La propagation des ondes électromagnétiques

DANS

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

PAR

Guido BECK

Il y a quelque temps, M. von Laue a démontré, dans deux publications [1], que la propagation des ondes électromagnétiques a lieu sur le cône « absolu », si l'on suppose que les champs électromagnétiques ne sont pas assez forts pour modifier sensiblement le champ gravifique. Puisque la théorie de la relativité générale n'a pas besoin d'identifier la lumière avec les ondes électromagnétiques pour ses définitions fondamentales, ce fait n'est pas évident en soi et doit être tiré des équations de Maxwell-Lorentz sous leur forme covariante:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} = 0 \ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x_k} = \gamma^i \ , \tag{2}$$

$$\mathfrak{F}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{i\alpha} g^{k\beta} f_{\alpha\beta} \ , \qquad \gamma^i = \sqrt{-g}\, g^{i\alpha} s_\alpha \, .$$

$f_{\alpha\beta}$ indique le tenseur antisymétrique du champ électromagnétique, g_{ik} le tenseur métrique fondamental, s_α le vecteur du courant électrique.

[1] *Physikalische Zeitschrift*, 21, p. 649 (1920); *Sitzungsberichte d. preuss. Akad. d. Wissenschaften*, 118 (1922).

Nous essayerons de donner ici une démonstration bien simple du résultat de M. von Laue, sans même avoir besoin de la restriction que nous venons de mentionner, de sorte que ce théorème est valable pour le cas général. Nous ne nous servirons pas non plus des équations du champ gravifique, nous supposerons seulement que la variété espace-temps est une variété riemanienne et nous admettrons les équations (1) et (2).

Pour résoudre les équations (1) et (2), nous suivons le procédé de Lorentz, en introduisant le potentiel-vecteur φ_i, de façon à avoir:

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} . \tag{3}$$

(3) remplace alors (1), puisque ces deux systèmes d'équations sont équivalents. Les termes φ_i ne sont pas encore fixés exactement par (3), nous pouvons les soumettre à une condition supplémentaire pour déterminer le terme additionnel arbitraire, de la forme $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

Nous choisissons un système de coordonnées géodésiques, au point considéré, de sorte que:

$$g_{ik} = \begin{matrix} +1 & i = k = 0 \\ 0 & i \neq k \\ -1 & i = k = 1, 2, 3 \end{matrix} ,$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} = 0 .$$

Dans ce système de coordonnées, nous soumettons les φ_i à la condition:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0 . \tag{4}$$

Cette condition n'est pas covariante, pour des transformations arbitraires des coordonnées, mais elle nous permet d'obtenir au point en question, pour les coordonnées choisies, la relation:

$$\Box \varphi_i = s_i . \tag{5}$$

En choisissant au lieu de (4) la condition covariante :

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{i\alpha} \varphi_\alpha)}{\partial x_i} = 0 \ ,$$

nous aurions obtenu au lieu de (5) une autre relation contenant des termes du second ordre de différentiation, ce qui aurait compliqué nos considérations.

De (5) nous concluons, pour un petit domaine autour du point considéré, à l'existence d'ondes qui se propagent avec la vitesse de la lumière, sur le cône « absolu ». Ce résultat, étant invariant, reste juste pour tout système de coordonnées.

Berne, Institut de Physique de l'Université.