

Sur l'ionisation des gaz et les températures stellaires

Autor(en): **Tiercy, Georges**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-740869>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'IONISATION DES GAZ

ET LES

TEMPÉRATURES STELLAIRES

PAR

Georges TIERCY

§ 1. — On sait que, pour M. M.-N. Saha ¹, l'ionisation est un phénomène comparable à la dissociation réversible d'un gaz en deux autres gaz; la dissociation, à température donnée, progresse jusqu'au moment où le nombre des atomes décomposés par unité de temps est égal au nombre des atomes complets reformés lors des rencontres des électrons libérés avec les atomes ionisés.

Si l'on désigne par n_0 , n_i et n_e les nombres relatifs d'atomes neutres, d'atomes ionisés et d'électrons, lorsque l'équilibre dynamique est atteint, le rapport:

$$K = \frac{n_i n_e}{n_0} \quad (1)$$

sera une fonction de la température seule ².

D'ailleurs, les lois des mélanges gazeux seront conservées; si l'on désigne par P la pression totale, R la constante des gaz,

¹ *Philosophical Magazine*, Vol. XL, p. 472 et p. 809, 1920, et vol. XLI, p. 267-278, 1921.

² Loi de GULDBERG et WAAGE pour la dissociation d'un gaz en deux gaz.

À la température absolue, p_0 , p_i et p_e les pressions partielles, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} PV = RT ; \\ p_0 v_0 = RT ; \\ p_i v_i = RT ; \\ p_e v_e = RT ; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = c_0 P ; \\ p_i = c_i P ; \\ p_e = c_e P ; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{n_0}{N} ; \\ c_i = \frac{n_i}{N} ; \\ c_e = \frac{n_e}{N} ; \end{array} \right. .$$

$$N = n_0 + n_i + n_e .$$

D'où l'on tire :

$$p_\lambda = \frac{n_\lambda P}{N} ; \quad P = \frac{p_\lambda N}{n_\lambda} ;$$

$$P v_0 n_0 = NRT = P v_i n_i = P v_e n_e = PVN ;$$

$$v_0 n_0 = v_i n_i = v_e n_e = VN = \text{const} = h ;$$

puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 n_0 v_0 = n_0 RT ; \\ p_i n_i v_i = n_i RT ; \\ p_e n_e v_e = n_e RT ; \end{array} \right. \quad \text{ou bien :} \quad \left\{ \begin{array}{l} h p_0 = n_0 RT ; \\ h p_i = n_i RT ; \\ h p_e = n_e RT ; \end{array} \right. \quad (2)$$

Si on prend le volume $V = 1$, on a :

$$h = N ,$$

$$p_\lambda = n_\lambda \frac{R}{N} T .$$

Mais les nombres d'atomes sont proportionnels aux n_λ et valent $m_\lambda = AN_\lambda$; d'où :

$$p_\lambda = m_\lambda \left(\frac{R}{AN} \right) T .$$

Or, AN est le nombre total d'éléments ; en posant :

$$\frac{R}{AN} = k ,$$

on a :

$$p_\lambda = m_\lambda k T ,$$

formule connue.

Les relations (2) donnent d'ailleurs la vérification suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 NV = n_0 RT ; \quad (p_0 + p_i + p_e) NV = RT(n_0 + n_i + n_e) ; \\ p_i NV = n_i RT ; \quad PNV = RTN ; \\ p_e NV = n_e RT ; \quad PV = RT . \end{array} \right.$$

En désignant par \mathcal{V} le volume NV, on pourra écrire comme suit:

$$\mathcal{V} = \frac{RT}{P}(n_0 + n_i + n_e) . \quad (3)$$

l'égalité $PNV = RT(n_0 + n_i + n_e)$.

Les relations fondamentales (2) donnent alors la suivante:

$$h \left(\frac{p_i p_e}{p_0} \right) = \left(\frac{n_i n_e}{n_0} \right) . RT ;$$

en posant:

$$K_p = \left(\frac{p_i p_e}{p_0} \right) . h ,$$

on obtient:

$$K_p = KRT ; \quad (4)$$

la fonction K_p est donc aussi fonction de la température seule. Enfin, si la valeur de K_p était connue pour chaque valeur de T, on voit bien qu'on pourrait en déduire le degré d'ionisation, autrement dit le pourcentage des atomes dissociés par unité de volume. En effet, si l'on appelle ξ le degré d'ionisation, la loi du mélange gazeux donne:

$$p_i = \frac{\xi}{1 + \xi} P ; \quad p_e = \frac{\xi}{1 + \xi} P ; \quad p_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} P ;$$

$$K_p = \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P . \quad (4bis)$$

Tout le problème qui consiste à trouver le degré d'ionisation revient donc à chercher la fonction $K_p(T)$ ou $K(T)$.

§ 2. — Ce problème est résolu par la formule (12^{bis}) (p. 96) que van t'Hoff a donnée pour les mélanges gazeux. On peut l'établir par le calcul suivant.

La condition d'équilibre dynamique, pour une température T , est que la variation de l'entropie totale soit nulle :

$$\delta(S + S_c) = 0 ,$$

la pression P restant constante; avant cet état d'équilibre dynamique, l'entropie va toujours en augmentant, au cours de la transformation. On désigne ici par S l'entropie totale du système gazeux, et par S_c l'entropie des corps qui l'entourent et qui seront appelés à lui céder de la chaleur. Si \mathcal{U} est l'énergie interne du système gazeux étudié, \mathcal{V} son volume, et si δQ est la quantité de chaleur empruntée à l'extérieur pour amener une modification à température et à pression invariables, on aura :

$$\delta S_c = -\frac{\delta Q}{T} = -\frac{\delta \mathcal{U} + P \cdot \delta \mathcal{V}}{T} ;$$

et la condition exigée s'écrit :

$$\delta S - \frac{\delta \mathcal{U} + P \cdot \delta \mathcal{V}}{T} = 0 . \quad (5)$$

Donc, lorsque l'état d'équilibre dynamique est atteint, T et P restant constants, et les nombres n variant seuls, la fonction F suivante doit être stationnaire :

$$F = S - \frac{\mathcal{U} + P \mathcal{V}}{T} .$$

En faisant allusion aux atomes et électrons en jeu, on peut écrire, pour une molécule-gramme de gaz primitif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = n_0 u_0 + n_i u_i + n_e u_e = \sum_{\lambda=1, 2, 3} n_\lambda u_\lambda ; \\ S = \sum n_\lambda s_\lambda + C ; \end{array} \right.$$

où les coefficients n_λ sont proportionnels aux nombres d'atomes des diverses sortes.

Or, J.-W. Gibbs ¹ a calculé la quantité C , dans le cas de disso-

¹ Voir: PLANCK, *Thermodynamik*. Berlin, W. de Gruyter, 1921.

ciation chimique d'un gaz en deux gaz; elle ne dépend que des n_λ , étant entendu que ces n_λ sont réduits à leurs valeurs relatives minima :

$$C = -R \sum n_\lambda \text{Log } c_\lambda, \quad \text{où} \quad c_\lambda = \frac{n_\lambda}{N}. \quad (6)$$

Dans ces conditions, la fonction F s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum n_\lambda \left(s_\lambda - \frac{u_\lambda + RT}{T} - R \text{Log } c_\lambda \right); \\ F = \sum n (f - R \text{Log } c), \quad \text{en posant : } f = s - \frac{u + RT}{T}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Lorsque les n_λ seuls varient, il vient pour δF , en tenant compte de ce que $\sum n R \cdot \delta \text{Log } c = 0$:

$$\sum (f_\lambda - R \text{Log } c_\lambda) \delta n_\lambda = 0. \quad (5bis)$$

Il est vrai qu'on ne connaît pas les valeurs des δn_λ ; mais, dans le cas de l'ionisation simple, on sait qu'un atome neutre donne un atome ionisé et un électron libre; on connaît donc des nombres ν_0 , ν_i et ν_e proportionnels aux δn_λ ; on a ici :

$$\nu_0 = -1; \quad \nu_i = \nu_e = 1.$$

Alors, la condition (5^{bis}) donne, μ étant un facteur de proportionnalité :

$$\begin{aligned} \mu [f_0 \nu_0 + f_i \nu_i + f_e \nu_e - R(\nu_0 \text{Log } c_0 + \nu_i \text{Log } c_i + \nu_e \text{Log } c_e)] &= 0; \\ \frac{\sum f_k \nu_k}{R} &= \nu_0 \text{Log } c_0 + \nu_i \text{Log } c_i + \nu_e \text{Log } c_e. \end{aligned} \quad (8)$$

Or, le second membre vaut :

$$-\text{Log } c_0 + \text{Log } c_i + \text{Log } c_e = \text{Log } \frac{c_i c_e}{c_0} = \text{Log } \frac{n_i n_e}{n_0} \cdot \frac{1}{N} = \text{Log } \frac{K}{N}.$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = N \left(\frac{c_i c_e}{c_0} \right), \quad \text{ou bien :} \\ \text{Log } K = \text{Log } N + \nu_0 \text{Log } c_0 + \nu_i \text{Log } c_i + \nu_e \text{Log } c_e. \end{array} \right. \quad (9)$$

C'est là un premier pas; mais ce résultat n'indique pas comment K varie lorsque la température T change; et c'est justement ce dernier renseignement qu'il faut obtenir.

La fonction K est une fonction de la température T seule;

on va donc étudier la dérivée $\frac{d \operatorname{Log} \left(\frac{K}{N} \right)}{dT}$.

Les fonctions f_λ varient avec T ; et l'on aura, à cause de (8) et (9):

$$\frac{d \operatorname{Log} \left(\frac{K}{N} \right)}{dT} = \frac{1}{R} \sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT};$$

$$\frac{d \operatorname{Log} K}{dT} - \frac{d \operatorname{Log} N}{dT} = \frac{1}{R} \sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT}.$$

Comme les relations (2) donnent:

$$hP = RNT,$$

c'est-à-dire:

$$\operatorname{Log} N = \operatorname{Log} P + \operatorname{Log} h - \operatorname{Log} R - \operatorname{Log} T,$$

on obtient:

$$\frac{d \operatorname{Log} K}{dT} - \frac{dP}{PdT} + \frac{1}{T} = \frac{1}{R} \sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT}. \quad (10)$$

Précisons qu'il s'agit ici d'ionisation simple; avec un changement de la température T , on aura certes de nouvelles valeurs de n_0 , n_i et n_e ; mais les valeurs de ν_0 , ν_i et ν_e resteront les mêmes, puisqu'elles correspondent à la décomposition d'un atome neutre en un atome ionisé et un électron. On a donc bien la relation (10), où les ν_λ sont des constantes.

Quant au deuxième membre de (10), on obtient par les égalités (7):

$$df_\lambda = ds_\lambda - \frac{du_\lambda}{T} + \frac{u_\lambda dT}{T^2};$$

ou bien:

$$df_\lambda = \left(ds_\lambda - \frac{du_\lambda + Pd w_\lambda}{T} \right) + \frac{Pd w_\lambda}{T} + \frac{u_\lambda dT}{T^2};$$

la parenthèse donne zéro; d'autre part, on a, pour chaque constituant:

$$RT = P\omega_\lambda, \quad \text{où} \quad \omega_\lambda = \frac{\nu_\lambda n_\lambda}{N}, \quad \text{puisque} \quad RT = p_\lambda \nu_\lambda;$$

$$\omega_\lambda dP + Pd\omega_\lambda = RdT;$$

$$Pd\omega_\lambda = RdT - \omega_\lambda dP;$$

d'où:

$$\sum \nu_\lambda df_\lambda = \sum \left[\frac{u_\lambda dT}{T^2} + \frac{RdT}{T} - \frac{\omega_\lambda dP}{T} \right] \cdot \nu_\lambda;$$

et comme la pression P est constante:

$$\sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT} = \sum \left(\frac{u_\lambda + RT}{T^2} \right) \cdot \nu_\lambda;$$

la relation (10) s'écrit alors comme suit:

$$\frac{d \text{Log } K}{dT} + \frac{1}{T} = \frac{1}{RT^2} \sum \nu_\lambda (u_\lambda + RT). \quad (10bis)$$

Rappelons ici la relation (4):

$$K_p = KRT;$$

elle permet de mettre l'équation (10^{bis}) sous la forme:

$$\frac{d \text{Log } K_p}{dT} = \frac{1}{RT^2} \left[\sum \nu_\lambda u_\lambda + RT \sum \nu_\lambda \right];$$

ou bien puisque $\sum \nu_\lambda = 1$:

$$\frac{d \text{Log } K_p}{dT} = \frac{1}{RT^2} \left[\sum \nu_\lambda u_\lambda + RT \right]. \quad (11)$$

Or, $\sum \nu_\lambda u_\lambda$ est l'accroissement d'énergie qu'il faut fournir au mélange (n_0, n_i, n_e) issu d'une molécule-gramme de gaz primitif, pour passer à l'ionisation plus forte caractérisée par les coefficients $n_0 - 1, n_i + 1, n_e + 1$.

On a, en effet:

$$\sum \nu_\lambda u_\lambda = (u_0 \delta n_0 + u_i \delta n_i + u_e \delta n_e) = \delta \sum u_\lambda n_\lambda;$$

et comme :

$$\sum u_k n_k = \mathcal{U} ,$$

il vient :

$$\sum v_k u_k = \Delta_A \mathcal{U} ;$$

où A représente le nombre d'atomes décomposés quand on passe de n_0 à $(n_0 - 1)$, et où $\Delta_A \mathcal{U}$ est l'énergie à communiquer à la molécule-gramme pour en dissocier A atomes ; précisons que cette égalité $\sum v_k u_k = \Delta_A \mathcal{U}$ se rapporte à la transformation à volume constant. Le crochet du second membre de (11) s'écrit ainsi :

$$[\Delta_A \mathcal{U} + RT] ,$$

et représente l'énergie à fournir à la molécule-gramme pour la même transformation, mais à pression constante :

$$\Delta_A \mathcal{U}_p = \Delta_A \mathcal{U} + RT . \quad (\text{voir remarque I, p. 96})$$

On obtient donc :

$$\frac{d \text{Log } K_p}{dT} = \frac{\Delta_A \mathcal{U}_p}{RT^2} , \quad (12)$$

étant entendu que les n_k varient de 1, ou bien les nombres d'atomes de A. C'est presque la formule cherchée.

Le numérateur du second membre représente l'énergie qu'il faut communiquer à une molécule-gramme pour en dissocier A atomes ; le premier membre indique la dérivée correspondante de $\text{Log } K_p$. Il est facile de constater que l'équation caractérisant l'ionisation d'un seul atome de la molécule-gramme, est encore l'équation (12), où l'on comprendra par $\Delta \mathcal{U}_p$ l'énergie à fournir à la molécule-gramme pour dissocier cet unique atome.

En effet, les nombres d'atomes et d'électrons sont proportionnels à n_0, n_i, n_e , et valent An_0, An_i et An_e ; on a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = An_0 \left(\frac{u_0}{A} \right) + An_i \left(\frac{u_i}{A} \right) + An_e \left(\frac{u_e}{A} \right) ; \\ S = \sum An_k \left(\frac{s_k}{A} \right) + C ; \\ C = - \frac{R}{A} \sum An_k \text{Log } C_k ; \end{array} \right.$$

en posant: $An_\lambda = m_\lambda$, $\frac{u_\lambda}{A} = u'_\lambda$ et $\frac{s_\lambda}{A} = s'_\lambda$, on peut écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U} = \sum m_\lambda u'_\lambda ; \\ S = \sum m_\lambda s'_\lambda + C ; \\ C = -\frac{R}{A} \sum m_\lambda \text{Log } c_\lambda . \end{array} \right.$$

d'où:

$$F = \sum m \left[s' - \frac{u' + RT}{T} - \frac{R}{A} \text{Log } c \right] ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum m \left(f - \frac{R}{A} \text{Log } c \right) ; \\ f = s' - \frac{u' + RT}{T} ; \end{array} \right.$$

et l'équation (5^{bis}) devient:

$$\sum \left(f - \frac{R}{A} \text{Log } c \right) \delta m = 0 ;$$

les variations δm_λ sont encore proportionnelles aux nombres $\nu_0 = -1$, $\nu_i = \nu_e = 1$. De sorte que l'équation fondamentale (8) s'écrit:

$$\frac{A(f_0\nu_0 + f_i\nu_i + f_e\nu_e)}{R} = \nu_0 \text{Log } c_0 + \nu_i \text{Log } c_i + \nu_e \text{Log } c_e ;$$

$$\frac{A \sum \nu_\lambda f_\lambda}{R} = \text{Log } \frac{c_i c_e}{c_0} = \text{Log } \frac{K}{N} ,$$

où $N = n_0 + n_i + n_e$, comme précédemment. On obtient ainsi, par dérivation par rapport à T:

$$\frac{d \text{Log } K}{dT} + \frac{1}{T} = \frac{A}{RT^2} \sum \nu_\lambda (u'_\lambda + RT) ;$$

$$\frac{d \text{Log } K_p}{dT} = \frac{A}{RT^2} \left[\sum \nu_\lambda u'_\lambda + RT \sum \nu_\lambda \right] ; \quad (11bis)$$

On voit que $\sum \nu_\lambda u'_\lambda$ est l'énergie qu'il faut fournir à la molécule-gramme pour en dissocier un atome (transformation à

volume constant); c'est donc le $\Delta\mathcal{U}$ relatif à $A = 1$; le crochet entier est le $\Delta\mathcal{U}_p$ correspondant.

Ainsi, la dérivée de $\text{Log } K_p$, dans le cas de l'ionisation de A atomes de la molécule-gramme, est égale à :

$$A \left(\frac{\Delta\mathcal{U}_p}{RT^2} \right).$$

où $\Delta\mathcal{U}_p$ se rapporte à un seul atome ionisé. Donc, dans le cas d'ionisation d'un unique atome, la dérivée de $\text{Log } K_p$ sera :

$$\frac{d \text{Log } K_p}{dT} = \frac{\Delta\mathcal{U}_p}{RT^2}. \quad (12')$$

Telle est la formule cherchée. Van t'Hoff l'a donnée pour la transformation à volume constant; on a, par (10^{bis}) et (11):

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Log } K}{dT} + \frac{1}{T} &= \frac{\Delta\mathcal{U}}{RT^2} + \frac{1}{T}; \\ \frac{d \text{Log } K}{dT} &= \frac{\Delta\mathcal{U}}{RT^2}. \end{aligned} \quad (12^{bis})$$

Remarque I. — On a écrit plus haut :

$$\Delta\mathcal{U}_p = \Delta\mathcal{U} + RT.$$

En effet, si α_p et α_v sont les chaleurs spécifiques du gaz, respectivement à pression constante et à volume constant, on a toujours :

$$\alpha_p - \alpha_v = R, \quad \alpha_p = \alpha_v + R;$$

d'où :

$$d\Delta\mathcal{U}_p = \alpha_p dT = (\alpha_v + R) dT; \quad \Delta\mathcal{U}_p = \Delta\mathcal{U} + RT.$$

Remarque II. — Le deuxième membre de (10^{bis}) pouvait être obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} f_k &= s_k - \frac{u_k + RT}{T}; \\ df_k &= ds_k - \frac{du_k + R dT}{T} + \frac{u_k + RT}{T^2} dT. \end{aligned}$$

Mais $RT = Pw_\lambda$; d'où, puisque P est constant:

$$RdT = Pd w_\lambda ;$$

il vient donc:

$$df_\lambda = \left(ds_\lambda - \frac{du_\lambda + Pd w_\lambda}{T} \right) + \frac{u_\lambda + RT}{T^2} dT ;$$

la parenthèse donne zéro; et l'on a:

$$\sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT} = \sum \left(\frac{u_\lambda + RT}{T^2} \right) \cdot \nu_\lambda ;$$

$$\frac{1}{R} \sum \nu_\lambda \frac{df_\lambda}{dT} = \frac{1}{RT^2} \sum \nu_\lambda (u_\lambda + RT) = \frac{\Delta_A \mathcal{U}_p}{RT^2} .$$

§ 3. — Quant à la formule fondamentale de M. N. Saha, on la tire de (12') en désignant par \mathcal{U}_0 la quantité d'énergie à fournir à la molécule-gramme pour en dissocier un atome; par γ_0 la chaleur spécifique du gaz neutre à pression constante; par γ_i et γ_e celles des produits de dissociation; cela permet d'écrire:

$$\Delta \mathcal{U}_p = \mathcal{U}_0 + (\gamma_i + \gamma_e - \gamma_0)T ;$$

et, en intégrant l'équation (12'):

$$\text{Log } K_p = - \frac{\mathcal{U}_0}{RT} + \frac{(\gamma_i + \gamma_e - \gamma_0)}{R} \log T + A_0 . \quad (13)$$

On trouve ainsi une formule plus précieuse que (9); et c'est de là que M. N. Saha est parti pour amorcer ses remarquables applications astronomiques. Les résultats qu'il en tire pour les températures stellaires absolues diffèrent quelque peu, en ce qui concerne les types spectraux F, G, K, M, des évaluations de M. Russell¹, et semblent un peu exagérés, comme le montre le tableau suivant:

Types d'étoiles	O _a	B ₀	B ₅	A ₀	F ₀	G ₀	K ₀	M
Résultats Saha . .	23000°	18000°	14000°	12000°	9000°	7000°	7000°	5000-4000°
Résultats Russell .	<i>id.</i>	18000°	14000°	11000°	7500°	5000°	4200°	3100-4000°

¹ *Nature*, vol. XCIII, 1914.

M. N. Saha écrit sa formule comme suit, avec $\gamma_i = \gamma_e = \gamma_0 = \frac{5R}{2}$ (gaz mono-atomiques), et les logarithmes vulgaires :

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{U_0}{4,571 T} + 2,5 \log T + A_0 M ,$$

où M est le module logarithmique; et il adopte pour la constante $A_0 M$ la valeur (— 6,5).

Récemment, en 1922¹, il a proposé une modification de cette formule par adjonction d'un nouveau terme au second membre, ce qui revient à diminuer un peu la valeur absolue de la constante.

§ 4. — La formule (13) résoud le problème (4^{bis}); on a en effet, les logarithmes employés étant les logarithmes naturels:

$$K_p = \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = T^{\frac{5}{2}} \cdot e^{\left(A_0 - \frac{U_0}{RT}\right)} ;$$

d'où:

$$\xi = \left[\frac{T^{\frac{5}{2}} e^{\left(A_0 - \frac{U_0}{RT}\right)}}{P + T^{\frac{5}{2}} e^{\left(A_0 - \frac{U_0}{RT}\right)}} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

On voit bien que $\xi < 1$; que ξ s'approche de 1 si P est faible, quelle que soit T; que ξ tend vers 1 si T augmente, quelle que soit P.

§ 5. — Reprenons la formule (13). Aux très hautes températures qui règnent dans les étoiles, on admet que les gaz sont à l'état mono-atomique, ce qui conduit à écrire:

$$\gamma_0 = \gamma_i = \gamma_e = \frac{5}{2} R ;$$

et l'on a:

$$\text{Log} \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{U_0}{RT} + \frac{5}{2} \text{Log} T + A_0 . \quad (15)$$

¹ *Philosophical Magazine*, 1922, p. 1128.

Tenons compte, enfin, des relations fondamentales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} Q.V = \text{énergie capable de dissocier un atome ;} \\ Q = \text{charge de 1 électron} = (1,591) \cdot 10^{-20} \text{ unités é.m. ;} \\ 1 \text{ volt} = 10^8 \text{ unités é.m. ;} \\ \text{nombre d'Avogadro} = (60,7) \cdot 10^{22} ; \\ R = \text{constante des gaz} = 1,99 \text{ calorie ;} \\ 1 \text{ calorie} = 4,18 \text{ joules ;} \\ 1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs .} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\mathcal{U}_0 = (96,5737) 10^{10} . V_0 ,$$

où V_0 est le potentiel d'ionisation, exprimé par le nombre de volts capable de provoquer l'explosion de l'atome. Puis :

$$R = (1,99) (4,18) \cdot 10^7 = (8,3122) 10^7 \text{ unités é.m. ;}$$

enfin :

$$\text{Log} \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{11609,6 V_0}{T} + \frac{5}{2} \text{Log} T + A_0 . \quad (16)$$

§ 6. — Il s'agit maintenant de trouver la valeur de la constante A_0 ; on a vu que, pour la constante de l'équation (14), M. N. Saha a adopté la valeur — 6,5.

La valeur absolue de cette dernière nous a semblé quelque peu exagérée; en tenant compte, en effet, de quelques renseignements expérimentaux relatifs au strontium, au calcium, au magnésium, à l'hélium¹, renseignements que nous avons portés dans l'équation (16), nous sommes arrivé à la valeur $A_0 = - 12,7$.

Et nous avons adopté la formule suivante :

$$\text{Log} \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{11609,6 V_0}{T} + \frac{5}{2} \text{Log} T - 12,7 ; \quad (17)$$

¹ Températures d'ionisation complète :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sr, } 8000^\circ - 9000^\circ, \text{ pression de } 10^{-1} \text{ atmosphère; Ca, } 9000^\circ \\ \quad - 10000^\circ, \text{ même pression;} \\ \text{Mg, } 14000^\circ, \text{ pression de 1 atmosphère; He, } 32000^\circ, \text{ pression} \\ \quad \text{de 1 atmosphère.} \end{array} \right.$$

en passant aux logarithmes vulgaires, elle devient :

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{5041,9 V_0}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,5 . \quad (18)$$

On voit que la constante $C = - 5,5$ du deuxième membre est, en valeur absolue, inférieure à celle utilisée par M. N. Saha.

Nous nous sommes proposé, dès lors, de chercher cette valeur $C = - 5,5$ par un calcul théorique.

§ 7. — L'équation de M. N. Saha :

$$\text{Log} \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{5041,9 V_0}{T} + \frac{5}{2} \text{Log} T + C$$

est, en somme, équivalente à la suivante :

$$S_i + S_e - S = \frac{Q}{T} , \quad (19)$$

et $\frac{Q}{T}$ est la somme algébrique des constantes d'entropie des constituants.

On a proposé, pour calculer cette constante dans le cas de l'ionisation, d'appliquer la formule que Nernst ¹ a donnée dans le cas de dissociation d'un gaz en deux autres gaz :

$$- 1,62 + 1,5 \log m ,$$

où m est la masse atomique; le résultat du calcul donne la valeur $- 6,5$; c'est la valeur adoptée par M. Saha.

Il semble qu'il y a quelque imprudence à employer cette expression, où l'on est conduit à poser $m = \frac{1}{1845}$ comme masse atomique d'un électron (les constantes relatives aux deux autres masses se détruisant); nous dirons plus loin pourquoi.

Pour l'instant, nous chercherons à déterminer la constante C de l'équation (18) en partant de la formule donnée par Gibbs pour la constante d'entropie. C étant égale à cette dernière

¹ W. NERNST. *Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes*, Halle, 1918.

changée de signe comme l'indique (19), on aura, suivant l'expression de Gibbs:

$$R \sum n_{\lambda} \text{Log } c_{\lambda} .$$

L'essentiel sera d'établir les valeurs des coefficients n_{λ} à utiliser dans le cas d'ionisation.

Pour cela considérons d'abord une molécule-gramme d'un gaz primitif, qu'on dissocie entièrement en deux gaz (il s'agit de gaz mono-atomiques); on obtient N atomes de chaque constituant, N étant le nombre d'Avogadro; on a donc:

$$n_i = n_e = 1 \quad \text{et} \quad n_0 = 0 .$$

Considérons d'autre part un gaz entièrement ionisé, et soit aussi N le nombre des atomes ionisés et le nombre des électrons libérés; on aura encore:

$$n_i = n_e = 1 \quad \text{et} \quad n_0 = 0 ,$$

de sorte que, dans les deux cas, l'expression $(R \sum n \text{Log } c)$ conduira à la même valeur numérique.

Mais il faut faire intervenir ici une différence essentielle entre le phénomène de dissociation d'un gaz en deux autres gaz (auquel était destinée la formule de Gibbs), et le phénomène d'ionisation des atomes.

Dans la supposition d'une simple dissociation chimique, la constante obtenue correspond à une molécule-gramme de gaz primitif; tandis que, dans le cas de l'ionisation, cette même constante correspond à N atomes neutres, c'est-à-dire à un atome-gramme de gaz primitif.

Si donc, dans le cas de l'ionisation, on veut la constante relative à une molécule-gramme de gaz neutre primitif, il faut doubler le résultat obtenu par l'expression de Gibbs; ou bien, si l'on veut, doubler les coefficients n_{λ} . On écrira donc, pour la constante cherchée:

$$C = 2R \sum n_{\lambda} \text{Log } c_{\lambda} = R \sum 2n_{\lambda} \text{Log } c_{\lambda} .$$

Comme $n_i = n_e = 1$, et que, d'autre part, les concentrations valent:

$$c_i = c_e = \frac{1}{2},$$

on obtient finalement:

$$C = (1,99) \cdot \left(4 \operatorname{Log} \frac{1}{2}\right) = 7,96 \operatorname{Log} \frac{1}{2};$$

$$C = \frac{(7,96) \log 0,5}{0,43429} = - \frac{(7,96)(0,30103)}{0,43429};$$

$$C = - 5,5171; \quad \text{soit} \quad C = - 5,52.$$

C'est la valeur même que nous avons trouvée en utilisant des renseignements expérimentaux.

On comprend maintenant pourquoi la formule de Nernst ne nous paraît pas convenir au problème actuel; elle s'applique au cas de simple séparation de deux gaz, et l'on ne peut pas y faire intervenir la différence fondamentale que nous venons de signaler entre le cas de simple dissociation chimique et le cas d'ionisation.

Remarque. — Un scrupule se présente ici. L'introduction du facteur 2 que nous venons de décider dans la formule de Gibbs, appliquée au phénomène d'ionisation, ne va-t-elle pas bouleverser les calculs du début et changer l'équation de M. N. Saha, puisque cette dernière vient de la formule de van t'Hoff, qui est elle-même un produit de la formule de Gibbs ?

Il n'en est rien. Car le doublement des coefficients n_λ dans la formule (6) entraîne celui des mêmes coefficients dans \mathcal{U} et S ; il en résulte immédiatement que l'équation fondamentale (8) n'est pas modifiée.

§ 8. — Quoi qu'il en soit, les résultats qu'on tire de la formule (18) sont satisfaisants; c'est elle qui a permis de construire les tableaux suivants, pour lesquels nous utilisons les potentiels d'ionisation connus expérimentalement:

{	Sodium	5,11	volts
	Strontium	5,67	»
	Calcium	6,08	»
	Magnésium	7,65	»
	Hydrogène	13,54	»
	Hélium	25,20	»

Il convient de remarquer que, si l'on peut affirmer que les raies d'étincelle dans le spectre correspondent à une ionisation des atomes d'un gaz, il y a encore quelque incertitude pour apprécier la valeur de ξ nécessaire à la présence de telle ou telle raie renforcée.

TABLEAUX I

VALEURS DE ξ EN %

a) *Calcium*; $V_0 = 6,08$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{30654,75}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
3000	0	0,1	0,4	1	4
4000	1	3	8	25,5	64
5000	6	20	53,5	94	99
6000	25	64	93	99	100
7000	59	92	99	100	100
8000	85	98	100	100	100
9000	95	99	100	100	100
10000	98	100	100	100	100

b) *Sodium*; $V_0 = 5,11$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{25764,11}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
2500	0	0	0	1	2
3000	0	1	2	6	20
4000	3	10	32	73	96
5000	19	53	90	99	100
6000	55	90	99	100	100
7000	85	98	100	100	100
8000	96	99,5	100	100	100
9000	99	100	100	100	100
10000	100	100	100	100	100

c) *Strontium*; $V_0 = 5,67$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{28587,58}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
3000	0	0	1	2	7
4000	1,5	5	15	43	83
5000	10	31	72	96	100
6000	36	78	92	100	100
7000	72	96	99	100	100
8000	91	99	100	100	100
9000	97	100	100	100	100
10000	99	100	100	100	100

d) *Magnésium*; $V_0 = 7,65$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{38570,54}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
4000	0	0	1	3	8,5
5000	1	3	10	31	72
6000	6	18	50	87	99
7000	20	53	89	99	100
8000	46	86	98	100	100
9000	75	96	100	100	100
10000	90	99	100	100	100
11000	96	100	100	100	100
12000	98	100	100	100	100

e) *Hydrogène*; $V_0 = 13,54$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{68267,326}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
5000	0	0	0	0	0
5500	0	0	0	0	1
6000	0	0	0	1	2
7000	0	0,5	1,5	5	15
8000	1	2	7	22	59
9000	2,5	8	24	63	93
10000	7	21	57	91	99
11000	16	45	84	98	100
12000	30	71	95	100	100
13000	50	88	99	100	100
14000	70	95	100	100	100
15000	84	98	100	100	100
16000	92	100	100	100	100
17000	96	100	100	100	100

f) *Hélium*; $V_0 = 25,2$.

$$\log \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} P = - \frac{127055,88}{T} + \frac{5}{2} \log T - 5,52$$

Températures	Pressions				
	1 atm.	0,1	0,01	0,001	0,0001
10000	0	0	0	0	1
11000	0	0	0	1	3
12000	0	0	1	4	11
13000	0	1	3	10	31
14000	1	2	8	24	62
16000	3	11	32	73	97
18000	11	33	74	96	100
20000	27	66	94	99	100
22000	53	89	99	100	100
24000	77	97	100	100	100
25000	85	98	100	100	100
26000	90	99	100	100	100
27000	94	100	100	100	100

§ 9. — Que peut-on déduire de ces tableaux ?

Il est évident qu'on ignore les pressions exactes qui règnent dans les couches renversantes stellaires. On peut cependant avoir des indications précieuses en interrogeant les résultats plus précis relatifs à notre soleil. On s'accorde actuellement pour attribuer à la couche renversante de celui-ci une température de 6000° environ. On sait, d'autre part, que les raies H et K du calcium sont intenses dans le spectre solaire; or, ce sont des raies « renforcées »; cela s'explique; car, à 6000°, beaucoup d'atomes de calcium sont ionisés; comme les raies d'arc du calcium sont absentes, on en déduit que le degré d'ionisation est très fort; il ne reste presque plus d'atomes neutres, capables d'émettre ou d'absorber des raies d'arc; l'ionisation doit donc être voisine de 90 ou 100 %. L'examen du tableau (a) du calcium indique une pression de l'ordre de $\frac{1}{100}$ d'atmosphère. On peut donc admettre que, pour les autres soleils, la pression régnante est du même ordre; elle doit être plus faible encore dans certaines étoiles très chaudes, plus fortes dans certaines étoiles rouges. Adoptons donc cette pression de $\frac{1}{100}$ d'atmosphère comme pression moyenne probable.

En étudiant les différents types de spectres, et en s'aidant des tableaux du § 8, on établit les renseignements suivants (voir tableau II page suivante):

Les résultats que nous obtenons ainsi concordent très bien avec ceux établis par M. W. Russell¹. Ils concordent aussi avec les résultats de M. N. Saha pour les classes O, B et même A; et avec les mesures de MM. Wilsing et Scheiner² pour les classes F à M.

Il est évident qu'ils ne peuvent être acceptés que dans la mesure où la pression moyenne adoptée et la constante C de la formule fondamentale peuvent l'être.

¹ *Nature*, vol. XCIII, 1914.

² OBSERVATORIUM ZU POTSDAM, *Publikationen*, 1919.

TABLEAU II

Types des étoiles	Caractères essentiels du spectre	Ionisation	Température
M	Bandes d'absorption correspondant à des combinaisons chimiques; apparition de la raie K du calcium.	Début de l'ionisation du calcium.	3000° à 3500°
K	Les raies des métaux dominant: Na, Mg, Fe, etc. Pas de raies de H.	Ionisation avancée du Ca; très avancée du Na; début de l'ionisation de Mg.	3500° à 4500°
G	Raies H et K du Calcium prépondérantes; les métaux sont un peu plus effacés; les raies d'H apparaissent.	Ca très fortement ionisé. Ionisation avancée de Mg et des métaux. Pas de raies d'étincelle de H.	5000° à 6000°
F	Les raies du Ca diminuent; les raies de H augmentent.	Ca entièrement ionisé, ou presque. Ionisation sensible de H.	7000° à 8000°
A	Raies d'H très larges et noires. Encore quelques rares raies d'étincelle des métaux. Pas de raies d'He.	Métaux complètement ionisés, ou presque. H fortement ionisé.	9000° à 11000°
B ₉₋₅	Hydrogène faible; raies d'He. Métaux à peine visibles.	H presque complètement ionisé. Début de l'ionisation de He.	12000° à 13000°
B ₀	Hydrogène très faible. Hélium, raies d'étincelle.	H complètement ionisé. He fortement ionisé.	18000°
O _{b-c}	Disparition de la raie K de Ca.	He très fortement ionisé.	20000° à 21000°
O _a	Disparition de la raie 4471 He. Disparition des raies de Balmer H.	He complètement ionisé.	23000° à 24000°
P	Raies spéciales brillantes (nébuleuses).		Températures > 25000°