

# L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm

Autor(en): **Wavre, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **8 (1926)**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742445>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Séance du 1<sup>er</sup> juillet 1926.

R. WAVRE. — *L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm.*

Soit  $N(x, y)$  un noyau symétrique sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes:

I. Requérons le droit d'intervertir les intégrations dans l'expression

$$\int_a^b \alpha(x) dx \int_a^b N(x, y) \beta(y) dy$$

$\alpha(x)$  et  $\beta(y)$  étant deux fonctions de carré sommable.

II. Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_a^b N^2(x, y) dy$$

ait un sens.

Ceci posé, nous avons établi que l'alternative suivante se présente au sujet des fonctions  $\varphi_i$  normalisées déduites par l'itération

$$\varphi_{i+1}(x) = k \int_a^b N(x, y) \varphi_i(y) dy \quad k \text{ étant une constante,}$$

a) ou bien les deux suites  $\varphi_{2i}$  et  $\varphi_{2i+1}$  convergent en moyenne;

b) ou bien il n'existe aucune suite extraite des  $\varphi_i$  qui converge en moyenne.

La démonstration de cette alternative paraîtra probablement dans le bulletin de la Société mathématique de France.

Dans le cas d'un noyau dissymétrique l'étude des itérées reste à faire. Voici seulement un exemple d'un noyau dissymétrique pour lequel c'est l'éventualité b) qui se présente.

Posons

$$\begin{aligned} N(x, y) &= x - y \quad \text{pour } x > y & 0 \leq x \leq 1 \\ N(x, y) &= 0 \quad \text{» } y \geq x & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

alors :

$$\int_0^1 (x-y)y^\alpha dy = \int_0^x (x-y)y^\alpha dy = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad \alpha > -1$$

et si

$$\varphi_0 = 1$$

on a

$$\varphi_1 = \sqrt{5}x^2, \quad \varphi_2 = \sqrt{9}x^4, \quad \varphi_3 = \sqrt{13}x^6,$$

$$\varphi_i = \sqrt{4i+1}x^{2i}$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+p}(x) dx = \frac{\sqrt{4i+1}\sqrt{4i+4p+1}}{4i+2p+1}$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 [\varphi_i(x) - \varphi_{i+p}(x)]^2 dx = 2 \quad \text{quel que soit } i \text{ fixe.}$$

Il est impossible d'extraire des  $\varphi_i(x)$  une suite qui converge en moyenne.

R. WAVRE. — *Construction de fonctionnelles automorphes.*

Dans une note parue aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai construit des fonctionnelles automorphes relatives à un noyau symétrique de Fredholm.

Soient  $N_n(y, x) = \sum \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i^n}$  le noyau itéré d'ordre  $n$  d'un noyau symétrique et  $c_i$  les coefficients de Fourier d'une fonction  $f_0(x)$ , relatifs au système orthogonal  $\psi_i(x)$ . La fonction itérée d'ordre  $n$ ,  $f_n(x) = \int N_n(x, y)f_0(y)dy$  admet les coefficients  $c_i\lambda_i^{-n}$ ; on peut convenir d'attribuer à  $n$  des valeurs non entières.

Soit alors  $F$  une fonction des seuls produits  $c_i\lambda_i^m$  telle que l'intégrale

$$\Phi|f_0(x)| = \Phi(c_1, c_2, \dots) = \int_{m=-\infty}^{+\infty} F(c_1\lambda_1^m, c_2\lambda_2^m, \dots) dm$$