décompose le second membre comme suit:

$$\cos nt \cos m_1 t \equiv \frac{1}{2}[\cos(m_1 + n)t + \cos(m_1 - n)t]$$

$$\equiv \frac{1}{2}[\cos m't + \cos m''t]$$

en posant $m' = m_1 + n$ et $m'' = m_1 - n$.

$$V'' + 2\alpha_2 V' + m_2^2 V = A[e^{-\alpha_1 t}\cos m't + e^{-\alpha_1 t}\cos m''t] \quad (14')$$

$$A = \frac{m_2^2 E}{2}.$$

En écrivant $P_1 = e^{-\alpha_1 t}\cos m't$ et $Q_1 = e^{-\alpha_1 t}\sin m't$, on contrôle facilement qu'on a :

$$P_1 = e^{-\alpha_1 t}\cos m't \qquad Q_1 = e^{-\alpha_1 t}\sin m't$$

$$P_1' = -\alpha_1 P_1 - m'Q_1 \qquad Q_1' = -\alpha_1 Q_1 + m'P_1$$

$$P_1'' = (\alpha_1^2 - m'^2)P_1 + 2m'\alpha_1 Q_1 \qquad Q_1'' = (\alpha_1^2 - m'^2)Q_1 - 2m'\alpha_1 P_1$$

De même

$$P_2 = e^{-\alpha_1 t}\cos m''t \qquad Q_2 = e^{-\alpha_1 t}\sin m''t$$

$$P_2' = -\alpha_1 P_2 - m''Q_2 \qquad Q_2' = -\alpha_1 Q_2 + m''P_2$$

$$P_2'' = (\alpha_1^2 - m''^2)P_2 + 2m''\alpha_1 Q_2 \qquad Q_2'' = (\alpha_1^2 - m''^2)Q_2 - 2m''\alpha_1 P_2$$

On introduit les inconnues

$$\int_0^\infty V'^2 dt = V_1$$

$$\int_0^\infty VP_1 dt = R_1 \qquad \int_0^\infty VQ_1 dt = S_1$$

$$\int_0^\infty VP_2 dt = R_2 \qquad \int_0^\infty VQ_2 dt = S_2$$

et les constantes

$$\int_0^\infty P_1(P_1 + P_2)\,dt = C_1 \qquad \int_0^\infty Q_1(P_1 + P_2)\,dt = C_2$$

$$\int_0^\infty P_2(P_1 + P_2)\,dt = C_3 \qquad \int_0^\infty Q_2(P_1 + P_2)\,dt = C_4$$

En multipliant l'équation (14') successivement par V', P_1, Q_1, P_2, Q_2, et en la traitant comme dans la première partie (voir § 5), on trouve :

$$2\alpha_2 V_1 = A[\alpha_1 R_1 + m' S_1 + \alpha_1 R_2 + m'' S_2]$$

$$(\alpha_1^2 - m'^2) R_1 + 2m'\alpha_1 S_1 + 2\alpha_2(\alpha_1 R_1 + m' S_1) + m_2^2 R_1 = AC_1$$

$$(\alpha_1^2 - m'^2) S_1 - 2m'\alpha_1 R_1 + 2\alpha_2(\alpha_1 S_1 - m' R_1) + m_2^2 S_1 = AC_2$$

$$(\alpha_1^2 - m''^2) R_2 + 2m''\alpha_1 S_2 + 2\alpha_2(\alpha_1 R_2 + m'' S_2) + m_2^2 R_2 = AC_3$$

$$(\alpha_1 - m''^2) S_2 - 2m''\alpha_1 R_2 + 2\alpha_2(\alpha_1 S_2 - m'' R_2) + m_2^2 S_2 = AC_4 .$$

On tire R_1 et S_1 de la 2me et de la 3me équation. En posant

$$h_1 = m_2^2 - m'^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$h_2 = 2m'(\alpha_1 + \alpha_2)$$

on trouve

$$R_1 = \frac{A(C_1 h_1 - C_2 h_2)}{h_1^2 + h_2^2} \qquad S_1 = \frac{A(C_2 h_1 + C_1 h_2)}{h_1^2 + h_2^2}$$

On tire R_2 et S_2 de la 4me et de la 5me équation. En posant

$$h_1' = m_2^2 - m''^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$h_2' = 2m''(\alpha_1 + \alpha_2)$$

on trouve

$$R_2 = \frac{A(C_3 h_1' - C_4 h_2')}{h_1'^2 + h_2'^2} \qquad S_2 = \frac{A(C_4 h_1' + C_3 h_2')}{h_1'^2 + h_2'^2}$$

On substitue R_1, S_1, R_2, S_2 dans la 1re équation.

$$2\alpha_2 V_1 = \frac{A^2}{h_1^2 + h_2^2}\left[(\alpha_1 C_1 + m' C_2) h_1 + (m' C_1 - \alpha_1 C_2) h_2\right.$$

$$\left. + \frac{A^2}{h_1'^2 + h_2'^2}\left[(\alpha_1 C_3 + m'' C_4) h_1 + (m'' C_3 - \alpha_1 C_4) h_2'\right]\right. .$$

On introduit les nouvelles constantes

$$p = \alpha_1 C_1 + m' C_2 \qquad p' = \alpha_1 C_3 + m'' C_4$$
$$q = m' C_1 - \alpha_1 C_2 \qquad q' = m'' C_3 - \alpha_1 C_4 .$$

On a en outre

$$\int_0^\infty i^2 dt = \int_0^\infty C^2 \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 dt = C^2 V_1 .$$

$$C^2 A^2 = \frac{E^2}{4L^2} .$$

On arrive à la formule finale

$$\int_0^\infty i^2 dt = \frac{E^2}{8\alpha_2 L^2}\left[\frac{p h_1 + q h_2}{h_1^2 + h_2^2} + \frac{p' h_1' + q' h_2'}{h_1'^2 + h_2'^2}\right] \qquad (15)$$

Il reste à calculer les constantes C_1, C_2, C_3, C_4, puis p, q, p', q'. On trouve sans difficulté

$$C_1 = \frac{1}{4\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{4}\left[\frac{1}{\alpha_1^2 + m'^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + m_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + n^2}\right]$$

$$C_2 = \frac{m'}{4(\alpha_1^2 + m'^2)} + \frac{m_1}{4(\alpha_1^2 + m_1^2)} + \frac{n}{4(\alpha_1^2 + n^2)}$$

$$C_3 = \frac{1}{4\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{4}\left[\frac{1}{\alpha_1^2 + m''^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + m_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + n^2}\right]$$

$$C_4 = \frac{m''}{4(\alpha_1^2 + m''^2)} + \frac{m_1}{4(\alpha_1^2 + m_1^2)} - \frac{n}{4(\alpha_1^2 + n^2)}$$

$$p = 1 + \frac{m_1 n}{4}\left[\frac{1}{\alpha_1^2 + m_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + n^2}\right]$$

$$q = \frac{1}{4}\left[\frac{m_1 + n}{\alpha_1} + \frac{m_1 \alpha_1}{\alpha_1^2 + n^2} + \frac{n \alpha_1}{\alpha_1^2 + m_1^2}\right]$$

$$p' = 1 - \frac{m_1 n}{4}\left[\frac{1}{\alpha_1^2 + m_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + n^2}\right]$$

$$q' = \frac{1}{4}\left[\frac{m_1 - n}{\alpha_1} + \frac{m_1 \alpha_1}{\alpha_1^2 + n^2} - \frac{n \alpha_1}{\alpha_1^2 + m_1^2}\right]$$

§ 15. — *Courbe de résonance.*

En notant

$$\int_0^\infty i^2 dt = y \ , \qquad \frac{E^2}{8\alpha_2 L^2} = \frac{1}{K} \ , \tag{16}$$

l'équation (15) peut s'écrire

$$Ky(h_1^2 + h_2^2)(h_1'^2 + h_2'^2) - (ph_1 + qh_2)(h_1'^2 + h_2'^2)$$
$$- (p'h_1' + q'h_2')(h_1^2 + h_2^2) = 0 \ .$$

La variable est contenue dans h_1 et h'_1; il faut l'expliciter.

$$h_1 = m_2^2 - m'^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \qquad \text{où} \qquad m' = m_1 + n \ .$$

On peut écrire

$$h_1 = (m_2^2 - m_1^2 - n^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2) - 2m_1 n$$

de même

$$h_1' = (m_2^2 - m_1^2 - n^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2) + 2m_1 n$$

En posant

$$h = m_2^2 - m_1^2 - n^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \tag{17}$$

on pourra écrire

$$h_1 = h - 2m_1 n$$
$$h_1' = h + 2m_1 n \ . \tag{17'}$$

La substitution (17'), après des calculs assez longs, conduit à une équation du 4me degré en h qui peut s'écrire

$$Kyh^4 - 2h^3 + (AKy - B)h^2 + (EKy - F)h + CKy - D = 0 \tag{18}$$

en posant

$$A = h_2^2 + h_2'^2 - 8m_1^2 n^2$$
$$B = 2m_1 n(p - p') + qh_2 + q'h_2'$$
$$E = 2m_1 n(h_2^2 - h_2'^2)$$
$$F = 4m_1 n(qh_2 - q'h_2') + (ph_2'^2 + p'h_2^2) - 8m_1^2 n^2$$
$$C = (4m_1^2 n^2 + h_2^2)(4m_1^2 n^2 + h_2'^2)$$
$$D = 4m_1^2 n^2(qh_2 + q'h_2') + (qh_2 h_2'^2 + q'h_2' h_2^2) - 8m_1^2 n^3(p - p') - 2m_1 n(ph_2'^2 - p'h_2^2) .$$

On ne peut pas aller plus loin sans introduire des simplifications. a_1 qui entre ici n'est pas identique au α_1 qui intervient dans la formule de Bjerknes; cependant sa *dimension* est également celle d'un amortissement (inverse d'un temps). n est une grandeur de même dimension. Quant à l'*ordre de grandeur* de α_1 et de n, nous ne savons rien d'avance; mais il est plausible de supposer que leurs valeurs numériques sont voisines de la valeur numérique de α_1 qui figure dans la formule de Bjerknes. Nous pouvons bien admettre

$$\alpha_2^2 , \quad \alpha_1^2 , \quad n^2 \qquad \textit{négligeables devant } m_1^2 ;$$

c'est là une supposition simplifiante semblable à celle de Bjerknes, qu'il sera nécessaire de contrôler plus tard d'après les résultats expérimentaux. Les mesures montreront que cette supposition est entièrement légitime.

Avec cette hypothèse, les quantités A, B, etc., ont une forme plus simple :

$$\begin{aligned}
A &= 8m_1^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - n^2] \\
B &= m_1^2\left[(\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + n^2}\right) + \frac{n^2}{\alpha_1^2 + n^2}\right] \\
E &= 64m_1^2 n^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \qquad (19) \\
C &= 16m_1^4\left[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + n^2\right]^2 \\
D &= 4m_1^2\left[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + n^2\right]\left[(\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + n^2}\right) - \frac{n^2}{\alpha_1^2 + n^2}\right]
\end{aligned}$$

F n'a pas été calculé, parce que cette quantité sera éliminée.

Je rappelle que (17)

$$h = m_2^2 - m_1^2 - n^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \ .$$

Si l'on fait $n = 0$, on retombe sur le h_1 ou x dont il était question dans la 1re partie [form. (5)]. Or la théorie de Bjerknes généralisée, prévoit le maximum pour $x = 0$ à une très bonne approximation[1]. Il est donc légitime d'admettre qu'ici encore le maximum a lieu pour $h = 0$. Introduisons donc $h = 0$ dans l'équation (18).

$$CKy_m - D = 0 \ , \qquad \text{d'où} \qquad K = \frac{D}{Cy_m} \ . \tag{20}$$

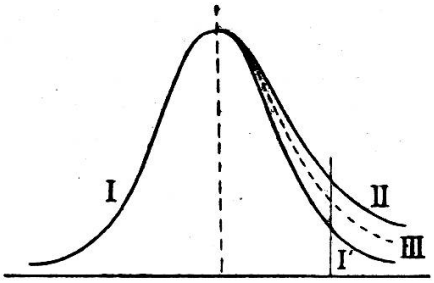


Fig. 14.

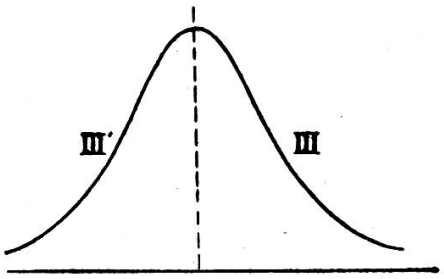


Fig. 15.

Substituons cette valeur de K dans l'équation (18):

$$\frac{y}{y_m} h^4 - \frac{2C}{D} h^3 + \left(A\frac{y}{y_m} - \frac{BC}{D}\right) h^2 + \left(E\frac{y}{y_m} - \frac{FC}{D}\right) h$$
$$- C\left(1 - \frac{y}{y_m}\right) = 0 \ . \tag{21}$$

La présence des puissances impaires de h atteste la dissymétrie de la courbe par rapport à l'axe vertical passant par l'origine des h. Aux abscisses $+ h$ et $- h$, où h est essentiellement positif, égales en valeur absolue, correspondent des ordonnées $\frac{y_1}{y_m}$ et $\frac{y_2}{y_m}$. En introduisant les couples de valeurs $\left(+ h, \frac{y_1}{y_m}\right)$ et $\left(- h, \frac{y_2}{y_m}\right)$, et en additionnant les deux équations obtenues,

[1] On a montré qu'il est pratiquement équivalent de partir, soit de l'axe de résonance, soit de l'axe d'isochronisme, soit de l'axe des h. Voir § 9.

on arrive à

$$\frac{y_1 + y_2}{y_m} h^4 + \left(A \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_m} - \frac{2BC}{D}\right) h^2 + E \cdot \frac{y_1 - y_2}{y_m} \cdot h$$
$$- C\left(2 - \frac{y_1 + y_2}{y_m}\right) = 0$$

Le terme $E\frac{y_1 - y_2}{y_m} h$ peut être supprimé, car il est toujours très petit, soit à cause de E, soit à cause de $\frac{y_1 - y_2}{y_m}$[1].

Désormais je donnerai à y la signification suivante:

$$y = \frac{1}{2} \frac{y_1 + y_2}{y_m}$$

Voici la signification géométrique de y. La courbe réellement observée est formée de deux versants I et II (fig. 14). Soit I′ l'image de I par rapport à l'axe. La courbe III moyenne entre I′ et II formée d'un seul versant, est celle dont les ordonnées sont précisément y. Son équation est :

$$yh^4 + \left(Ay - \frac{BC}{D}\right) h^2 - C(1 - y) \qquad \text{avec } h \textit{ positif.}$$

Soit III′ l'image de III par rapport à l'axe (fig. 15). Cette dernière courbe à deux versants est symétrique; son équation est

$$yh^4 + \left(Ay - \frac{BC}{D}\right) h^2 - C(1 - y) \qquad \text{avec } h \textit{ positif ou négatif} \qquad (21')$$

Ainsi la transformation de l'équation (21) en cette dernière qui est débarrassée des puissances impaires de h, est le paral-

[1] Ce terme apparaîtrait dans l'équation finale sous la forme

$$\frac{2\beta^2(\delta_1 + \delta_2)^2}{\pi} x \frac{y_1 - y_2}{y_m}.$$

Le rapport de ce terme au terme $P^2(1 - y)$ est

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\beta(\delta_1 + \delta_2)}{(\delta_1 + \delta_2)^2 + \beta^2}\right]^2 \cdot \frac{x}{1 - y} \cdot \frac{y_1 - y_2}{y_m}.$$

Pour la partie supérieure de la courbe, $y_1 - y_2$ est pratiquement nul. Prenons maintenant deux points convenablement espacés de la courbe de la fig. 17 ; et admettons $\delta_1 = \delta_2 = \beta$. Pour $x = 0{,}1$ ce rapport est 0,0006. Pour $x = 0{,}2$ il est 0,0009. On a donc raison de négliger ce terme.

lèle de la transformation géométrique de la courbe observée en une courbe symétrique. Il faudrait donc, quand on est en présence d'un cas pratique, commencer par faire cette transformation géométrique; mais cette opération peut être évitée, comme on le verra bientôt.

Multiplions l'équation (21′) par $\frac{\pi^4}{m_1^8}$.

$$y\left(\frac{\pi h}{m_1^2}\right)^4 + \left(\frac{A\pi^2}{m_1^4}y - \frac{BC}{D}\cdot\frac{\pi^2}{m_1^4}\right)\left(\frac{\pi h}{m_1^2}\right)^2 - \frac{\pi^4 C}{m_1^8}(1-y) = 0$$

Or

$$\frac{\pi h}{m_1^2} = \frac{\pi(m_2^2 - m_1^2)}{m_1^2} = \pi\left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1\right)$$ [1]

Nous avons admis que la résonance a lieu pour $h = 0$ (voir page 49). Si donc on appelle C_r la capacité du secondaire à la résonance, on a :

$$\frac{\pi h}{m_1^2} = \pi\left(\frac{C_r}{C} - 1\right) \equiv x \qquad (22)$$

Nous supposerons désormais les quantités x portées en abscisses.

Les constantes contiennent les amortissements. Nous allons introduire les *décréments*. $T_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ est la période du primaire. $\alpha_1 T_1 = \delta_1$, $\alpha_2 T_1 = \delta_2$ sont les décréments des deux circuits pour la période T_1. Introduisons par analogie le *deuxième décrément du primaire*

$$nT_1 = \beta \qquad (23)$$

[1] En réalité $h = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - n^2$. Mais le rapport

$$\frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - n^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

est de l'ordre de 0,0025 lorsque $\frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2} = 0{,}1$.

On trouve

$$\frac{A\pi^2}{m_1^4} = 2[(\delta_1 + \delta_2)^2 - \beta^2]$$

$$\frac{\pi^4 C}{m_1^8} = [(\delta_1 + \delta_2)^2 + \beta^2]^2 .$$

$$\frac{BC}{D} \cdot \frac{\pi^2}{m_1^4} = \frac{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) + \beta^2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) - \beta^2\delta_1} \cdot [(\delta_1 + \delta_2)^2 + \beta^2]$$

En sorte que si l'on introduit les paramètres

$$\begin{aligned} P &= (\delta_1 + \delta_2)^2 + \beta^2 \\ M &= (\delta_1 + \delta_2)^2 - \beta^2 \\ N &= \frac{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) + \beta^2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) - \beta^2\delta_1} , \end{aligned} \tag{24}$$

l'équation de la courbe de résonance, rendue symétrique, prend la forme la plus simple qu'il soit possible d'obtenir :

$$x^4 y + (2My - NP)x^2 = P^2(1 - y) \tag{25}$$

§ 16. — *Courbe des décréments.*

L'équation (25), que l'on peut présenter sous la forme

$$y = \frac{NPx^2 + P^2}{x^4 + 2Mx^2 + P^2} ,$$

ne laisse pas aisément voir le caractère qui la distingue de l'équation établie dans la première partie.

Le caractère distinctif d'une courbe de Bjerknes normale est la constance du décrément aux différentes hauteurs. Il vient donc à l'idée d'examiner la loi suivant laquelle le décrément varie, en se basant sur la nouvelle équation, autrement dit de chercher *l'équation de la courbe des décréments.*

Considérons la courbe de résonance transformée et son équation

$$x^4 y + (2My - NP)x^2 = P^2(1 - y) .$$

Nous allons effectuer un changement de variable. A la place de x nous introduisons une nouvelle variable z reliée aux

anciennes par la relation

$$z = x\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,.$$

Par la substitution

$$x = z\sqrt{\frac{1-y}{y}}\,,$$

l'équation précédente devient

$$z^4(1-y) + (2My - NP)\,z^2 = P^2y\,. \qquad (26)$$

Quelle est la signification de z? En retournant à la signification de x donnée par (22), nous pouvons dire : *z est le nombre*

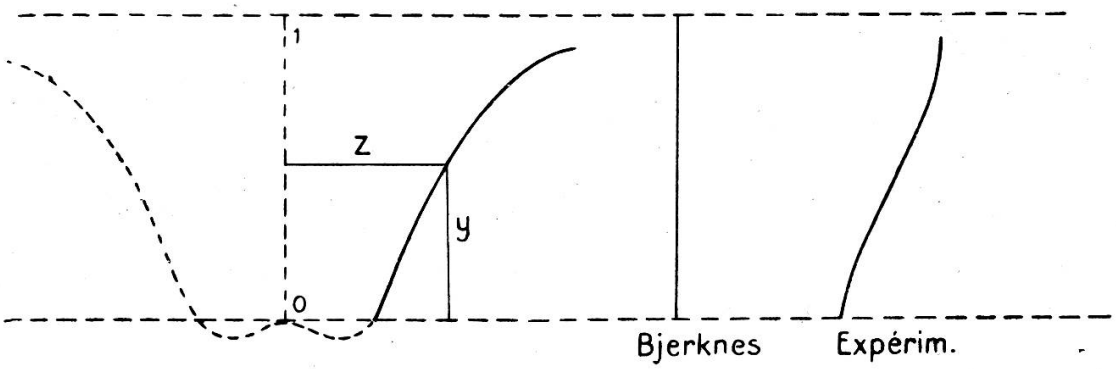


Fig. 16.

trouvé à la hauteur y *dans le procédé Bjerknes, sur la courbe transformée, symétrique* [dont l'équation est donnée par (25) ou (21').]

Or j'affirme que z *est également le nombre trouvé à la hauteur* y *dans le procédé Bjerknes, sur la courbe primitive, dissymétrique* [dont l'équation est donnée par (21)]. Cela est un fait pratique, observé, qui a sa raison dans la faible influence de la dissymétrie sur la valeur du décrément.

Par conséquent l'équation obtenue (26) est bien celle de la *courbe des décréments.* C'est la courbe que nous envisagerons désormais, et l'on comprend maintenant pourquoi la transformation dont parlait le paragraphe précédent n'est pas nécessaire.

La forme de la courbe des décréments est celle d'une courbe de résonance renversée, dont on n'utilise que la partie très incli-

née d'un des versants (fig. 16). En effet, par la substitution $y' = 1 - y$ on retombe sur une équation semblable à la précédente, sauf qu'au lieu de $2My$ on a $2M(1 - y)$, ce qui n'influe pas sur l'allure générale.

La courbe des décréments prévue par la théorie de Bjerknes, et constatée lorsque le primaire n'a pas d'étincelle, est une droite.

Le domaine de validité de l'équation (26) n'est limité que par la grandeur des décréments. Il est supposé

$$\delta_1^2,\ \delta_2^2,\ \beta^2 \ \textit{négligeables devant}\ 4\pi^2 .$$

Il n'y a pas de restriction relative à la dissonance.

§ 17. — *Recherche d'une méthode pratique.*

L'application à un cas concret a présenté de grandes difficultés. Il faut en chercher la raison soit dans la forme compliquée de l'équation du 5e degré, soit dans le fait que la théorie ne correspond pas complètement à l'expérience. Les recherches que j'ai faites de différents côtés pour trouver un procédé de calcul et pour concilier la théorie et l'expérience, m'ont fait aboutir à des conclusions que je suis forcé d'exposer avant le procédé de calcul des décréments.

L'équation de la courbe des décréments est

$$z^4(1 - y) + (2My - NP)z^2 = P^2y .$$

Les constantes sont au nombre de trois : M, N, P. Dès qu'on connaît ces dernières, on calcule sans difficulté δ_1, δ_2 et β séparément. La première idée qui se présente à l'esprit est de faire passer cette courbe par trois points convenablement espacés. Le procédé, s'il était possible, serait long, mais présenterait une haute valeur ; car une seule courbe suffirait à faire connaître M, N, P, donc les trois décréments. On peut se rendre compte à priori déjà de cette impossibilité. On sait en effet que d'une courbe de résonance normale, on ne peut tirer que la somme $\delta_1 + \delta_2$ et point du tout les décréments séparés. Cela ne provient point d'une impossibilité radicale, puisqu'on pourrait avoir une deuxième relation entre δ_1 et δ_2 en tirant parti de la

dissymétrie. Mais l'exactitude de cette deuxième relation serait très imparfaite.

Donc il est obligatoire de n'utiliser que deux points ou deux données de la courbe. Si, à l'aide de ces deux données, il était possible de tirer séparément M et P, tout irait bien; N ne nous intéressant pas beaucoup. Si p. ex. on pouvait trouver la hauteur y qui annule la parenthèse $2My - NP$, on pourrait immédiatement calculer P. Cette hauteur est voisine de 0,70; mais elle est inconnue et d'ailleurs variable avec δ_2. Un procédé de ce genre essayé sur la courbe des décréments ou sur une courbe obtenue de celle-là par des transformations géométriques, demeure sans succès.

Par conséquent d'une courbe unique on ne peut rien tirer. Prenons alors deux courbes simultanément, la seconde correspondant à un secondaire plus amorti. A l'aide de deux données fournies par chacune d'elles on peut déterminer quatre inconnues δ_1, δ_2, β et l'augmentation de δ_2. Mais quelles données choisirons-nous?

En choisissant deux points convenablement espacés sur chaque courbe des décréments, on peut effectivement déterminer les quatre inconnues ; et connaissant par suite M, N, P, on peut construire les deux courbes de résonance en entier. Ces deux constructions se fondent avec les courbes expérimentales bien mieux que les courbes de Bjerknes; mais on ne constate pas l'identité entre la valeur observée et la valeur calculée pour l'accroissement du décrément. Ce n'est donc que la moitié du problème qui se trouve ainsi résolue.

La raison intime de ce fait est la suivante : la nouvelle théorie est adéquate à l'ancienne pour expliquer la moitié inférieure de la courbe, disons même la partie comprise entre $y = 0$ et $y = 0{,}6$; c.-à-d. qu'il est possible de déterminer M, N, P (en choisissant convenablement les deux données sur chaque courbe) et par suite de construire une courbe qui, *dans cet intervalle*, coïncide assez bien avec la courbe expérimentale. Le procédé, décrit plus loin, appliqué à deux courbes, fait effectivement apparaître *l'égalité entre l'accroissement du décrément observé et l'accroissement calculé.* La partie supérieure de la courbe théorique diverge notablement de la partie correspondante de la courbe expérimentale (fig. 17).

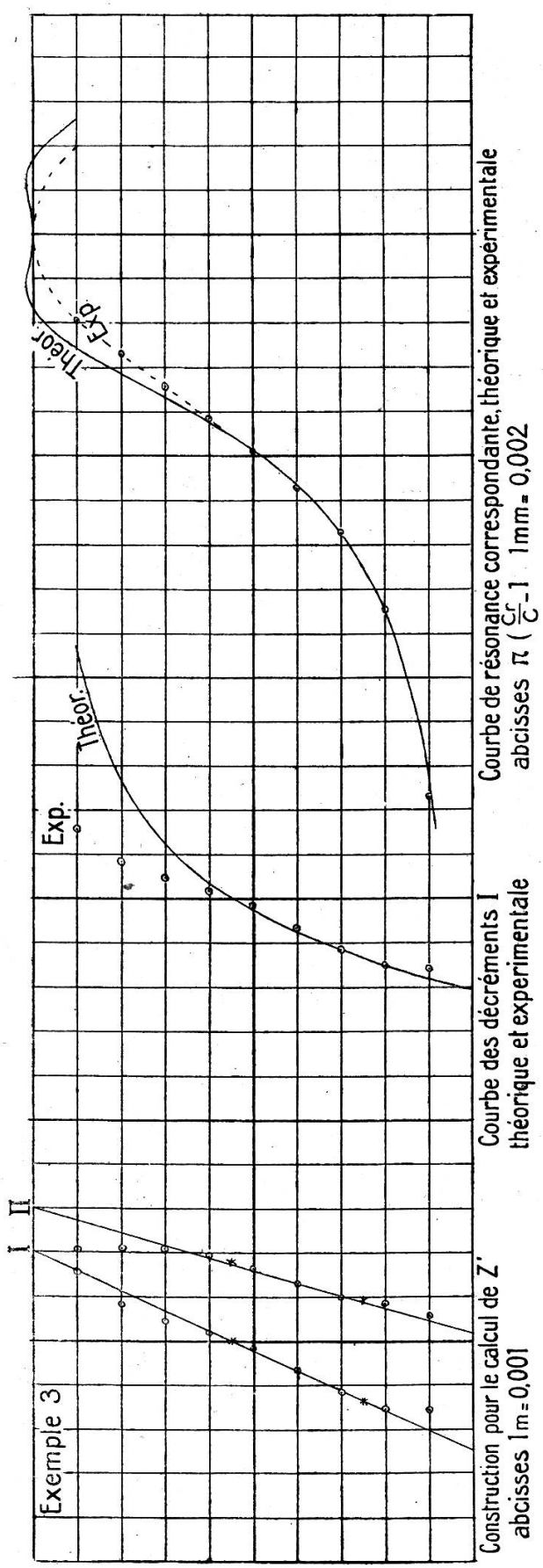

Exemple 3
I
II
Exp.
Theor.
Theor.
Exp.
Construction pour le calcul de Z'
abcisses 1m=0,001
Courbe des décréments I
théorique et experimentale
Courbe de résonance correspondante, théorique et expérimentale
abcisses π (Cr/C-1 1mm= 0,002

Fig. 17.

On s'explique maintenant pourquoi j'ai choisi les deux données dans la partie inférieure, savoir: *le point* y = *0,4 et la tangente en ce point.* Il est le centre de l'intervalle limité par les points 0,2 et 0,6. J'abandonne le point 0,1 comme trop incertain par suite des erreurs de mesures ou de tracé.

Si les points 2, 3, 4, 5, 6 (fig. 18) étaient disposés sur une circonférence et équidistants, la tangente au point 4 serait déterminée par une parallèle à AB; A et B étant les points milieux de 23 et de 56. Or la courbe des décréments a dans cet intervalle une courbure assez faible pour que nous puissions l'assimi-

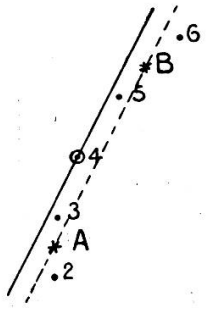


Fig. 18.

ler à une circonférence. Aussi c'est cette règle que j'ai adoptée pour la construction de la tangente au point 4. Quelquefois, dans la pratique, ces cinq points sont alignés sur une droite ou ont une distribution indécise; en pareil cas, on trace simplement et aussi exactement que possible la droite qui passe par ces points. Ce procédé n'est qu'approché; mais ce que je recherche c'est une règle pratique, fixe, qui donne les résultats les meilleurs; et ces résultats en justifient l'application.

§ 18. — *Table des décréments et calcul des décréments.*

La courbe des décréments a pour équation (26)

$$z^2(1-y) + 2My - NP = \frac{P^2 y}{z^2}. \qquad (26')$$

Faisons $y = 0$, nous obtenons

$$z_0 = \sqrt{NP}\ ; \qquad (27)$$

C'est le décrément limite, intersection de la courbe avec l'axe des abscisses[1].

Différentions par rapport à y :

$$\frac{dz}{dy} = z' \qquad 2zz'(1-y) - z^2 + 2M = P^2 \cdot \frac{z - 2yz'}{z^3} \cdot \quad (28)$$

Dans ces deux équations (26′) et (28), faisons $y = 0{,}4$

$$\begin{aligned} 3z^2 + 4M - 5NP &= \frac{2P^2}{z^2} \\ 6zz' - 5z^2 + 10M &= P^2 \cdot \frac{5z - 4z'}{z^3} \; ; \end{aligned} \qquad (29)$$

z est ici le décrément à la hauteur 0,4 ; z' est la dérivée en ce point. *Rapportons toutes les constantes à z'* ; introduisons donc les rapports :

$$\delta'_1 + \delta'_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{z}$$

$$\beta' = \frac{\beta}{z}$$

$$P' = \frac{P}{z^2} = (\delta'_1 + \delta'_2)^2 + \beta'^2$$

$$M' = \frac{M}{z^2} = (\delta'_1 + \delta'_2)^2 - \beta'^2$$

$$N' = \frac{(\delta'_1 + \delta'_2)(2\delta'^2_1 + \beta'^2) + \beta'^2\delta'_1}{(\delta'_1 + \delta'_2)(2\delta'^2_1 + \beta'^2) - \beta'^2\delta'_1}$$

$$z'_0 = \frac{z_0}{z} = \sqrt{N'P'}.$$

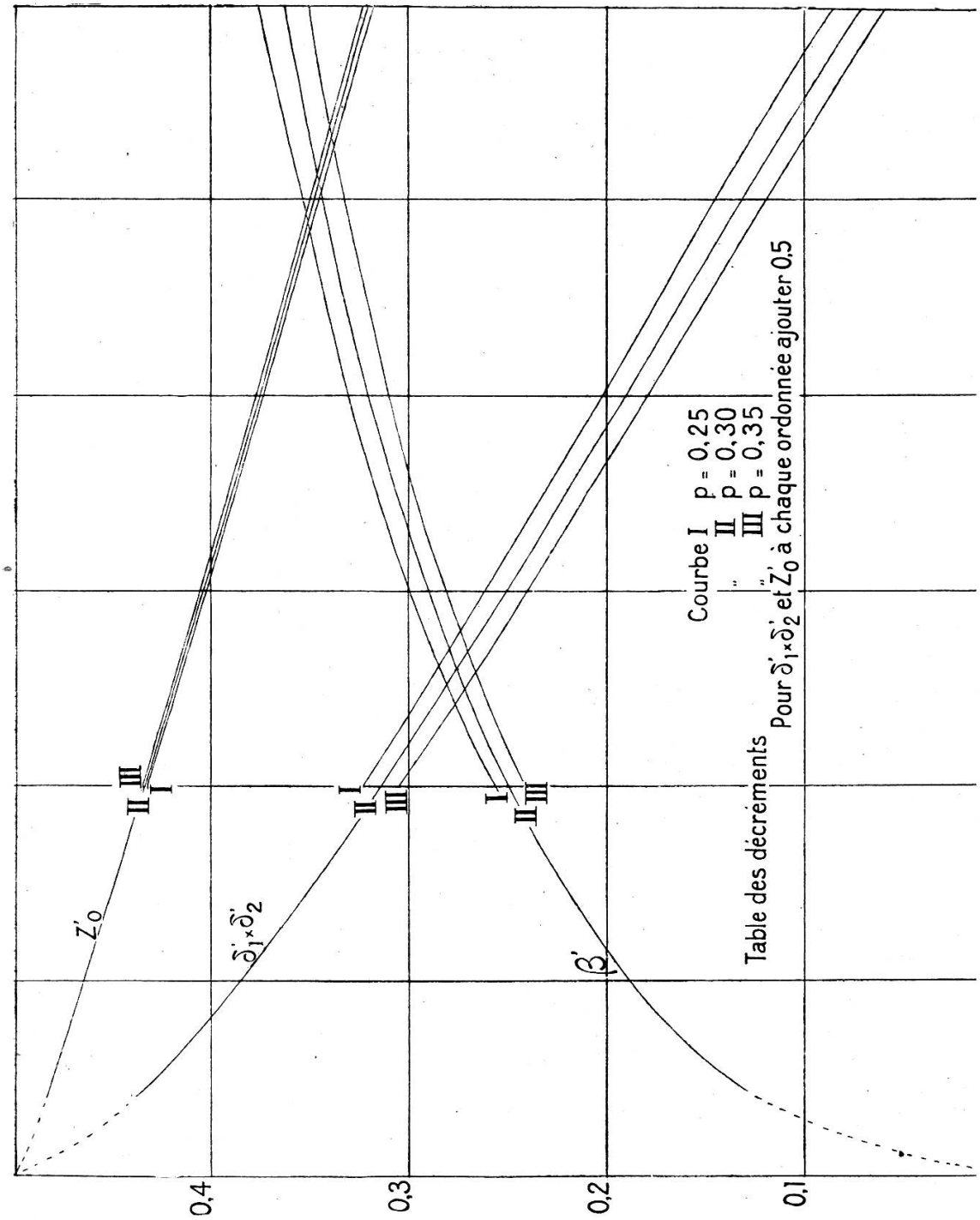
Appelons $\frac{z'}{z}$ la *déformation* et représentons-la par u.

$$\frac{z'}{z} = u \; .$$

Cette déformation est une quantité calculable sur une courbe donnée. Avec ces notations, les équations (29) deviennent

$$\begin{aligned} 3 + 4M' - 5N'P' &= 2P'^2 \\ 6u - 5 + 10M' &= P'^2(5 - 4u) \; . \end{aligned} \qquad (29')$$

[1] On verra bientôt pourquoi ce décrément limite est utile à connaître.



N′ peut s'écrire

$$N' = \frac{\delta'_1 + \delta'_2 + p\beta'}{\delta'_1 + \delta'_2 - p\beta'} \quad \text{en posant} \quad p = \frac{\frac{\beta}{\delta_1}}{2 + \left(\frac{\beta}{\delta_1}\right)^2} \qquad (30)$$

p est une constante du primaire. Les résultats exposés plus loin

montrent que δ_1 et β ont des valeurs numériques voisines. Même lorsqu'on varie sur une grande échelle les conditions du primaire, le rapport $\frac{\beta}{\delta_1}$ n'est jamais très éloigné de l'unité. Or p varie très peu avec $\frac{\beta}{\delta_1}$, et pratiquement sa valeur reste comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. C'est pourquoi il est avantageux de choisir p comme paramètre des courbes que nous allons construire ; le nombre de ces courbes sera fort heureusement très limité.

Il s'agit maintenant, en regardant u comme variable indépendante, de construire des courbes représentatives de $\delta_1 + \delta_2'$, β' et z_0'. Pour voir la possibilité de ce problème, admettons que p *garde la valeur fixe 0,30.* Les équations (29′) et (30) peuvent être présentées comme suit :

$$f_1(\delta_1' + \delta_2', \beta', N') = 0$$

$$f_2(\delta_1' + \delta_2', \beta', u) = 0$$

$$f_3(\delta_1' + \delta_2', \beta', N') = 0 .$$

Résolvons-les par rapport à $\delta_1' + \delta_2'$, β', N'.

$$\delta_1' + \delta_2' = \mathcal{F}_1(u)$$
$$\beta' = \mathcal{F}_2(u)$$
$$N' = \mathcal{F}_3(u)$$

Je rapelle que $z_0' = \sqrt{N'P'}$, de sorte qu'au lieu de cette 3e équation, nous avons la suivante

$$z_0' = \mathcal{F}_4(u) .$$

Il n'est pas possible de donner l'expression algébrique de ces fonctions $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_4$. Néanmoins les courbes qu'elles représentent peuvent être construites par un procédé semblable à celui de la résolution des équations numériques. Ces courbes, construites pour diverses valeurs de p, constituent la *Table des décréments.*

La fig. 19 représente cette table faite pour les diverses valeurs de p

0,25 0,30 0,35

Les abscisses sont les déformations $u \equiv \frac{z'}{z}$.

Comme exemple je vais appliquer la méthode aux courbes de la fig. 2 (Voir aussi fig. 3).

Sur la fig. 20 CA est la tangente à la courbe des décréments

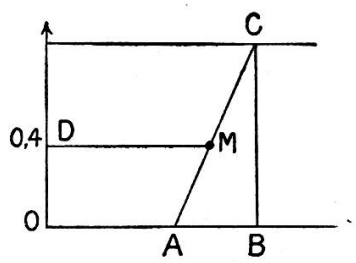


Fig. 20.

au point M. Pour la courbe I (sans résistance), on a les cotes suivantes :

$$DM = z = 0{,}0910$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{dz}{dy} = z' = 0{,}0455 \ .$$

La déformation est $\frac{z'}{z} = 0{,}500$.

En première approximation, nous pouvons supposer $p = 0{,}30$; et par suite nous aurons à utiliser les trois courbes de la Table des décréments marquées II.

A l'abscisse 0,500 correspondent

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}631 \qquad \beta' = 0{,}343 \qquad z_0' = 0{,}847 \ .$$

En multipliant par z on obtient les décréments

$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0574 \qquad \beta = 0{,}0312 \qquad z_0 = 0{,}0771 \ .$$

z_0 sera utilisé dans le calcul des décréments séparés.

Faisons de même pour la seconde courbe

$$z = 0{,}1160$$
$$z' = 0{,}0247$$

La déformation est $\frac{z'}{z} = 0{,}213$. A cette abscisse correspondent

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}806 \qquad \beta' = 0{,}256 \qquad z_0' = 0{,}930 \ .$$

En multipliant par z on obtient les décréments

$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0935 \qquad \beta = 0{,}0297 \qquad z_0 = 0{,}1079 .$$

On observe que la valeur numérique de $\delta_1 + \delta_2$ est plus petite que dans la méthode Bjerknes. Il ne faut pas oublier que la signification de δ_1, c'est-à-dire $\frac{RT}{2L}$ n'est plus ici la même.

Si l'on fait la différence entre les valeurs de $\delta_1 + \delta_2$ pour les deux courbes, on trouve

$$0{,}0361 .$$

Sa valeur prévue était 0,0376.

On remarque que la différence observée est légèrement inférieure à la différence calculée. Cette erreur se retrouvera avec le même signe dans la plupart des exemples que je citerai. Pour voir jusqu'où va l'exactitude de la méthode, il faut porter son attention sur la différence des décréments et sur la valeur de β qui doit se retrouver égale dans la seconde courbe. Dans cet exemple on trouve pour β, successivement,

$$0{,}0312 \qquad \text{et} \qquad 0{,}0297 .$$

Cependant j'avais supposé $p = \dfrac{\frac{\beta}{\delta_1}}{2 + \left(\frac{\beta}{\delta_1}\right)^2} = 0{,}30$. Pour voir si cette condition est bien réalisée, il faut connaître δ_1 séparément.

§ 19. — *Décréments séparés.*

Si l'on se reporte aux formules (16) et (20), on a

$$CKy_m - D = 0 \qquad \text{et} \qquad K = \frac{8\alpha_2 L^2}{E^2} .$$

En substituant à C et à D leurs expressions (19), et en passant des amortissements aux décréments, on trouve :

$$\frac{32L^2}{T^3E^2} \cdot y_m = \frac{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) - \beta^2\delta_1}{\delta_1\delta_2(\delta_1^2 + \beta^2)[(\delta_1 + \delta_2)^2 + \beta^2]} . \qquad (31)$$

On a aussi (24)

$$\frac{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) - \beta^2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) + \beta^2\delta_1} = \frac{1}{N}.$$

Le terme $\beta^2\delta_1$ est toujours assez petit pour qu'on puisse négliger son carré devant le carré du premier terme[1]. En multipliant numérateur et dénominateur par la conjuguée du dénominateur et extrayant la racine carrée, on obtient :

$$\frac{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2) - \beta^2\delta_1}{(\delta_1 + \delta_2)(2\delta_1^2 + \beta^2)} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

L'équation (31) peut s'écrire :

$$\frac{32L^2}{T^3E^2} \cdot y_m = \frac{2\delta_1^2 + \beta^2}{\delta_1(\delta_1^2 + \beta^2)} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_2} \quad \frac{1}{P\sqrt{N}}.$$

Si l'on introduit dans le secondaire une résistance additionnelle qui ne change pas la self-induction, δ_2 devient δ_2^*, et y_m devient y_m^*.

$$\frac{32L^2}{T^3E^2} \cdot y_m^* = \frac{2\delta_1^2 + \beta^2}{\delta_1(\delta_1^2 + \beta^2)} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2^*}{\delta_2^*} \cdot \frac{1}{P^*\sqrt{N^*}}.$$

Divisons ces deux équations membre à membre :

$$\frac{y_m}{y_m^*} = \frac{\delta_2^*}{\delta_2} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 + \delta_2^*} \cdot \frac{P^*\sqrt{N^*}}{P\sqrt{N}}.$$

Soit d l'accroissement de décrément produit par la résistance additionnelle

$$\frac{\delta_2^*}{\delta_2} = 1 + \frac{d}{\delta_2}$$

$$1 + \frac{d}{\delta_2} = \frac{y_m}{y_m^*} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2^*}{\delta_1 + \delta_2} \cdot \frac{P\sqrt{N}}{P^*\sqrt{N^*}}.$$

[1] L'erreur maximum est 3 %. Mais elle apparaîtra en numérateur et en dénominateur dans la formule finale, ce qui la rend insignifiante.

Enfin puisque $z_0^2 = \mathrm{NP}$, *la formule qui fournit le décrément* δ_2 *est*:

$$1 + \frac{d}{\delta_2} = \frac{y_m}{y_m^*} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2^*}{\delta_1 + \delta_2} \cdot \frac{z_0}{z_0^*} \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}^*}} \,. \qquad (32)$$

Appliquons cette formule à l'exemple précédent

$$d = 0{,}0376 \qquad y_m = 88{,}9 \qquad \delta_1 + \delta_2 = 0{,}0574 \qquad z_0 = 0{,}0771$$
$$y_m^* = 26 \qquad \delta_1 + \delta_2^* = 0{,}0935 \qquad z_0^* = 0{,}1079$$
$$\beta = 0{,}0304 \,.$$

(y_m et y_m^* sont des valeurs proportionnelles à $i^2_{\text{eff.}}$).

On trouve[1]

$$\delta_2 = 0{,}0231 \,.$$

On déduit

$$\delta_1 = 0{,}0343 \,.$$

On peut alors calculer p:

$$p = 0{,}304 \,.$$

J'avais supposé $p = 0{,}30$. On voit donc qu'il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs avec cette nouvelle valeur de p.

§ 20. — *Exemples.*

Exemple 2. — Self-induction du secondaire constituée par un carré de 1 mètre (fil 3 mm) avec une bobine de 22 spires (fil 3 mm; diamètre d'une spire 10 cm). L = 37.160 CGS. T = $1{,}606 . 10^{-6}$ Résistance additionnelle 1,596 ohm. (fig. 3)

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}0798 \\ z' = 0{,}0441 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}553 \qquad \text{Courbe I (sans résistance)}$$

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}599 \qquad \beta' = 0{,}353 \qquad z_0' = 0{,}832$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0478 \qquad \beta = 0{,}0282 \qquad z_0 = 0{,}0664$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}1036 \\ z' = 0{,}0237 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}229 \qquad \text{Courbe II (avec résistance)}$$

[1] Self-ind. du secondaire constituée par un carré de 1 m; fil 3 mm; L = 6380 CGS. T = $0{,}60 . 10^{-6}$. Résistance additionnelle 0,798 ohm.

$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}796$ $\beta' = 0{,}263$ $z_0' = 0{,}925$

$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0825$ $\beta = 0{,}0273$ $z_0 = 0{,}0958$

On calcule δ_2 par la formule (32) où l'on fait :

$d = 0{,}0345$ (calculé) $\delta_1 + \delta_2^* = 0{,}0825$ $z_0 = 0{,}0664$

$y_m = 39{,}2$ $\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0478$ $z_0^* = 0{,}0958$

$y_m^* = 11{,}3$ β moy. $= 0{,}0278$

On trouve

$$\delta_2 = 0{,}0211 .$$

On déduit

$$\delta_1 = 0{,}0267 .$$

Et l'on calcule $p = 0{,}338$. Comme il a été supposé $p = 0{,}30$ une 2e approximation est nécessaire. On utilise les deux courbes II et III de la Table des décréments et l'on interpole. On obtient finalement :

Courbe I (sans résist.) $\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0471$ $\beta = 0{,}0275$ $z_0 = 0{,}0665$

Courbe II (avec ») $\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0816$ $\beta = 0{,}0265$ $z_0 = 0{,}0958$

D'où l'on calcule

$\delta_2 = 0{,}0211$ $\delta_1 = 0{,}0260$ β moy. $= 0{,}0270$.

Différence observée 0,0345 (calculée 0,0345) .

Exemple 3. — Self-induction du secondaire constituée par un fil carré de 1 mètre (fil 3 mm) avec trois spires de lame mince (diamètre 21 cm). L = 6900 cm. T = $0{,}598 . 10^{-6}$. Résistance additionnelle 0,6247 ohm (fig. 17).

hauteur	I	II
$y/y_m = 0{,}9$	$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}1157$	0,1207
0,8	0,1083	0,1210
0,7	0,1047	0,1208
0,6	0,1018	0,1192
0,5	0,0983	0,1165
0,4	0,0936	0,1129
0,3	0,0883	0,1099
0,2	0,0846	0,1084
0,1	0,0843	0,1057

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}0932 \\ z' = 0{,}0453 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}486 \qquad \text{Courbe I (sans résistance)}$$

$$\delta'_1 + \delta'_2 = 0{,}460 \qquad \beta' = 0{,}340 \qquad z'_0 = 0{,}851$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0597 \qquad \beta = 0{,}0317 \qquad z_0 = 0{,}0793$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}1130 \\ z' = 0{,}0286 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}253 \qquad \text{Courbe II (avec résistance)}$$

$$\delta'_1 + \delta'_2 = 0{,}781 \qquad \beta' = 0{,}274 \qquad z'_0 = 0{,}917$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0883 \qquad \beta = 0{,}0310 \qquad z_0 = 0{,}1036$$

Calcul du décrément δ_2 :

$$d = 0{,}0270 \qquad y_m = 46{,}4 \qquad \delta_1 + \delta_2 = 0{,}0597 \qquad z_0 = 0{,}0793$$
$$\beta \text{ moy.} = 0{,}0313 \qquad y_m^* = 15{,}6 \qquad \delta_1 + \delta_2^* = 0{,}0883 \qquad z_0^* = 0{,}1036$$

On trouve

$$\delta_2 = 0{,}0190 \ .$$

On déduit

$$\delta_1 = 0{,}0407 \ .$$

On calcule

$$p = 0{,}297 \ .$$

Une nouvelle approximation n'est pas nécessaire.

Différence observée 0,0286 (calculée 0,0270) .

Exemple 4. — Condensateurs du primaire : deux tubes à acide carbonique comprimé. Self-induction du secondaire : un carré de 1 mètre d'une lame large et épaisse ; trois condensateurs en parallèle. L = 4070. T = $0{,}829 \cdot 10^{-6}$. Résistance additionnelle 0,1567 ohm (fig. 3).

		I	II
0,9	$\delta_1 + \delta_2 =$	0,0895	0,0997
0,8		0,0858	0,0967
0,7		0,0842	0,0934
0,6		0,0821	0,0905
0,5		0,0792	0,0869
0,4		0,0759	0,0837
0,3		0,0710	0,0807
0,2		0,0658	0,0782
0,1		0,0638	0,0772

A la 2e approximation on trouve :

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}0750 \\ z' = 0{,}0420 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}560 \qquad \text{Courbe I (sans résistance)}$$

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}597 \qquad \beta' = 0{,}357 \qquad z_0' = 0{,}830$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0448 \qquad \beta = 0{,}0268 \qquad z_0 = 0{,}0629$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 0{,}0839 \\ z' = 0{,}0302 \end{array}\right\} \frac{z'}{z} = 0{,}360 \qquad \text{Courbe II (avec résistance)}$$

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}716 \qquad \beta' = 0{,}311 \qquad z_0' = 0{,}816$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}0601 \qquad \beta = 0{,}0261 \qquad z_0 = 0{,}0743$$

maxima 101,8 et 40,2 $d = 0{,}0160$.

On calcule

$$\delta_2 = 0{,}0127 \qquad \delta_1 = 0{,}0321 \qquad \beta = 0{,}0265 \ .$$

Différence observée 0,0153 (calculée 0,0160) .

§ 21. — *Jusqu'à quel point la nouvelle théorie explique les phénomènes.*

1. Ces exemples montrent qu'il est possible de déterminer les trois décréments δ_1, β et δ_2. A la vérité, ma supposition primitive d'après laquelle δ_1 serait obtenu avec une grande précision, β restant terme de correction, s'est trouvée démentie. Ces deux quantités entrent de pair dans les formules, et pour que la précision des valeurs obtenues soit simplement satisfaisante, un soin extrême est de rigueur dans la construction des courbes de résonance. Une courbe qui, au point de vue de la théorie de Bjerknes, permet d'établir un décrément moyen qui paraît satisfaisant, n'est cependant pas toujours acceptable au point de vue de la nouvelle théorie. En effet, le décrément moyen, et aussi le nombre z sont assez stables, mais le nombre z' qui caractérise l'inclinaison de la tangente dépend beaucoup de la régularité du tracé de la courbe.

2. Il est possible maintenant d'examiner jusqu'à quel point la nouvelle théorie est conforme à l'expérience. Cette conformité à atteindre est double;

1° Conformité entre la forme de la courbe théorique et celle de la courbe expérimentale.

2° Conformité entre les valeurs observée et calculée de l'augmentation du décrément.

Quant au second genre de conformité, les exemples ont montré qu'il est satisfaisant. Il reste à examiner le premier genre. — La connaissance des décréments dans un cas particulier permet de calculer M, N, P et par suite de construire en entier la courbe de résonance et la courbe des décréments. Ce sont les courbes *théoriques* dont il est question sur la fig. 17. On voit que la concordance avec la courbe expérimentale est assez bonne jusqu'à la hauteur 0,6. Au delà il y a divergence; le sommet de

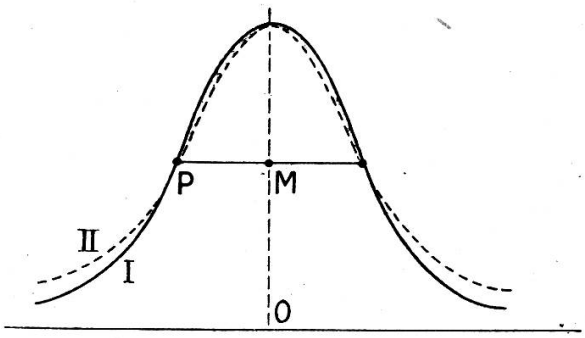


Fig. 21.

la courbe théorique est excavé, circonstance due au fait que NP $>$ 2M, autrement dit que le décrément β est assez grand.

Remarquons en passant qu'on aurait obtenu les mêmes résultats si, pour les deux données, on avait choisi autre chose que le point 0,4 et la tangente en ce point. On aurait pu choisir p. ex. les points 0,3 et 0,5 ou deux autres points quelconques, pourvu qu'ils soient intérieurs à l'intervalle $0 < y < 0{,}6$. Cela résulte de la coïncidence de la courbe théorique et de la courbe expérimentale dans l'intervalle considéré.

3. Après avoir précisé cette conformité, il convient d'examiner ici la théorie de Bjerknes au même point de vue. — Soit $\delta_1 + \delta_2$ la valeur du décrément déterminée à la hauteur OM de la courbe expérimentale I (fig. 21). La courbe *normale* II passant par le point P et possédant $\delta_1 + \delta_2$ comme décrément, *coupe* la courbe I. D'autre part $\delta_1 + \delta_2{}^*$ déterminé sur une seconde

courbe à la même hauteur est tel que la différence $(\delta_1 + \delta_2^*) - (\delta_1 + \delta_2)$ est *trop petite.* Pour ces deux raisons on peut dire que la courbe II ne concorde pas avec la courbe expérimentale I.

Est-il possible de faire passer une courbe normale par un point P, choisi tel que les tangentes aux deux courbes coïncident ? Si oui, la concordance des formes serait meilleure. Cela est effectivement possible lorsque P est dans le premier ou le dernier intervalle (la hauteur étant divisée en dix parties). Mais en aucun de ces deux cas on n'obtient l'égalité des deux accroissements. Toutefois l'intervalle inférieur est de beaucoup le plus favorable, puisque le rapport des deux accroissements, si l'on considère le décrément limite, est environ 0,9.

Admettons, pour le décrément limite, l'égalité approximative des deux accroissements. On aurait donc ce résultat : *L'équation de Bjerknes permet d'expliquer la partie la plus basse de la courbe de résonance.*

C'est là un fait digne de remarque. On est en effet accoutumé à regarder la formule de Bjerknes *ordinaire* comme valable dans le voisinage de la résonance. Je sais que logiquement on a raison, puisque les conditions d'application exigent qu'on ne s'écarte pas de la résonance. Mais, même si l'on se sert de la formule *ordinaire*, on obtient d'après l'énoncé précédent un résultat meilleur quand on l'applique à de grandes dissonances. Cela provient de ce qu'il faut distinguer deux sources d'erreurs : l'une sans importance, qui est l'ensemble des conditions restrictives de Bjerknes ; l'autre qui est l'influence perturbatrice de l'étincelle. Pour éviter en partie cette dernière, il faut appliquer l'équation de Bjerknes à la partie inférieure de la courbe expérimentale.

Nous pouvons maintenant facilement comparer les deux théories et voir le progrès de l'une sur l'autre. *La théorie de Bjerknes rend compte de la courbe de résonance dans sa partie tout à fait inférieure ; la nouvelle théorie rend compte de ce phénomène depuis le bas jusqu'à la hauteur 0,6.* C'est dire que nous nous trouvons maintenant à mi-chemin dans l'explication du phénomène de la résonance.

TROISIÈME PARTIE

Cette dernière partie contient l'exposé des conclusions auxquelles conduit la nouvelle théorie. Cette théorie, comparée à celle de Bjerknes, présente des différences qu'il est utile d'examiner.

Toutefois, pour exposer commodément ces résultats, il est nécessaire que je fasse tout d'abord connaître une méthode de calcul simplifiée, qui a l'avantage de donner aux décréments une représentation graphique.

§ 22. — *Méthode de calcul simplifiée.*

1° La Table des décréments a été construite pour remplacer l'équation de degré élevé de la courbe de résonance. On peut faire un pas de plus : remplacer la Table des décréments par des équations simples.

Cette Table présente des courbes pour $\delta'_1 + \delta'_2$, β', z'_0. En abscisses sont portées les déformations $\frac{z'}{z}$. Dans l'intervalle

$$0{,}2 < \frac{z'}{z} < 0{,}6$$

les courbes pour $\delta'_1 + \delta'_2$, z'_0 ont une bonne allure linéaire ; quant à la courbe β', on peut la considérer comme un arc de parabole. Les équations de ces droites et de cette parabole, pour les diverses valeurs de p

Courbe	I	II	III
$p =$	0,25	0,30	0,35

sont :

$$\text{pour } \delta'_1 + \delta'_2 : \quad \begin{aligned} &\text{I.} \quad \delta'_1 + \delta'_2 = 0{,}936 - 0{,}580 \frac{z'}{z} \text{ [1]} \\ &\text{II.} \quad \delta'_1 + \delta'_2 = 0{,}928 - 0{,}595 \frac{z'}{z} \\ &\text{III.} \quad \delta'_1 + \delta'_2 = 0{,}920 - 0{,}605 \frac{z'}{z} \end{aligned} \qquad (33)$$

[1] Droites déterminées par les points $\frac{z'}{z} = 0{,}3$ et $0{,}5$.

pour β' :

$$\text{I.}\quad \beta' = 0{,}154 + 0{,}580\,\frac{z'}{z} - 0{,}350\left(\frac{z'}{z}\right)^2 \quad [1]$$

$$\text{II.}\quad \beta' = 0{,}148 + 0{,}571\,\frac{z'}{z} - 0{,}356\left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

$$\text{III.}\quad \beta' = 0{,}143 + 0{,}562\,\frac{z'}{z} - 0{,}362\left(\frac{z'}{z}\right)^2 \qquad (33)$$

pour z_0'

$$\text{I.}\quad z_0 = 0{,}988 - 0{,}288\,\frac{z'}{z} \quad [2]$$

$$\text{II.}\quad z_0' = 0{,}989 - 0{,}284\,\frac{z'}{z}$$

$$\text{III.}\quad z_0 = 0{,}990 - 0{,}280\,\frac{z'}{z}$$

Les coefficients qui correspondent à des valeurs de p intermédiaires entre les trois valeurs données, s'obtiennent par interpolation.

Ces formules remplacent assez bien la Table des décréments dans les intervalles

$$0{,}20 < p < 0{,}40$$
$$0{,}20 < \frac{z'}{z} < 0{,}60 \qquad (34)$$

C'est seulement dans ce domaine que seront valables les règles pratiques qui seront énoncées ; ces règles pratiques sont l'interprétation géométrique que permettent ces équations simples.

Considérons uniquement les courbes II qui supposent p = *0,30.* Les résultats qui vont suivre seront donc attachés à cette valeur particulière de p. Toutefois je montrerai que, si l'on se contente d'une certaine approximation, ils jouissent de quelque généralité. Cela tient à ce que les coefficients qui figurent dans les équations précédentes varient peu quand on passe d'une valeur de p à une autre.

2° On a l'équation

$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}928 - 0{,}595\,\frac{z'}{z}\,. \qquad (35)$$

[1] Paraboles déterminées par les points $\frac{z'}{z} = 0{,}2$, 0,4 et 0,6.

[2] Droites déterminées par les points $\frac{z'}{z} = 0{,}3$ et 0,5.

En multipliant par z on peut l'amener à la forme

$$\delta_1 + \delta_2 + 0{,}072\, z = z - 0{,}595\, z' \ . \qquad (35')$$

Faisons la construction suivante (fig. 22) :

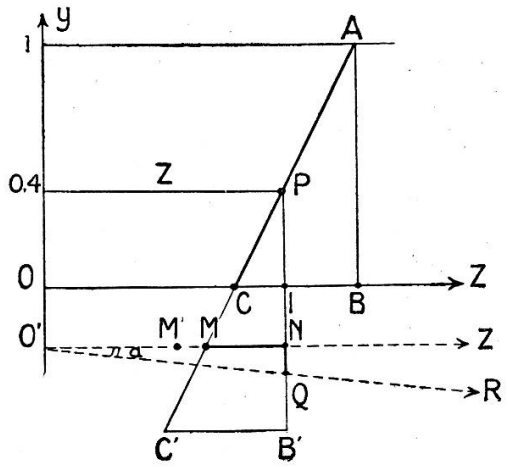


Fig. 22.

AC tangente à la courbe des décréments au point P (hauteur 0,4)

$$PB' = AB = 1$$
$$C'B' = AB \ .$$

L'équation (35') dit que le 1er membre est égal à l'abscisse de P diminuée de 0,595. CB. Traçons MN à une hauteur telle que

$$MN = 0{,}595 \ . \ CB$$

On conclut facilement qu'il faut que l'on ait :

$$IN = 0{,}195 \ .$$

Nous sommes donc amenés à construire parallèlement à OZ un nouvel axe O'Z à la hauteur négative $y = -0{,}195$, sur lequel O'M signifie $\delta_1 + \delta_2 + 0{,}072\, z$. Pour obtenir $\delta_1 + \delta_2$ d'une manière précise, il faut compléter la construction en traçant une droite oblique O'R, faisant avec O'Z un angle α tel que tg $\alpha = 0{,}072$. Dans ces conditions $NQ = 0{,}072\, z$ et enfin *le point M' placé tel que M'M = NQ fait apparaître la signification graphique de* $\delta_1 + \delta_2$

$$\delta_1 + \delta_2 = O'M' \ .$$

Ce procédé fournirait $\delta_1 + \delta_2$ avec une exactitude très satisfaisante si seulement p était connu. Or en pratique p est une constante du primaire, inconnue, et à déterminer.

On pourrait bien — comme on le fait par le calcul rigoureux

— traiter semblablement une seconde courbe de décréments, calculer les décréments séparés au moyen de la formule (32), enfin voir si la valeur qu'on obtient pour p est bien celle qu'on a prévue.

Mais alors la méthode graphique perdrait tout son intérêt. *Son intérêt réside dans le fait qu'elle donne des résultats approchés, quelle que soit la valeur de* p *dont on parte.*

Il est entendu que je parle de l'intervalle que j'ai observé pour p dans mes expériences. Cet intervalle (34) est cependant assez large pour comprendre une multitude de cas d'expérience. On se rend compte de la chose quand on observe les changements d'ordre quantitatif qu'il faut apporter au procédé suivant la valeur de p. Les voici :

	$p = 0{,}25$	0,30	0,35
Axe horiz. O'Z à la haut.	$OO' = 0{,}180$	0,195	0,205
Axe oblique O'R	$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}064$	0,072	0,080

Ainsi pour l'exemple 2 (voir page 64 et fig. 3) le procédé graphique fournit

$$\text{pour} \quad p = 0{,}34 \qquad \delta_1 + \delta_2 = 0{,}0463 \ .$$

Supposons que, ignorant cette vraie valeur de p, nous choisissions $p = 0{,}25$. Le procédé graphique donne

$$\text{pour} \quad p = 0.25 \qquad \delta_1 + \delta_2 = 0{,}0486 \ .$$

On peut donc, en se contentant d'une certaine approximation, considérer les axes O'Z et O'R comme des droites fixes, déterminées par

$$OO' = 0{,}20 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}07 \ .$$

Le procédé graphique présente un intérêt particulier quand on considère simultanément deux courbes de décréments. Sur la fig. 23 AC et BD sont deux tangentes aux courbes des décréments fournissant $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 + \delta_2^*$.

Accroissement $\Delta\delta_2 = \delta_2^* - \delta_2$. On trace O'Z à la hauteur négative $OO' = 0{,}195$; puis O'R telle que $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}072$. Et l'on détermine, comme il a été expliqué, les points M' et L'.

$$O'M' = \delta_1 + \delta_2 \qquad O'L' = \delta_1 + \delta_2 + \Delta\delta_2 \ .$$
$$M'L' = \Delta\delta_2 \ .$$

On pourrait donc trouver $\Delta\delta_2$ en appliquant deux fois le procédé. Mais on peut arriver à ce résultat plus rapidement. Il est visible en effet que ML est à peu près égal à M'L'[1], de sorte que l'*accroissement observé* est

$$\Delta\delta_2 = \mathrm{ML} .$$

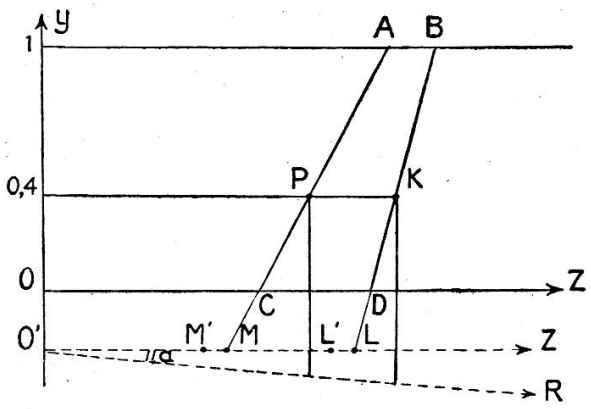


Fig. 23.

Appliquons ce résultat aux divers exemples cités dans la 2e partie. Je lirai toujours la distance ML sur l'axe O'Z mené à la hauteur fixe 0,20.

Exemple 1 (page 61 et fig. 3)

La construction donne ML = 0,0378 .
Le calcul par la table donne $\Delta\delta_2 = 0{,}0361$

Exemple 2 (page 105 et fig. 3)

$$\mathrm{ML} = 0{,}0367 \qquad \Delta\delta_2 = 0{,}0345 .$$

Exemple 3 (page 229 et fig. 17)

$$\mathrm{ML} = 0{,}0299 \qquad \Delta\delta_2 = 0{,}0286 .$$

Exemple 4 (page 105 et fig. 3)

$$\mathrm{ML} = 0{,}0167 \qquad \Delta\delta_2 = 0{,}0153 .$$

On voit que ce procédé graphique envisagé comme mode de calcul n'est pas parfait. Et pourtant il rend de réels services. Lorsque deux courbes simultanées viennent d'être construites, on a rapidement mené les tangentes et lu la distance ML. Si cette distance est un peu supérieure à l'augmentation calculée

[1] La différence ML — M'L' est égale en moyenne à $0{,}05\,\Delta\delta_2$.

du décrément, on peut être sûr que le calcul rigoureux donnera de bons résultats. Dans le cas contraire, on voit le sens et la grandeur de l'erreur, et l'on peut immédiatement reconnaître les défectuosités de l'une ou l'autre des courbes. D'autre part cette signification graphique de la différence $\Delta\delta_2$ sera très utile à l'intelligence des considérations du paragraphe suivant.

3° L'équation

$$\beta' = 0{,}148 + 0{,}571\,\frac{z'}{z} - 0{,}356\left(\frac{z'}{z}\right)^2 \qquad (36)$$

n'est pas susceptible d'une interprétation graphique simple. Mais si à cette équation on additionne la suivante :

$$\delta_1' + \delta_2' = 0{,}928 - 0{,}595\,\frac{z'}{z}\,,$$

on obtient

$$\delta_1' + \delta_2' + \beta' = 1{,}076 - 0{,}024\,\frac{z'}{z} - 0{,}356\left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

ou bien

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \beta - z}{z} = 0{,}076 - 0{,}024\,\frac{z'}{z} - 0{,}356\left(\frac{z'}{z}\right)^2.$$

Le second membre s'annule pour $\frac{z'}{z} = 0{,}429$. Donc dans le voisinage de cette valeur on a à peu près

$$\delta_1 + \delta_2 + \beta = z\,. \qquad (37)$$

De sorte que si AC (fig. 22) correspond à une déformation égale à 0,429 alors

$$O'N = \delta_1 + \delta_2 + \beta$$

et comme on a $O'M' = \delta_1 + \delta_2$, on conclut

$$M'N = \beta\,.$$

Dans ces conditions β a une signification graphique simple; mais cela suppose d'une part une valeur très spéciale de $\frac{z'}{z}$, d'autre part une valeur très spéciale de p.

Par le tableau suivant on pourra se faire une idée de l'erreur commise sur la somme $\delta_1 + \delta_2 + \beta$, en admettant que pour $p = 0{,}30$ et pour toutes les déformations, β est représenté par M'N.

$\frac{z'}{z} =$	0,2	0,3	0,4	0,429	0,5	0,6
Erreur sur $\delta_1 + \delta_2 + \beta =$	5,7 %	3,7 %	0,9 %	0	2,5 %	6,7 %

Pour les autres valeurs de p, les valeurs de $\frac{z'}{z}$ qui rendent rigoureuse l'égalité $\delta_1 + \delta_2 + \beta = z$, sont différentes de 0,429. On a:

pour $p =$	0,25	0,30	0,35
$\frac{z'}{z} =$	0,507	0,429	0,362

L'erreur est du même ordre de grandeur. Il est intéressant de noter que ces valeurs de $\frac{z'}{z}$ tombent toutes en plein dans l'intervalle pratique que j'ai observé pour $\frac{z'}{z}$; elles sont toutes réalisables.

4° Telle est cette méthode graphique qui n'est pas complète par elle-même, puisque les décréments séparés ne peuvent être que *calculés* par la formule (32). Son intérêt, comme je l'ai dit, consiste en ce qu'elle permet de lire immédiatement une valeur approchée des décréments $\delta_1 + \delta_2$, β, $\Delta\delta_2$ sur la courbe des décréments. Pour qu'elle soit utile, il faut considérer les axes O'Z, O'R comme *fixes* et déterminés par les nombres

$$OO' = 0{,}20 \qquad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}07$$

Dans ces conditions l'erreur commise n'est pas de nature à détruire la valeur du procédé.

Je rappelle que ces règles ne sont applicables que dans le domaine

$$0{,}20 < \frac{z'}{z} < 0{,}60$$

$$0{,}20 < p < 0{,}40$$

qui correspond aux divers cas réalisés dans mes expériences. Quelles modifications ces règles doivent-elles subir en dehors de ce domaine? Ces règles existent-elles seulement? Ce sont des questions auxquelles je n'ai pas cru devoir répondre.

Il est certain cependant que les déformations trop fortes, c'est-à-dire telles que $\frac{z'}{z} > 0{,}60$, ne sont pas à prendre en considération, car la théorie tout entière semble en défaut. D'autre part lorsque $\frac{z'}{z} < 0{,}20$, ces règles perdent leur caractère de simplicité.

§ 23. — *Le phénomène de la résonance.*

Les exemples isolés qui terminent la deuxième partie étaient surtout destinés à montrer que la nouvelle théorie rend compte des phénomènes. Nous ferons maintenant l'inverse. Nous admettrons comme base du raisonnement que la théorie est juste; et comme nous connaissons l'ordre de grandeur des décréments, nous allons explorer le phénomène de la résonance, en faisant varier d'une manière continue les trois décréments δ_1, β et δ_2. La théorie de Bjerknes examinée sous le même rapport fournit cette seule conclusion : La courbe de résonance s'aplatit quand la somme des décréments augmente.

Dans notre cas les paramètres variables sont au nombre de trois, ce qui rend le phénomène plus complexe.

Deux courbes de résonance obtenues dans des circonstances différentes peuvent être comparées au point de vue de l'aplatissement, et au point de vue de leur déformation relativement à une courbe de résonance normale. L'aplatissement est caractérisé par z, c'est-à-dire le décrément à la hauteur 0,4. La déformation est caractérisée par z', nombre qui fixe l'inclinaison de la courbe des décréments au point considéré. Ces deux caractères sont immédiatement visibles sur la courbe des décréments; c'est pourquoi désormais nous laisserons la courbe de résonance pour considérer uniquement la courbe des décréments. Et même, à cette dernière nous pouvons substituer *la tangente à la hauteur 0,4.*

La manière dont se déplace cette droite, selon les diverses valeurs des décréments, est figurée sur la fig. 24. Les conclusions que nous énoncerons nous seront fournies par l'inspection de cette figure.

1° Considérons premièrement les droites numérotées 1, 2, 3, 4. C'est le cas d'un primaire dont les décréments sont fixes et ont pour valeurs

$$\beta = 0{,}030 \qquad \delta_1 = 0{,}039 \qquad \text{donc } p = 0{,}30.$$

Ces droites correspondent à des décréments δ_2 qui croissent en progression arithmétique.

$$\delta_2 = 0{,}016 \qquad 0{,}031 \qquad 0{,}046 \qquad 0{,}061$$

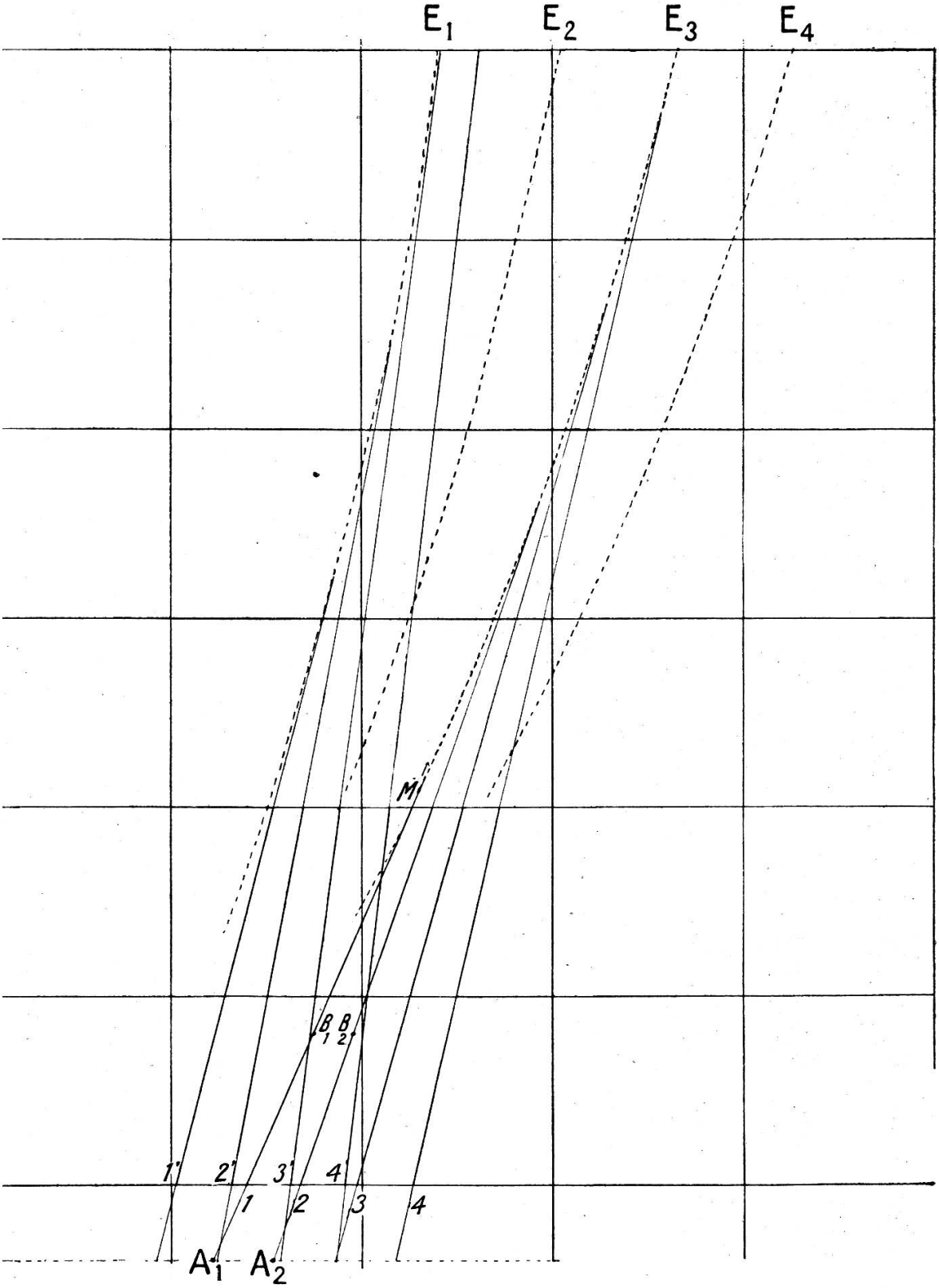


Fig. 24.

Une droite mobile prenant ces diverses positions et les positions intermédiaires, se déplace de gauche à droite et devient plus verticale. Cela signifie que

Lorsque δ_2 augmente, la courbe de résonance s'aplatit et devient de moins en moins déformée.

2° Cette droite, en effectuant un mouvement de translation et un mouvement de rotation, reste constamment tangente à une certaine courbe fixe E_3. L'équation de l'enveloppe de cette famille de droites peut être obtenue à l'aide des équations (33).

Un point de l'enveloppe est à la fois point de tangence d'une droite, et point d'intersection de deux droites infiniment rapprochées. Cette remarque permet de dire que deux droites atteignant l'enveloppe dans sa partie *inférieure,* et correspondant à un accroissement donné de δ_2, forment un angle *relativement grand.* Alors, à un accroissement de δ_2, donné immédiatement sur la figure par le segment A_1A_2, correspond un accroissement de z égal à B_1B_2, beaucoup plus petit que A_1A_2. Le rapport $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}$ est *relativement petit.* Notons que B_1B_2 est à peu près l'accroissement du décrément moyen. On peut donc énoncer la conclusion suivante:

Le rapport entre l'accroissement du décrément moyen et l'accroissement calculé, constamment inférieur à l'unité, augmente à mesure que δ_2 augmente.

Pour montrer le phénomène d'une manière plus précise construisons une courbe (fig. 25). Portons en abscisses les accroissements de δ_2, en ordonnées les accroissements de z, le décrément initial δ_2 ayant pour valeur 0,016. Si on avait constamment $\Delta z = \Delta\,\delta_2$, on obtiendrait une droite, bissectrice des axes. En réalité la courbe est telle que le rapport $\frac{\Delta z}{\Delta \delta_2}$ varie entre 0,60 et 0,80.

Nous remarquons donc que lorsque δ_2 augmente, l'accroissement observé tend à devenir égal à l'accroissement calculé. Cette remarque est contenue dans une autre plus générale qu'il est facile de tirer de l'équation de la courbe de résonance, savoir: La théorie de Bjerknes se confond à la limite avec la nouvelle théorie lorsque δ_2 devient de plus en plus grand.

De sorte que si nous regardons la nouvelle théorie comme

adéquate pour expliquer les phénomènes dans tous les cas, la théorie de Bjerknes s'en rapproche plus ou moins, selon que l'influence de l'étincelle a été plus ou moins palliée par la grandeur de δ_2.

Or comme la nouvelle théorie assure, au moins en principe, l'égalité des valeurs observée et calculée, et comme la théorie de Bjerknes approche plus ou moins de cette égalité suivant la valeur de δ_2, nous pouvons affirmer que le véritable critère des bonnes mesures est l'égalité des deux accroissements, ce qui jus-

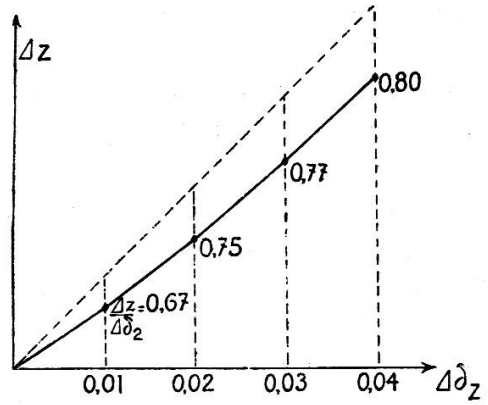


Fig. 25.

tifie *a posteriori* l'hypothèse de ce critère énoncé dans l'introduction.

3° Nous avons fait la supposition $p = 0{,}30$, ce qui attribue au rapport $\frac{\beta}{\delta_1}$ la valeur 0,78. Si l'on augmente l'amortissement du primaire d'une manière quelconque, il n'est pas sûr que le rapport $\frac{\beta}{\delta_1}$ reste le même. Toutefois, autant que les expériences me l'ont montré, il est possible qu'il demeure constant. Si c'est le cas, nous pouvons dire que la part de l'étincelle dans l'amortissement est restée constante. Pour ce qui suit, nous supposerons qu'il en est ainsi.

Admettons donc que β prenne diverses valeurs. A la valeur $\beta = 0{,}030$ correspond l'enveloppe E_3;

à $\beta =$	0,020	0,025	0,030	0,035

correspondent

E_1	E_2	E_3	E_4

La fig. 24 représente ces courbes.

Considérons l'enveloppe E_1 et ses quatre tangentes 1′, 2′, 3′, 4′. La droite 1′ correspond à un même décrément $\delta_2 = 0.016$ que la droite 1. Il en est de même des droites 2′ et 2, etc. En comparant les droites 1′ et 1, on observe que la seconde est plus inclinée par rapport à la verticale que la première ; ce fait a pour cause les valeurs plus fortes de δ_1 et de β. Ainsi une augmentation de l'amortissement du primaire produit, naturellement, une augmentation de z, mais aussi uue augmentation de z'. Nous ne savons rien de la variation de $\frac{z'}{z}$ Pour faciliter l'énoncé de ce résultat, appelons z' la *déformation.* Nous pouvons dire:

Un accroissement de l'amortissement du primaire a pour conséquence une plus grande déformation de la courbe de résonance.

Telles sont les lois principales qui régissent le phénomène de la résonance quand le circuit primaire possède une étincelle. On pourrait en trouver d'autres; car, pour être complet, il faudrait expliquer ce qui se passe lorsqu'on fait varier β seul, ou δ_1 seul, ou enfin δ_1 et β ensemble, mais en liant ces décréments par une relation. Ce sont autant de manières de faire varier l'amortissement du primaire. Mais ces considérations auraient peu d'intérêt, parce qu'on ne sait pas comment faire varier les paramètres du circuit à étincelle, pour obtenir des variations déterminées de δ_1 et de β.

Ces divers résultats sont implicitement renfermés dans l'équation de la courbe de résonance. Pour pouvoir les trouver, les énoncer et les rendre visibles, il a fallu passer de l'équation de la courbe de résonance aux équations simples du paragraphe précédent, par l'intermédiaire de la Table des décréments; et enfin par des constructions envisager des cas particuliers. On comprend dès lors qu'un tel procédé ne permette ni d'être complet, ni d'être rigoureux. Ces lois, que la théorie de Bjerknes ne prévoit pas, sont une première approximation dans l'étude de l'influence perturbatrice de l'étincelle.

Résumé et conclusions.

1. Le présent travail commence par l'exposé des caractères que présente la courbe de résonance expérimentale, quand le

circuit primaire possède une étincelle. Ces caractères sont au nombre de deux, savoir:

I. La courbe de résonance est déformée relativement à une courbe de résonance normale. Les valeurs qu'on obtient pour la somme des décréments selon le procédé de Bjerknes décroissent du haut en bas de la courbe. D'autre part, cette déformation diminue quand l'amortissement du secondaire augmente.

II. Si l'on considère deux courbes de résonance obtenues avec un même secondaire, mais ayant des amortissements différents, l'accroissement de décrément observé par la comparaison des courbes est toujours plus petit que l'accroissement calculé au moyen de la résistance additionnelle.

2. L'examen de la théorie de Bjerknes sur la courbe de résonance montre que la formule des décréments, malgré la rigueur avec laquelle elle peut être obtenue, est impuissante à expliquer les caractères cités. A l'occasion de cette question une théorie détaillée de la courbe de résonance a été donnée.

3. Les deux caractères de la courbe de résonance ont pour cause l'étincelle elle-même, c'est-à-dire le fait constaté, que la courbe de décroissance de l'amplitude du courant se rapproche davantage d'une droite que d'une exponentielle. En partant de cette hypothèse, et en admettant que le phénomène de l'amortissement dans le circuit à étincelle est déterminé par deux paramètres, une équation de la courbe de résonance a été établie, laquelle se réduit à l'équation de Bjerknes, lorsque le second paramètre est posé égal à zéro.

4. L'application convenable de la nouvelle théorie à plusieurs cas d'expérience, facilitée par une méthode pratique, a montré qu'elle est apte à expliquer la moitié inférieure de la courbe de résonance, et qu'elle fait apparaître l'égalité entre l'accroissement de décrément observé et l'accroissement calculé.

5. En dernier lieu, les lois qui régissent le phénomène de la résonance ont été exposées, en tant qu'elles découlent de la nouvelle théorie. Elles ne sont autre chose que les caractères observés par l'expérience et cités au n° 1. La recherche de ces lois a été rendue possible grâce à une interprétation graphique des décréments.