Sur l'interprétation géométrique du temps universel, dans la représentation de M. P. Gruner

Autor(en): **Willigens, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **4 (1922)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741984

On voit alors facilement que la transformation correspondante du groupe G_L est le produit des deux transformations:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}\,\overline{x_1} + \alpha_{12}\,\overline{x_2} \\ x_2 = \alpha_{21}\,\overline{x_1} + \alpha_{22}\,\overline{x_2} \\ x_3 = \overline{x_3} \\ x_4 = \overline{x_4} \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \overline{x_1} \\ x_2 = \overline{x_2} \\ x_1 = \alpha_{33}\,\overline{x_3} + \frac{\alpha_{34}}{i}\,\overline{x_4} \\ x_4 = i\alpha_{43}\,\overline{x_3} + \alpha_{44}\,\overline{x_4} \end{array}\right.$$

La seconde est la transformation de Lorentz sous sa forme classique, la première est une transformation purement spatiale peu intéressante pour le physicien.

Ch. WILLIGENS (Interlaken). — *Sur l'interprétation géométrique du temps universel, dans la représentation de M. P. Gruner.*

Considérons un système d'axes rectangulaires X O U que nous désignerons par S_0 et considérons dans ce système les droites:

$$(Ox) \quad U = mX \ , \qquad (Ou) \quad U = \frac{1}{m}X \ ;$$

$$(Ox') \quad U = -\,mX \ , \quad (Ou') \quad U = -\,\frac{1}{m}X \ .$$

M. Gruner prend comme axes de coordonnées Ox, Ou que nous désignons par S et Ox' Ou' que nous désignons par S'. Ox et Ox' sont symétriques par rapport à OX, Ou *et* Ou' par rapport à OU. Si nous désignons par φ l'angle que ces axes forment avec OX ou OU nous obtenons facilement les formules de transformation de coordonnées:

$$\left.\begin{array}{l} X = x\cos\varphi + u\sin\varphi \\ U = x\sin\varphi + u\cos\varphi \end{array}\right\} (S_0\,,\ S)$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \,x'\cos\varphi - u'\sin\varphi \\ U = -\,x'\sin\varphi - u'\cos\varphi \end{array}\right\} (S_0\,,\ S') \ .$$

Si nous égalons dans les deux systèmes les valeurs de X et de U et si nous résolvons par rapport à x et u nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\cos 2\varphi} - u' \operatorname{tg} 2\varphi \\ u &= \frac{u'}{\cos 2\varphi} - x' \operatorname{tg} 2\varphi \end{aligned}\right\} (\mathrm{S}, \mathrm{S}') .$$

Or si nous posons:

$$\sin 2\varphi = \alpha , \qquad \cos 2\varphi = \frac{1}{\beta} , \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \alpha\beta ,$$

$$\beta = 1 : \sqrt{1 - \alpha^2} , \qquad \alpha = \frac{v}{c_0} \qquad \alpha < 1$$

ces relations prennent la forme.

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta(x' - \alpha u') \\ u &= \beta(u' - \alpha x') \end{aligned}\right\} .$$

Elles représentent donc une transformation de Lorentz.

Les premières formules de transformation nous donnent

$$\mathrm{X}^2 - \mathrm{U}^2 = (x^2 - u^2) \cos 2\varphi = (x'^2 - u'^2) \cos 2\varphi .$$

Il résulte de là que nous aurons toujours une transformation de Lorentz pour passer de S à S′, si dans les formules ($\mathrm{S}_0\,\mathrm{S}$) et ($\mathrm{S}_0\,\mathrm{S}'$) nous divisons les seconds membres par une même fonction de l'angle φ, c'est-à-dire que nous pouvons passer de S_0 à S et S′ avec un changement d'échelle à notre choix sur les nouveaux axes.

M. Guillaume a montré que si x, x', u, u' sont 4 quantités reliées par une transformation de Lorentz, il existait un paramètre t tel que

$$u = c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \quad (1) \qquad u' = \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \quad (3)$$

$$u = \frac{c_0}{\beta} t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x \quad (2) \qquad u' = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x . \quad (4)$$

$$\underline{x = x' + \alpha c_0 t}$$

t étant choisi comme variable *indépendante* sera une mesure de temps commune à tous les systèmes observés. Connaissant t et x on en déduit $x' u$ et u'. Si $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on a $u = u' = c_0 t$ et on voit que $c_0 t$ n'est autre chose que l'indication de l'horloge de l'observateur, indication qui est indépendante du système qu'il plaît à celui-ci d'observer, c'est-à-dire de la valeur de α.

Pour une valeur de t donnée nous avons les deux relations (2) et (3) que nous pouvons écrire

$$u = -x \operatorname{tg} \varphi + c_0 t \cos 2\varphi$$
$$u' = x' \operatorname{tg} \varphi + c_0 t \cos 2\varphi$$

qui représentent une même droite, rapportée à 2 systèmes de coordonnées; cette droite est en effet parallèle à OX et elle découpe sur Ou et Ou' des longueurs égales à $c_0 t \cos 2\varphi$. Lorsque α varie et que l'angle des axes Ox, Ox' et Ou, Ou' varie en fonction de α, proposons-nous de déterminer le lieu décrit par les points d'intersection de cette droite avec Ou et Ou'.

Il convient d'abord de choisir le changement d'échelle par rapport au système S_0. Nous avons montré que n'importe quelle hypothèse était admissible. Nous pourrions par exemple supposer que $c_0 t$ est représenté sur tous les axes tels que Ou et Ou' par une même longueur. En ce cas les points d'intersection de la droite avec Ou et Ou' joignent les points d'intersection de ces axes avec la courbe dont l'équation est en coordonnées polaires $\varrho = c_0 t \cos 2\varphi$. Prenons un changement d'échelle tel que

$$X = \frac{x \cos \varphi + u \sin \varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{x' \cos \varphi - u' \sin \varphi}{\cos 2\varphi}$$
$$U = \frac{x \sin \varphi + u \cos \varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{-x' \sin \varphi + u' \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

nous aurons:

$$X^2 - U^2 = x^2 - u^2 = x'^2 - u'^2 .$$

C'est-à-dire que le passage d'un système quelconque à l'autre se fera par une transformation de Lorentz. Pour passer du système S_0 à S ou S' on est ramené à la représentation connue de Minkowski. La longueur $c_0 t$ sera déterminée sur les différents axes Ou et Ou' par l'hyperbole

$$X^2 - U^2 = -a^2$$

où a est la longueur représentant $c_0 t$ sur OU.

En posant $U = \varrho \cos \varphi$, $X = \varrho \sin \varphi$ on a

$$(c_0 t)^2 = \rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} \qquad c_0 t \cos 2\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} = r$$

l'extrémité de r décrit une *lemniscate* lorsque φ varie. On passe de $c_0 t$ compté sur Ou en abaissant de l'extrémité la perpendiculaire sur Ou'. Cette perpendiculaire est la tangente à l'hyperbole.

Considérons enfin un dernier mode de changement d'échelle. Par l'extrémité d'une longueur comptée sur OU menons une parallèle à OX. La longueur déterminée sur Ou sera par définition mesurée par le même nombre.

On tire des formules de transformation de coordonnées données au début

$$x = \frac{X \cos \varphi - U \sin \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$u = \frac{-X \sin \varphi + U \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

Considérons la droite $u =$ const. et coupons-la par $X = 0$ Nous aurons :

$$u = \frac{U \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

en posant $U = a$, on voit que les longueurs sur OU mesurées par le même nombre seront les segments déterminés par l'hyperbole

$$U^2 - X^2 = aU .$$

Posons $u = c_0 t$, $U = a$ pour $\varphi = 0$, $c_0 t = a$.

$$c_0 t \cos 2\varphi = a \cos \varphi .$$

On voit que les droites $c_0 t =$ const. joindront les points d'intersection de Ou et Ou' avec la circonférence décrite sur a comme diamètre.

Si donc t et x sont connus, on peut construire u, x' et u'. M. Gruner affirme[1] que M. Mirimanoff a démontré que la relation de M. Guillaume:

$$u = -\frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x + \frac{c_0}{\beta} t$$

[1] P. Gruner, *Zeitschr. für Physik*, Vol. 10, fasc. 4, p. 235, 1922.

n'avait pas de sens physique universel. Ceci est en contradiction avec ce que j'ai exposé dans mon mémoire des *Archives* (1920, p. 289) et que M. Gruner semble ignorer. Le système XOU est uniquement nécessaire dans la représentation de M. Gruner parce que, pour chaque nouvelle valeur de α, ce physicien doit changer ses deux systèmes d'axes.

En outre, M. Gruner avance une affirmation qui est contraire aux conclusions de M. Mirimanoff.[1] Ce mathématicien prétend donner une interprétation physique du temps t en le ramenant au temps d'un système moyen intermédiaire, et affirme, *sans le démontrer*, que lorsque M. Guillaume considère 3 systèmes, il ne peut y avoir une valeur unique de t. Or, dans le mémoire mentionné ci-dessus et dans ma communication au Congrès international des Mathématiciens à Strasbourg, j'ai pu démontrer que cette affirmation n'était pas soutenable. Il serait hautement désirable que ceux qui écrivent sur la matière n'ignorent pas les travaux qui ont déjà élucidé la question. Ils éviteraient ainsi des inexactitudes et des contradictions.

Edouard GUILLAUME (Berne). — *Comment l'énergie rayonnante se propage-t-elle ?*

a) Le problème fondamental qui est à la base de la Relativité restreinte peut s'énoncer comme suit.

« On produit en un point d'une voie (système S) un signal lumineux qui, par hypothèse, donne naissance à une onde sphérique ayant ce point pour centre et dont le rayon R augmente à raison de 300 000 kilomètres à la seconde. Comment cette onde apparaît-elle à des observateurs entraînés avec un train (système S′) animé d'une translation uniforme de vitesse v sur la voie ? »

Tant que les physiciens ne se seront pas mis d'accord sur la solution à donner à cette question, la Théorie de la relativité tout entière ne pourra être qu'obscure et continuera à faire l'objet de vaines controverses.

On se souvient que dans les discussions qui eurent lieu au

[1] D. MIRIMANOFF, *Archives*, (5), 3, supplément p. 46, 1921.