Le champ électromagnétique d'un électron en mouvement

Autor(en): **Wisniewski, Félix-Joachim de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **5 (1923)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741338

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

D'UN

ÉLECTRON EN MOUVEMENT

PAR

Félix-Joachim de WISNIEWSKI

Le but que je me propose ici est la solution des équations du champ électromagnétique d'un électron en mouvement par un procédé qui n'utilise pas les potentiels retardés.

Comme la solution obtenue au moyen des potentiels retardés conduit à des résultats qui ne s'accordent pas avec la stabilité des systèmes construits avec des électrons en mouvement, base des nouvelles théories de la structure des atomes, notre recherche d'une solution nouvelle est justifiée.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de l'électron, par x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace et par R la distance entre l'électron et le point de l'espace.

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 .$$

Si $\Phi(x, y, z\ \xi, \eta, \zeta)$ désigne le potentiel scalaire et $A(x, y, z\ \xi, \eta, \zeta)$ le potentiel vecteur on a pour l'intensité électrique E et magnétique H du champ de l'électron les expressions:

$$E = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} ; \quad H = \text{rot } A .$$

A et Φ sont déterminées par les équations suivantes:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = 4\pi\rho ; \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = 4\pi\frac{\rho v}{c} ; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div } A = 0$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et ϱ signifie la densité de l'électricité au point x, y, z ; v la vitesse de l'électron.

$$v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 .$$

J'admets ici que Φ et A sont des fonctions du temps uniquement par l'intermédiaire des coordonnées ξ, η, ζ de l'électron de sorte que:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\dot{\xi}}{c}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\dot{\eta}}{c}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\dot{\zeta}}{c}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\ddot{\xi}}{c^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\ddot{\eta}}{c^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\ddot{\zeta}}{c^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$+ 2\frac{\dot{\xi}}{c}\frac{\dot{\eta}}{c}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\dot{\xi}}{c}\frac{\dot{\zeta}}{c}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} + 2\frac{\dot{\eta}}{c}\frac{\dot{\zeta}}{c}\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} .$$

En tenant compte des relations:

$$\frac{\partial}{\partial(x, y, z)} = -\frac{\partial}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} ; \qquad \frac{\partial^2}{[\partial(x, y, z)]^2} = \frac{\partial^2}{[\partial(\xi, \eta, \zeta)]^2}$$

on obtient l'équation différentielle de Φ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\left(1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\right)$$

$$+ \frac{\ddot{\xi}}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\ddot{\eta}}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\ddot{\zeta}}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$- 2\frac{\dot{\xi}}{c}\frac{\dot{\eta}}{c}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2\frac{\dot{\xi}}{c}\frac{\dot{\zeta}}{c}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - 2\frac{\dot{\eta}}{c}\frac{\dot{\zeta}}{c}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = -4\pi\rho$$

et une équation analogue pour A.

Posons:

$$(u, u_0) = \frac{(x, \xi)}{\sqrt{1 - \dot{\xi}^2/c^2}} ; \qquad (v, v_0) = \frac{(y, \eta)}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} ;$$

$$(w, w_0) = \frac{(z, \zeta)}{\sqrt{1 - \dot{\zeta}^2/c^2}}$$

$$a = \frac{\frac{\ddot{\xi}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dot{\xi}^2/c^2}} \; ; \quad b = \frac{\frac{\ddot{\eta}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}} \; ; \quad c = \frac{\frac{\ddot{\zeta}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dot{\zeta}^2/c^2}}$$

$$\alpha = \frac{\frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\dot{\eta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right)}} \; ; \quad \beta = \frac{\frac{\dot{\xi}}{c} \cdot \frac{\dot{\zeta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right)}} \; ;$$

$$\gamma = \frac{\frac{\dot{\eta}}{c} \cdot \frac{\dot{\zeta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\right)}} \; .$$

L'équation différentielle de Φ s'écrit alors en fonction des nouvelles variables u, v, w.

$$\nabla^2\Phi + a\frac{\partial\Phi}{\partial u} + b\frac{\partial\Phi}{\partial v} + c\frac{\partial\Phi}{\partial w} - 2\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} - 2\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial w} - 2\gamma\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\,.\,\partial w} = -4\pi\rho$$

Orientons les axes des x, y, z dans l'espace de telle manière que l'axe des x soit parallèle à la direction instantanée de la vitesse v de l'électron.

Alors, on a:

$$\dot{\xi} = v \; ; \quad \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \; ; \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \; ; \quad dv = dy \; ; \quad dw = dz$$

$$a = \frac{\frac{\ddot{\xi}}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \quad b = \frac{\ddot{\eta}}{c^2} \; ; \quad c = \frac{\ddot{\zeta}}{c^2} \; ;$$

$$(du \; , \; du_0 =) \; \frac{(dx \; , \; d\xi)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \quad dv_0 = d\eta \; ; \quad dw_0 = d\zeta \; .$$

Pour Φ et A on obtient ainsi les équations suivantes:

$$\nabla^2\Phi + a\frac{\partial\Phi}{\partial u} + b\frac{\partial\Phi}{\partial v} + c\frac{\partial\Phi}{\partial w} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\mathrm{A} + a\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial u} + b\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial v} + c\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial w} = -4\pi\frac{\rho\,.\,v}{c}$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \; .$$

En tenant compte des relations:

$$\frac{\partial}{[\partial(u, v, w)]} = -\frac{\partial}{[\partial(u_0 v_0 w_0)]} ; \quad \frac{\partial^2}{[\partial(u, v, w)]^2} = \frac{\partial^2}{[\partial(u_0 v_0 w_0)]^2}$$

on peut écrire les mêmes équations sous la forme suivante:

$$\nabla_0^2 \Phi - a\frac{\partial \Phi}{\partial u_0} - b\frac{\partial \Phi}{\partial v_0} - c\frac{\partial \Phi}{\partial w_0} = -4\pi\rho$$

$$\nabla_0^2 A - a\frac{\partial A}{\partial u_0} - b\frac{\partial A}{\partial v_0} - c\frac{\partial A}{\partial w_0} = -4\pi\frac{\rho v}{c} ;$$

où

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial w_0^2} .$$

Le mouvement uniforme.

Nous passons maintenant à l'étude du champ électromagnétique d'un électron en mouvement uniforme.

Dans ce cas, on a:

$$a = b = c = 0 ; \quad \ddot{\xi} = \ddot{\eta} = \ddot{\zeta} = 0 .$$

Les équations de Φ et de A deviennent alors:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} = -4\pi\rho$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} = -4\pi\frac{\rho v}{c} .$$

Les solutions de ces équations sont:

$$\Phi = \int\int\int . \frac{\rho . du_0 dv_0 dw_0}{\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (\omega - w_0)^2}}$$

$$A = \frac{v}{c} . \Phi .$$

Si l'on considère l'électron comme un point mathématique, on trouve pour Φ et A les expressions:

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\overline{Y}^2 + Z^2)}}$$

$$A = \frac{v}{c} . \Phi$$

car

$$\varepsilon = \int\int\int \rho \,.\, d\xi, d\eta, d\zeta$$

$$\overline{X} = x - \xi \;;\quad \overline{Y} = y - \eta \;;\quad Z = z - \zeta \,.$$

Si l'on pose

$$R^2 = \overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + Z^2$$

on obtient:

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)}}$$

$$A = \frac{v}{c} \cdot \frac{\varepsilon}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)}} \,.$$

Si l'on admet que la trajectoire de l'électron est une droite parallèle à l'axe des x, on a pour les composantes de E et de H, en remarquant que:

$$\frac{\partial A_x}{c\partial t} = - \frac{\partial A_x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{cdt} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon \,.\, \overline{X}}{\left[\sqrt{\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\overline{Y}^2 + Z^2)}\right]^3}$$

les expressions suivantes:

$$(E_x, E_y, E_z) = - \frac{\varepsilon}{R^3} \cdot \frac{1 - v^2/c^2}{\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)}\right]^3} \cdot (\overline{X}, \overline{Y}, Z)$$

$$H_x = 0 \;;\quad H_y = + \frac{v}{c} E_z \;;\quad H_z = - \frac{v}{c} E_y \,.$$

Posons:

$$(E_u, E_v, E_w) = \frac{(u - u_0)(v - v_0)(w - w_0)\,\varepsilon}{r^3}$$

où

$$r^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2 \,.$$

Il vient alors:

$$E_x = E_u \;;\quad E_y = \frac{E_v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;;\quad E_z = \frac{E_w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

et

$$H_x = 0 \;;\quad H_y = \frac{-\frac{v}{c} E_w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;;\quad H_z = \frac{v}{c} \cdot \frac{E_v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

En comparant ces relations avec les équations de transformations déduites du principe de relativité, on voit que les axes u, v, w doivent être considérés comme liés à l'électron.

Cette solution des équations du champ électromagnétique fournit donc directement les relations de M. Einstein.

Le mouvement accéléré.

Dans le cas du mouvement accéléré de l'électron, nous allons calculer directement les intensités E et H du champ électromagnétique sans passer par l'intermédiaire des expressions de Φ et de A.

Les équations du champ électromagnétique sont:

$$\text{rot H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \text{E}}{\partial t} = 4\pi\frac{\rho v}{c} \; ; \quad \text{rot E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \text{H}}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho v) = 0$$

$$\text{div E} = 4\pi\rho \; ; \quad \text{div H} = 0 \, .$$

On déduit de ces équations

$$\nabla^2\text{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \text{E}}{\partial t^2} = 4\pi[\nabla\rho - v(v\nabla\rho)] + 4\pi\rho\left[\frac{dv}{dt} - v \,.\, \text{div}\, v\right]$$

$$\nabla^2\text{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \text{H}}{\partial t^2} = -\,\text{rot}\,\frac{\rho v}{c} \,.\, 4\pi \, .$$

Comme ces équations ont la même forme que les équations déterminant Φ et A, on peut leur appliquer les mêmes transformations

$$\nabla_0{}^2\text{E} - a\frac{\partial \text{E}}{\partial u_0} - b\frac{\partial \text{E}}{\partial v_0} - c\frac{\partial \text{E}}{\partial w_0} = -\,4\pi[\nabla_1\rho - v(v\nabla_1\rho)]$$

$$\nabla_0{}^2\text{H} - a\frac{\partial \text{H}}{\partial u_0} - b\frac{\partial \text{H}}{\partial v_0} - c\frac{\partial \text{H}}{\partial w_0} = \text{rot}_1\,\frac{\rho v}{c} \,.\, 4\pi \, .$$

On a en effet

$$\frac{dv}{dt} - v\,\text{div}\,.\,v = 0 \, ,$$

vu que

$$\frac{dx}{dt} = v \; ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 \, .$$

Posons:

$$\nabla_1 = i\frac{\partial}{\partial\xi} + j\frac{\partial}{\partial\eta} + k\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

$$\mathrm{rot}_1\, \mathrm{S} = i\left(\frac{\partial \mathrm{S}_z}{\partial\eta} - \frac{\partial \mathrm{S}_y}{\partial\zeta}\right) + j\left(\frac{\partial \mathrm{S}_x}{\partial\zeta} - \frac{\partial \mathrm{S}_z}{\partial\xi}\right) + k\left(\frac{\partial \mathrm{S}_y}{\partial\xi} - \frac{\partial \mathrm{S}_x}{\partial\eta}\right).$$

On a comme solutions de ces équations:

$$\mathrm{E}(u, v, w) = \int\int\int [\nabla_1 \rho - v(v\nabla_1 \rho)]\, \varphi(u, v, w, u_0 v_0 w_0)\, du_0\, dv_0\, dw_0$$

$$\mathrm{H}(u, v, w) = \int\int\int \mathrm{rot}_1 \frac{\rho v}{c} \,.\, \varphi(u, v, w, u_0 v_0 w_0)\, du_0\, dv_0\, dw_0$$

où φ est l'intégrale particulière de l'équation adjointe.

$$(\delta) \qquad \nabla_0{}^2\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + b\frac{\partial\varphi}{\partial v_0} + c\frac{\partial\varphi}{\partial w_0} = 0$$

φ doit être une fonction régulière dans tout l'espace sauf au point (u, v, w). Pour intégrer l'équation (δ) posons

$$\varphi(u, v, w, u_0 v_0 w_0) = \lambda(u, v, w, u_0 v_0 w_0)\, e^{+\frac{a}{2}(u-u_0)+\frac{b}{2}(v-v_0)+\frac{c}{2}(w-w_0)}$$

et introduisons cette expression dans l'équation (δ). On obtient alors une équation qui détermine λ.

$$\nabla_0{}^2\lambda - \varkappa^2 \,.\, \lambda = 0$$

où

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Nous allons nous servir des trois intégrales suivantes de cette équation:

$$(\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w) = \left[\frac{1}{r^3} + \varkappa\frac{1}{r^2}\right] e^{-\varkappa r} \,.\, (u - u_0)\,,\ (v - v_0)\,,\ (w - w_0)$$

où

$$r^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2\,.$$

Pour φ on obtient, par conséquent:

$$(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w) = \left[\frac{1}{r^3} + \varkappa\frac{1}{r^2}\right] e^{-\varkappa r[1-\cos(\varkappa r)]} \,.\, (u - u_0)(v - v_0)(w - w_0)$$

Mais

$$i_u[\nabla_1 \rho - v(v\nabla_1 \rho)] = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

$$j_v[\nabla_1 \rho - v(v\nabla_1 \rho)] = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \; ; \qquad k_w[\nabla_1 \rho - v(v\nabla_1 \rho)] = \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \; ,$$

car

$$i_u = \frac{i_x}{\sqrt{1 - v^2/e^2}} \; ; \qquad j_v = j_y \; ; \qquad k_w = k_z$$

$$i_u^2 = j_u^2 = k_w^2 = 1 \qquad (i_u j_v) = i_u k_w) = (j_v k_w) = 0$$

et

$$j_v \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = \frac{v}{c} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \; ; \qquad k_w \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = - \frac{v}{c} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \; ; \qquad i_u \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = 0$$

parce qu'on a:

$$v = - \nabla s \; ; \qquad \dot{\xi} = v \; ; \qquad \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \; .$$

Or, comme

$$\varepsilon = \int\int\int \rho \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta \; ,$$

et

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \int\int\int du \, . \, dv \, . \, dw \, . \, \rho \; .$$

il suit de la relation

$$\int\int\int \nabla_1 \rho \, du_0 \, dv_0 \, dw_0 = \frac{n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \int\int \rho \, d\sigma = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

où

$$n = i_u + j_v + k_w \; ,$$

que

$$\int\int\int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} du_0 \, dv_0 \, dw_0 = \int\int\int \frac{\partial \rho}{\partial \eta} du_0 \, dv_0 \, dw_0$$

$$= \int\int\int \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} du_0 \, dv_0 \, dw_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; .$$

En tenant compte de toutes ces relations et en considérant l'électron comme un point mathématique, on obtient pour les

composantes de E et H les relations suivantes:

$$(E_x, E_y, E_z) = E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

$$\left[1 + \varkappa R \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2(Rv)}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right] e^{-\varkappa R \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2(Rv)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \left[1 - \cos\left(\varkappa, R \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2(R_0)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\right]$$

$$H_x = 0$$

$$(H_y, H_z) = \frac{v}{c}[E_z, -E_z]$$

où

$$(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) = -\frac{\varepsilon}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(R_v)}\right]^3} \cdot (\overline{X}, \overline{Y}, Z)$$

Posons

$$(E_u, E_v, E_w) = -\varepsilon\left[\frac{1}{r^3} + \varkappa\frac{1}{r^2}\right] e^{-\varkappa r(1-\cos(\varkappa r))} \cdot (u - u_0)(v - v_0)(w - w_0)$$

Alors on obtient

$$E_x = E_z \ ;$$

$$(E_y, E_z) = \frac{(E_v, E_w)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (H_y, H_z) = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (E_w, -E_v)$$

Ce sont là les relations de M. Einstein.

Eu, Ev, Ew sont les composantes du champ électromagnétique de l'électron par rapport à un système d'axes (u, v, w) qui à l'instant considéré a la même vitesse v que l'électron. Par rapport au système de référence (u, v, w), l'électron est à cet instant en repos, mais il est accéléré.

Nous allons encore calculer l'énergie électrique μ et magnétique M de l'électron, rapportée au système d'axes (x, y, z).

On a

$$\mu = \frac{1}{8\pi}\int\int\int(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\, dx\, dy\, dz$$

expression que l'on peut aussi mettre sous la forme:

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{8\pi}\int\int\int E_u^2\, du\, dv\, dw + \frac{1}{8\pi\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot$$

$$\int\int\int(E_v^2 + E_w^2)\, du\, dv\, dw \ .$$

En introduisant à la place de cos $(\varkappa\rho)$ la valeur moyenne 0, on obtient:

$$\overline{E_u^2} = \overline{E_v^2} = \overline{E_w^2} = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{r^4}[1 + \varkappa r]^2 e^{-\varkappa r}$$

car on a:

$$\overline{(u - u_0)^2} = \overline{(v - v_0)^2} = \overline{(w - w_0)^2} = \frac{1}{3} r^2$$

d'où l'on déduit:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{8\pi}\left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]\frac{1}{3}\int\frac{[1 + \varkappa r]^2}{r^2} \cdot 4\pi dr$$

parce que:

$$\int\int\int du\, dv\, dw = 4\pi \int r^2 dr \ .$$

Posons

$$\frac{\partial S(r)}{\partial r} = \frac{(1 + \varkappa r)^2}{r^2} e^{-\varkappa r} \ .$$

Alors il vient:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{6}\left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right][S(\infty) - S(\sigma)] \ .$$

Or, dans le voisinage de $r = 0$, on a approximativement:

$$\frac{\partial S(r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \ ; \quad S(r) = -\frac{1}{r} \ ,$$

donc

$$S(\sigma) = \frac{-1}{\sigma} \qquad (\sigma \text{ — rayon de l'electron}) \ .$$

Pour r très grand, on a

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \varkappa e^{-\varkappa r} \qquad S(r) = -e^{-\varkappa r}$$

d'où

$$S(\infty) = 0 \ .$$

Il s'en suit que:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{6\sigma}\left[\sqrt{1 - v^2c/^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right] \ .$$

Pour l'énergie magnétique M, on obtient pareillement:

$$M = \frac{\varepsilon^2}{3\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right] - \frac{\varepsilon^2}{3\sigma}[\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1] \ .$$

Pour l'énergie totale, on trouve par conséquent:

$$\mu + M = \frac{2}{3}\frac{2^2}{\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right] - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2}{\sigma}[\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1] + \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{\sigma} \ .$$

Cette expression présente exactement la même valeur que si l'électron n'était pas accéléré.