Problèmes de dynamique et géodésiques d'hypersurfaces

tologique de l'Aptien en Perse, aux Indes, au Texas, en Colombie dans l'Afrique australe, en Russie, en Angleterre, en Provence. Cette uniformité est surtout due à la présence des Hoplitidés. Mais lorsqu'on examine les fossiles récoltés par M. Reinhard on est immédiatement frappé par la présence de formes, comme *Uhligella* et *Lytoceras*, qui donnent à la faune aptienne du Vénézuéla un caractère nettement méditerranéo-alpin. La découverte de M. Reinhard est un fait nouveau dans la Géologie du Vénézuéla et par là même de l'Amérique du Sud. D'après les fossiles cités par KARSTEN et par GERHARDT[1] en Colombie, enfin par SOMMERMEIER[2] au Nord du Pérou, le Crétacé moyen de ces régions andines serait caractérisé par la présence de l'Aptien supérieur et de l'Albien.

Il est possible qu'ici l'Aptien inférieur corresponde au début de la transgression dont parle LÜTHI[3] tandis que sur l'emplacement de la chaîne caribienne, au Vénézuéla, nous aurions eu une partie d'un géosynclinal, comme l'indique la faune méditerranéo-alpine de l'Aptien. Ces considérations paléocéanographiques paraissent confirmer les données sur la tectonique de cette chaîne du Vénézuéla que M. Reinhard vient de présenter ici même.

En terminant, je remercie mon collègue de Grenoble, M. le Professeur KILIAN, le savant spécialiste du Crétacé, qui a bien voulu examiner les *Uhligella* que j'ai tenu à lui soumettre.

G. TIERCY. — *Problèmes de dynamique et géodésiques d'hypersurfaces.*

1. On sait qu'à tout problème de dynamique, on peut faire correspondre le *mouvement d'un point représentatif* dans un espace d'ordre supérieur; cette correspondance a été signalée par STAECKEL, sauf erreur.

Considérons le cas où les liaisons sont indépendantes du temps,

[1] K. GERHARDT. *Beitrag zur Kenntnis der Kreideformation in Venezuela und Peru.* N. Jahrb. für Min. etc. Beil., Bd. 11; 1897-98.

[2] L. SOMMERMEIER. *Die Fauna des Aptien und Albien im nördlichen Peru. I. Cephalopoden, ibid.*, Beil., Bd. 30, 1910.

[3] J. LÜTHI. *Beitrag zur Geologie und Paläontologie von Peru.* Mém. Soc. paléontologique Suisse, vol. XLIII; 1918.

et où il existe une fonction U $(q_1, q_2, \ldots., q_n)$ des forces. On sait que le mouvement naturel d'un système est caractérisé, dans ce cas, par le principe variationnel:

$$\delta \mathcal{A} = 0 \ , \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \int \sqrt{2(\mathrm{U} + h)} \sqrt{\sum a_{i,j}\, dq_i\, dq_j} \ . \qquad (1)$$

On trouvera la solution de ce problème de mécanique dans le traité de M. Appell (vol. II), sous la forme de n équations (équations A) définissant les trajectoires du système dans son mouvement naturel. Ces n équations donnent aussi *la trajectoire d'un point représentatif* dans l'espace R_{n+1}; cette trajectoire est alors contenue dans *la variété à* n *paramètres* définie par:

$$d\mathrm{S}^2 = \sum a_{i,j}\, dq_i\, dq_j \ .$$

Or, si l'on pose:

$$ds^2 = 2(\mathrm{U} + h) \sum a_{i,j}\, dq_i\, dq_j \ , \qquad (2)$$

le principe variationnel (1) ramène le problème mécanique à la recherche des *géodésiques de l'hypersurface d'ordre* n *définie par* (2).

2. Pour plus de commodité, écrivons cet élément (2) sous la forme ordinaire:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{E}_i\, dq_i^2 + 2 \sum\sum_{i \neq k} \mathrm{F}_{i,k}\, dq_i\, dq_k \ ; \qquad (3)$$

prenons s comme paramètre ; le calcul est connu ; il conduit aux n équations que voici:

$$2 \frac{d}{ds} \left[\frac{\mathrm{E}_i\, dq_i + \sum\limits_k \mathrm{F}_{i,k}\, dq_k}{ds} \right] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \mathrm{E}_k}{\partial q_i} \left(\frac{dq_k}{ds} \right)^2$$

$$+ 2 \sum\sum_{m \neq k} \frac{\partial \mathrm{F}_{m,k}}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_m}{ds} \cdot \frac{dq_k}{ds} \ ; \qquad (4)$$

on peut les écrire sous la forme suivante, où les dérivées secondes des q_i sont explicitées:

$$2\,[\delta]\,.\,\frac{d^2 q_m}{ds^2} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{m,i} \left(\frac{dq_i}{ds}\right)^2 + 2 \sum_{r \neq t}\sum b_{m,r,t}\,\frac{dq_r}{ds}\,.\,\frac{dq_t}{ds}\ ; \quad (5)$$

$[\delta]$ est le déterminant de la forme (3). D'ailleurs, on a pour la force vive: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}$.

Ces équations (4) ou (5), tout en donnant la solution du problème mécanique, représentent, non plus une simple *trajectoire* de R_{n+1} tracée sur la variété (dS), mais une *hypergéodésique tracée sur la variété* (2) *ou* (3). D'ailleurs, les résultats (A) et (5) coïncident ; c'est la même *ligne* de R_{n+1} ; il n'y a que l'interprétation qui change.

En se basant sur les remarquables travaux de Beltrami relatifs à la forme quadratique générale (Bologne 1869), et en appelant π l'arc compté sur une géodésique, on montre aisément que ces *géodésiques* de (3) sont caractérisées par l'équation aux dérivées particlles:

$$\Delta\pi = \sum_m \sum_l \frac{\alpha_{l,m}}{\delta}\,.\,\frac{\partial\pi}{\partial q_e}\,.\,\frac{\partial\pi}{\partial q_m} = 1\ , \quad (6)$$

où $[\alpha_{l,m}]$ représente successivement les mineurs du 1$^{\text{er}}$ ordre de $[\delta]$. Le ds^2 prend alors la forme:

$$ds^2 = d\pi^2 + \sum\sum b_{i,k}\, dv_i\, dv_k\ .$$

3. Or, l'équation (6) n'est pas autre chose qu'une équation de Jacobi, relative à un mouvement dont la fonction des forces est nulle, et *qui a lieu sur la variété* (3). En effet, en partant de (3), et en désignant par p_i les variables d'Hamilton, on a:

$$q_i' = \sum_{h=1}^{h=n} p_h \frac{\alpha_{i,h}}{\delta}\ ;$$

la fonction H d'HAMILTON s'écrit alors (H = T) :

$$H = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=n} E_i \left(\sum_{h=1}^{h=n} p_h \frac{\alpha_{i,h}}{\delta}\right) + 2 \sum\sum_{m \neq r} F_{m,r} \left(\sum_{h=1}^{h=n} p_h \frac{\alpha_{m,h}}{\delta}\right)\left(\sum_{h=1}^{h=n} p_h \frac{\alpha_{r,h}}{\delta}\right)\right] ;$$

$$H = \frac{1}{2\delta^2}\left[\sum_{h=1}^{h=n} p_h^2 \left(\sum_i E_i \alpha_{i,h}^2 + 2 \sum\sum_{m \neq r} F_{m,r} \alpha_{m,h} \alpha_{r,h}\right) + \sum_{l \neq h} p_h p_l \left(\sum E_i \alpha_{i,h} \alpha_{i,l} + 2 \sum\sum F_{m,r} \left\{ \alpha_{m,h} \alpha_{r,l} + \alpha_{m,l} \alpha_{r,h} \right\}\right)\right]$$

et comme on a en outre :

$$E_i \alpha_{i,i} + \sum_\lambda F_{i,\lambda} \alpha_{i,\lambda} = \delta , \quad E_i \alpha_{i,h} + \sum_\lambda F_{i,\lambda} \alpha_{h,\lambda} = 0 ,$$

on obtient finalement :

$$H = \frac{1}{2\delta}\left[\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{i,i} p_i^2 + \sum\sum_{m \neq l} \alpha_{l,m} p_l p_m\right] . \tag{7}$$

H ne contenant pas t, l'équation de JACOBI attachée à (7) est justement l'équation (6) : $\Delta\pi = 1$.

4. Supposons alors qu'on trouve une solution particulière de (6) avec $(n - 1)$ constantes arbitraires a_i, autres que la constante h des forces vives ; la *trajectoire du point représentatif sur* (3) a pour équations :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_i} = b_i ; \tag{8}$$

cette *trajectoire est une hypergéodésique* de (3) ou (2). Ces équations (8) contiennent $2(n - 1)$ constantes arbitraires a_i et b_i, qui permettront *d'obliger l'hypergéodésique à passer par un point donné de* (3), et à posséder *une tangente donnée* en ce point.

Enfin, la loi du mouvement du *point représentatif* sur cette trajectoire géodésique dans R_{n+1}, est donnée par l'équation en h. Point n'est besoin d'insister sur la commodité de cette représentation.

C.-E. Guye. — *Sur l'extension de la loi de Paschen aux fluides polarisés.*

On sait que le potentiel explosif dans un gaz peut être considéré comme une fonction du produit $n_1 a$ du nombre n_1 des molécules dans l'unité de volume par la distance a des plateaux (champ uniforme)

$$V = F(n_1 a) . \qquad (I)$$

Cette relation résulte de l'équation bien connue de condition du potentiel explosif

$$a = \frac{\log \alpha - \log \beta}{\alpha - \beta} \qquad (1)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$a = \frac{\log N_0 \varphi_0(\varepsilon\lambda_0 X_e) - \log N_1 \varphi_1(\varepsilon\lambda_1 X_e)}{N_0 \varphi_0(\varepsilon\lambda_0 X_e) - N_1 \varphi_1(\varepsilon\lambda_1 X_e)} \qquad (2)$$

N_0 et N_1 désignent le nombre de chocs relatifs à chacun des centres électrisés pour un parcours d'un cm; λ_0 et λ_1 les libres parcours moyens des centres électrisés; $\varepsilon\lambda_0 X_e$ et $\varepsilon\lambda_1 X_e$ les énergies moyennes de choc; X_e étant le champ électrique extérieur qui détermine le mouvement des centres électrisés.

Dans les diélectriques polarisés, il vient s'ajouter au champ extérieur un champ que l'on peut appeler *moléculaire* et qui résulte de la polarisation plus ou moins complète du milieu. L'action de ce champ, comme il est facile de s'en rendre compte, tend à augmenter la vitesse des centres électrisés et facilite l'ionisation par chocs, condition du potentiel explosif.

La valeur de ce champ moléculaire X_m peut se calculer approximativement par la force exercée soit à l'intérieur d'une fente mince pratiquée parallèlement aux armatures du condensateur dans le diélectrique polarisé, soit, ce qui paraît plus rationnel, au centre d'une cavité de forme sphérique. La somme du champ extérieur et du champ moléculaire a dans ce cas pour