Sur les mouvements internes des planètes

Séance du 2 décembre 1926.

Rolin WAVRE. — *Sur les mouvements internes des planètes.*

On sait que le Soleil, Jupiter, Saturne ne tournent pas d'un bloc autour de leur axe de rotation. L'équateur fait un tour en moins de temps que le voisinage des pôles.

C'est un résultat d'observation que la vitesse augulaire est fonction de la latitude sur la surface libre.

Montrons qu'il est très vraisemblable que *toutes les particules d'une même parallèle à l'axe tournent avec la même vitesse.*

Cette propriété si simple sur les mouvements internes ne semble pas avoir été aperçue par les auteurs qui après Clairant, Poincaré et M. Volterra se sont occupés des figures des planètes et du mouvement d'une masse fluide hétérogène sous l'influence de l'attraction de ses particules.

M. Véronnet ne la mentionne pas dans le numéro du Mémorial (fasc. XIII, 1926) où il synthétise les résultats obtenus sur ce sujet.

Envisageons donc un fluide parfait composé de couches de densité ρ qui soient des surfaces de révolution autour de l'axe des z. Chaque molécule décrira un parallèle avec une vitesse angulaire ω $(x^2 + y^2, z)$. Soit $p(x, y, z)$ la pression et U (x, y, z) le potentiel de Newton.

Les équations de l'hydrodynamique qui régissent ce mouvement s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d^2 x}{dt^2} & & & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d^2 y}{dt^2} & &\text{et ici :} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d^2 z}{dt^2} & & & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z}\ . \end{aligned}$$

Elles donnent lieu à la relation

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho H$$

$$H = dU + \omega^2(x\,dx + y\,dy)\ .$$

ρ joue donc le rôle d'un facteur intégrant, et il est facile de vérifier que l'expression H en admet un.

Avec les auteurs précédemment mentionnés imposons-nous la condition très naturelle:

A) La pesanteur doit être en chaque point normale à la surface d'égale densité passant par ce point.

Alors la quantité H sera nulle ainsi que dp sur toute surface à ρ constant.

La pression p sera donc constante à densité constante; ρ est donc fonction de p seulement.

Le facteur intégrant ρ (x, y, z) a donc sous la condition A) une forme extrêmement simple

$$\rho = f(p) \; .$$

Mais alors H est la différentielle totale de la fonction

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)}$$

et les équations du mouvement s'écrivent:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x & & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \omega^2 x \\[2ex]
\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y & \text{ou} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \omega^2 y \\[2ex]
\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 & & \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0
\end{array}$$

en posant:

$$P - U = Q \; .$$

Mais Q ne dépend pas de z, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ non plus, de sorte que ω ne saurait en dépendre.

On a donc

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} \equiv 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \omega\,(x^2 + y^2) \; .$$

Et il existe un potentiel des accélérations

$$Q = \int_0^l \omega^2(l)\,\frac{1}{2}\,dl^2$$

en posant

$$l^2 = x^2 + y^2 .$$

La vitesse angulaire ne dépend pas de la distance à l'axe.

C'est une conséquence des équations de l'hydrodynamique et de la condition supplémentaire A.

Ce résultat relatif à un fluide parfait obtenu, doit-on le transformer dans le concret pour les corps célestes?

1° La *température.* Si les surfaces d'égale pression et d'égale densité sont aussi isothermes lorsque la profondeur est appréciable, *ce qui est très vraisemblable*, cette intervention de la température n'altère pas nos conclusions.

2° Le *frottement.* S'il y avait une *viscosité* dont il fallût tenir compte, il y a longtemps que le Soleil, Saturne et Jupiter tourneraient d'un seul bloc, le frottement aurait déjà immobilisé les particules les unes par rapport aux autres. La viscosité est donc très faible et il ne semble pas qu'il y ait lieu de la faire intervenir en première approximation.

Notre proposition ne laisse donc subsister dans le concret, pour le Soleil et les grosses planètes que de très faibles doutes. Et pour un fluide parfait nous l'avons démontrée[1].

Ad. Jayet et H. Bütler. — *Sur la stratigraphie du Crétacé moyen du Genevois (Haute-Savoie).*

Le Crétacé moyen du Genevois est surtout connu par les nombreux fossiles que quelques gisements (Saxonnet, la Goudinière) ont fournis. Malgré les travaux paléontologiques

[1] *Correction des épreuves le 7 décembre 1926.* Ces résultats ont été communiqués à M. Véronnet en octobre. Ma dernière lettre adressée à lui est du 29 octobre. Grande est ma surprise de lire dans les Comptes Rendus de l'Académie du 22 novembre 1926 une note où M. Véronnet publie mes résultats et cela sans me nommer.