Sur la transmission d'un effort tournant constant dans les mécanismes à ressort

Reste à examiner maintenant l'absence du type grand-parental Angora albinos qui, bien qu'ayant été inscrit sur la liste des descendants de l'hybride $F_1 \times F_1$, ne nous est pas encore sorti[1]. On ne peut guère envisager qu'il soit exclu de cette descendance; aussi pensons-nous le voir surgir un jour avec l'augmentation du nombre des portées.

G. TIERCY. — *Sur la transmission d'un effort tournant constant dans les mécanismes à ressort.*

1. — Le présent travail vise à l'édification d'une théorie nouvelle de la courbe directrice de la fusée, dans le cas où elle est employée pour compenser l'affaiblissement dû à la détente d'un ressort moteur dans la transmission d'un effort tournant constant.

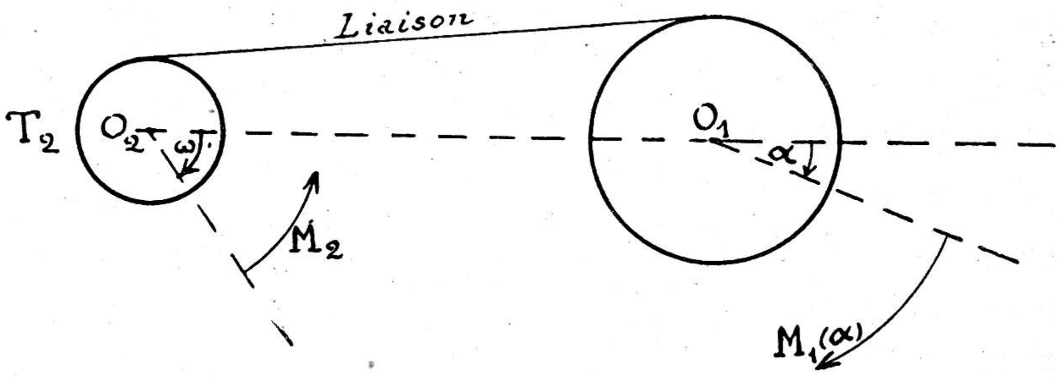

Fig. 1.

Cherchons à réaliser, au moyen d'un ressort de torsion enfermé dans le tambour T_2, l'équilibre indifférent d'un tambour T_1 tournant autour d'un axe fixe O_1 et sollicité par un moment $M_1(\alpha)$; $M_1(\alpha)$ est une fonction quelconque de l'angle de rotation α; un fil s'enroule sur T_2 circulairement, et sur T_1 sur une retraite, appelée fusée. Lorsque T_1 a tourné d'un certain angle α, T_2 se trouve armé d'un angle ω; ω est une fonction de α. Le moment de la tension du fil par rapport à l'axe O_2 est une fonction M_2 de ω, et par conséquent de α; on peut écrire:

[1] Il s'obtient dans une très large proportion, en accouplant l'hybride F_1 avec l'Angora albinos **P**.

$$\left\{\begin{aligned} &|M_2| = M_2(\omega) = \omega \cdot \frac{M_2(\omega)}{\omega} = k\omega\ , \\ &\text{en posant} \\ &\qquad k = \frac{M_2(\omega)}{\omega} = k(\alpha)\ . \end{aligned}\right.$$

L'énergie potentielle du ressort T_2 est alors :

$$E = \int_{\omega_0}^{\omega} M_2(\omega)\, d\omega\ .$$

Désignons ensuite par $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\omega)$ les moments des frottements des tambours autour de leurs axes; nous pouvons même considérer que ces fonctions comprennent les efforts, très faibles, des résistances passives autres que les frottements.

L'équation de l'équilibre indifférent, de α_0 à α, dans le cas où T_1 va l'emporter, s'écrit alors comme suit :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\, d\alpha - \int_{\omega_0}^{\omega} M_2(\omega)\, d\omega - \int_{\alpha_0,\, \omega_0}^{\alpha,\, \omega} [\varphi(\alpha)\, d\alpha + \psi(\omega)\, d\omega] = 0\ . \quad (1)$$

Posons encore :

$$\int_{\alpha_0,\, \omega_0}^{\alpha,\, \omega} [\varphi(\alpha)\, d\alpha + \psi(\omega)\, d\omega] = [\Phi(\alpha)]_{\alpha_0}^{\alpha}\ ;$$

cette fonction $\Phi(\alpha)$ est très complexe; on ne la connaît pas; tout ce qu'on peut affirmer, c'est qu'elle est sensiblement une fonction linéaire de α; posons donc :

$$\Big[\Phi(\alpha)\Big]_{\alpha_0}^{\alpha} = (\alpha - \alpha_0)\,\xi\ ;$$

où le facteur ξ est une fonction de α presque constante; pratiquement, ce sera une constante très faible, représentant la valeur moyenne du moment des frottements, de α_0 à α. L'équation (1) prend donc la forme :

$$\int_{\omega_0}^{\omega} M_2(\omega)\, d\omega = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\, d\alpha - (\alpha - \alpha_0)\,\xi\ . \quad (2)$$

Pour trouver la relation entre α et ω, on est alors conduit à admettre une forme simple de $M_2(\omega)$, qui donne des résultats concordant avec les mesures pratiques, dans un certain domaine. Il nous suffira, pour cela, de considérer la fonction $k(\alpha)$ comme constante, pour le ressort T_2; cela concorde très nettement avec tout ce que peut nous donner l'expérience. On obtient, pour l'énergie potentielle de T_2:

$$\mathcal{E} = \int k\omega d\omega = \frac{k\omega^2}{2} = \frac{M_2^2}{2k} \ ;$$

et l'équation (2) de l'équilibre indifférent devient:

$$\left(\mathcal{E}\right)_0^\omega = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\,d\alpha - (\alpha - \alpha_0)\xi \ . \qquad (3)$$

La solution du problème est enfin donnée par les formules:

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2}{k}\int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\,d\alpha - \frac{2}{k}(\alpha - \alpha_0)\xi + \omega_0^2}\ ; \\ M_2 &= -\sqrt{2k\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\,d\alpha - (\alpha - \alpha_0)\xi + \mathcal{E}_0\right]}\ ; \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

où les radicaux possèdent le double signe.

Pour avoir les relations d'équilibre indifférent dans le cas où T_2 va l'emporter, il suffira de changer le signe de ξ dans les formules (4).

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2}{k}\int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{k}(\alpha - \alpha_0)\xi + \omega_0^2}\ ; \\ M_2 &= -\sqrt{2k\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} M_1(\alpha)\,d\alpha + (\alpha - \alpha_0)\xi + \mathcal{E}_0\right]}\ . \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Ces formules (5) définissent complètement le mouvement des tambours T_1 et T_2; elles permettent de tracer la courbe d'enroulement du fil sur T_1.

2. — Imaginons un plan Π_1 entraîné par T_1, et un plan Π_2

entraîné par T_2. On établira facilement la base et la roulante du mouvement de l'un de ces plans par rapport à l'autre. Le point de contact A des deux courbes est évidemment sur la ligne $\overline{O_1O_2}$; en désignant par r_1 et r_2 respectivement les longueurs $\overline{O_1A}$ et $\overline{O_2A}$, on obtient :

$$\begin{cases} r_1 d\alpha = r_2 d\omega \ ; \\ r_1 + r_2 = \text{constante} = l \ ; \end{cases}$$

les formules (5) conduisent ensuite aux suivantes:

$$r_1 = \frac{lM_1}{M_2 + M_1} \ ; \quad r_2 = \frac{lM_2}{M_2 + M_1} \ , \tag{6}$$

qui déterminent les deux courbes roulantes.

Remarquons qu'en couvrant ces courbes d'un engrenage, ou en appliquant sur elles un fil de longueur constante qui passerait de l'une à l'autre au point A, on réaliserait la transmission de mouvement de O_2 à O_1.

3. — Supposons qu'il s'agisse de mécanismes où l'on demande d'agir sur un tambour d'axe O_1 avec un moment constant $M_1(\alpha) = K$; dans ce cas, nous pouvons, sans diminuer la généralité du problème, poser: $\alpha_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $\mathcal{E}_0 = 0$; cela revient à compter la torsion α à partir de la position de détente complète du ressort; les formules (5) deviennent alors:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2K}{k}\alpha + \frac{2}{k}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi d\alpha} \ , \\ M_2 &= -\sqrt{2kK\alpha + 2k\int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi d\alpha} = -k\omega \ ; \end{aligned} \right. \tag{7}$$

où les radicaux possèdent le double signe; mais, comme le fil enroulé sur T_1 et T_2 ne peut évidemment pas transmettre une poussée, nous ne considérerons que le signe (+).

Cherchons, dans ces conditions, quelle doit être la fusée ; c'est le problème classique de l'horlogerie. Les solutions données dans les traités de mécanique industrielle ou d'horlogerie sont loin d'être entièrement satisfaisantes ; et pourtant, aujourd'hui, on construit de plus en plus des chronomètres de marine, pour lesquels on utilise des fusées.

Si R est le rayon du tambour T_2, la force F de tension du fil s'exprime par :

$$F \cdot R = | M_2(\omega) | \ ; \quad F = \frac{k\omega}{R} \ ;$$

et si l'on appelle $p(\alpha)$ la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre O_1 sur le fil, cette fonction $p(\alpha)$ est déterminée par la relation :

$$F \cdot p(\alpha) = M_1 + \xi = K + \xi \ ;$$

$$p(\alpha) = R \frac{K + \xi}{\sqrt{2kK\alpha + 2k \int_{\alpha_0}^{\alpha} \xi d\alpha}} \ . \qquad (8)$$

Cette équation (8) détermine la courbe fusée ; ou plutôt sa projection orthogonale sur un plan normal à l'axe O_1. Il suffira, pour la trouver, de chercher l'enveloppe des fils répondant à l'équation (8) et tangents à T_2. Prenons le cas pratique, où ξ est une constante ; en désignant par C le point de contact du fil avec T_2, par λ la longueur $\overline{O_1C}$, et par t la longueur de fil séparant les points de contact avec T_2 et la fusée, on trouve :

$$\lambda^2 = l^2 - R^2 + 2Rp(\alpha) \ ; \quad t = \frac{\lambda^2 - p^2}{\sqrt{\lambda^2 - p^2} + p'(\alpha)} \qquad (9)$$

Les singularités de la fusée seront donc solutions de l'une ou de l'autre des équations suivantes :

$$\sqrt{\lambda^2 - p^2} + p'(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 - p^2 = 0 \ .$$

La discussion est facile à terminer.

M. Fernand TURRETTINI. — *Etude de graduations circulaires.*

L'auteur expose une méthode qu'il a eu l'occasion d'employer pour la vérification de machines à diviser circulaires.

Le but de l'étude est de déterminer les erreurs de position des 360 degrés d'un cercle divisé. Le programme de l'étude gé-