Sur la stratification des planètes au voisinage de leur centre

Autor(en): **Wavre, Rolin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740873

SUR

LA STRATIFICATION DES PLANÈTES

AU VOISINAGE DE LEUR CENTRE

PAR

Rolin WAVRE

---

§ 1. *Introduction.*

Cette étude est d'ordre strictement mathématique et le mot *planète* est ici une abrévation désignant une masse fluide hétérogène en rotation sur elle-même, les différentes particules du fluide s'attirant suivant la loi de Newton. Dans quelle mesure les résultats obtenus s'appliquent-ils aux corps célestes tels que les étoiles, le Soleil, Saturne, Jupiter... ? c'est ce qui ne sera pas recherché. Seul l'essentiel des démonstrations sera transcrit dans ces pages et cet article serait trois fois plus long si toutes les propositions auxiliaires qui lui servent d'arcs-boutants étaient reproduites.

* * *

Il convient de distinguer trois espèces de mouvements d'une planète autour de son axe polaire.

Mouvements de première espèce. — La planète tourne comme solidifiée, c'est-à-dire d'un bloc. Elle se trouve alors en équilibre relatif.

Mouvements de deuxième espèce. — Les surfaces d'égale densité ρ et d'égale pression p coïncident. Il existe alors une relation de la forme $\rho = f(p)$.

Mouvements de troisième espèce. — Les surfaces d'égale densité et d'égale pression ne coïncident plus nécessairement. M. Dive vient d'ouvrir un champ de recherches nouvelles en donnant les conditions de possibilité de ces mouvements très généraux; ils contiennent comme cas particulier ceux de seconde espèce, lesquels à leur tour contiennent les équilibres relatifs comme cas très spécial. Les résultats obtenus par d'autres auteurs se rapportent principalement aux mouvements de première espèce.

M. Volterra a obtenu, dans une étude d'un grand intérêt mathématique, le résultat suivant:

Une stratification[1] de la masse en ellipsoïdes homothétiques est impossible dans l'équilibre relatif.

M. Véronnet a montré qu'il n'existe aucune stratification ellipsoïdale pour les mouvements de première espèce.

On sait que Clairaut n'a établi la possibilité d'une stratification en ellipsoïdes que par un calcul approximatif.

En ce qui concerne les mouvements de deuxième espèce, rappelons que M. Dive, partant d'une remarque de notre dernier article[2], a fait connaître ce beau théorème: *une stratification ellipsoïdale est encore impossible pour tout mouvement de deuxième espèce*[3].

Ces mouvements à équation $\rho = f(p)$ font seuls l'objet de cette étude; nous montrerons qu'*une stratification en surfaces homothétiques est impossible.* Résultat qui complète celui de M. Volterra, négatif encore, mais fondé sur le théorème de M. Dive et sur la proposition positive suivante, dont la démonstration très laborieuse occupe presque tout cet article:

Les surfaces d'égale densité tendent à prendre la forme ellipsoïdale quand elles se rapprochent du centre.

§ 2. *Les mouvements de deuxième espèce.*

La planète étant stratifiée en couches de révolution, autour de l'axe de rotation Oz, ce dernier est axe de symétrie pour tous

[1] Stratification signifie répartition des couches d'égale densité.

[2] Sur les mouvements internes et la stratification des corps célestes, *Archives* (5), p. 330 (1926).

[3] *C. R.*, 184, p. 371 (1927).

les éléments cinématiques ou dynamiques de notre problème. Ainsi, la densité ρ, la pression p, la vitesse angulaire ω et le potentiel U du champ d'attraction ne dépendent que de z et de la distance x^2+y^2 d'un parallèle à l'axe, mais la longitude n'intervient évidemment pas. Le fluide étant supposé parfait, les équations de l'hydrodynamique qui régissent le mouvement peuvent s'écrire sous la forme:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = P_x \qquad\qquad P_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = P_y \quad (1) \qquad\qquad P_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = P_z \qquad\qquad P_z = \frac{\partial U}{\partial z} .$$

Les quantités P_x, P_y, P_z sont les composantes du champ de la pesanteur qui résulte du champ de Newton:

$$\frac{\partial U}{\partial x} , \quad \frac{\partial U}{\partial y} , \quad \frac{\partial U}{\partial z} ,$$

et de l'accélération de composante:

$$-\omega^2 x , \quad -\omega^2 y , \quad 0 .$$

Les équations (1) impliquent la relation:

$$dp = \rho(P_x dx + P_y dy + P_z dz) . \qquad (3)$$

La densité est facteur intégrant et le champ de la pesanteur est normal, en chaque point, à la surface d'égale pression.

Il est facile d'apercevoir que l'une quelconque des cinq propositions suivantes implique les quatre autres et définit à elle seule les mouvements de deuxième espèce:

I. Les surfaces d'égale densité et d'égale pression coïncident: $\rho = f(p)$.
II. Les surfaces d'égale densité sont normales à la pesanteur.
III. La vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe.
IV. Il existe un potentiel — Q des accélérations:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \omega^2 x , \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \omega^2 y , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 .$$

V. Il existe un potentiel P de la pesanteur:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = P_x\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = P_y\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = P_z\,.$$

Quoique nous ne voulions pas entrer ici dans des considérations physiques et astronomiques, disons que les mouvements de deuxième espèce ont lieu notamment dans chacune des circonstances suivantes:

La planète tourne d'un bloc, $\omega = c$. C'est le cas spécial des mouvements de première espèce.

La planète est formée d'un même liquide compressible.

Elle est formée d'une superposition d'un nombre fini de liquides compressibles.

La planète est dans l'état limite de l'état précédent, le nombre des couches compressibles ayant augmenté indéfiniment.

Nous n'avons pas parlé de la température. Elle peut varier avec la profondeur, pourvu que les surfaces d'égale densité et d'égale pression soient aussi des surfaces isothermes.

§ 3. *L'équation intégrale du problème.*

Dans l'article précédent et dans une note à l'Académie des Sciences[1], le problème des mouvements de deuxième espèce a été ramené à une équation intégrale en considérant la masse hétérogène comme une superposition de masses homogènes. Dans le cas où la densité à la surface extérieure n'est pas nulle, cette équation s'écrit:

$$\omega^2\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right) = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho' \iint_{S_{\rho'}} \frac{\cos(d\,,\,n')}{r}\,dS + \rho_0 \iint_{S_0} \frac{\cos(d\,,\,n')}{r}\,dS\,. \qquad (4)$$

On convient d'affecter d'un accent prime tout ce qui a trait aux variables d'intégration et d'un indice 0 ce qui a trait à la

[1] *C. R.* 184, p. 739 (1927).

surface extérieure; ρ_0 est la densité à l'extérieur, ρ_1 la densité maximum au centre, d est la direction d'un déplacement ds (dx, dy, dz) tangent au méridien de la surface $S\rho$ de densité ρ, n' est la direction de la normale à la surface $S\rho'$ de densité ρ'. L'équation (4) devra être satisfaite pour tout déplacement ds suivant un méridien d'une surface d'égale densité. Pour symboliser l'opération consistant à faire la somme d'une intégration en ρ' et du produit par ρ_0 d'une expression prise sur la surface extérieure, introduisons l'opérateur:

$$F = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho' + \rho_0 ,$$

et l'équation (4) s'écrira:

$$\omega^2\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right) = F\iint_{S\rho'} \frac{\cos(d, n')}{r}\, dS \qquad (4')$$

Dans l'article rappelé, l'équation (4′) est apparue comme une équation de Fredholm de première espèce, mais ce n'est pas à ce point de vue que nous l'étudierons ici.

§ 4. *Hypothèse sur la stratification, énoncé rigoureux des deux résultats.*

Il est certaines hypothèses qu'il serait ridicule de ne pas faire dans notre problème; c'est ainsi que les surfaces d'égale densité seront supposées avoir un plan tangent qui varie d'une manière continue. Il en est d'autres que nous faisons mais qui, au terme de cette étude, ne paraîtront plus aussi indispensables qu'il semble au début. Nous désignerons par θ la latitude géocentrique, l'équation de la méridienne de la surface de densité ρ sera $R = R(\rho, \theta)$. Ces notations introduites, voici les hypothèses:

a) Les surfaces d'égale densité admettent un même plan de symétrie droite ou plan équatorial.

b) La tangente aux méridiennes n'est parallèle ou perpendiculaire à l'axe de rotation qu'aux pôles et à l'équateur.

c) La densité croît de l'extérieur au centre. La dérivée:

$$\frac{\partial R(\rho, \theta)}{\partial \rho}$$

sera continue en ρ pour toutes les valeurs de ρ sauf peut-être pour la densité maximum $\rho = \rho_1$. Cette dérivée, qui est toujours négative, sera inférieure à un nombre $-i$ négatif:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} < -i < 0 .$$

d) La dérivée:

$$\frac{\partial R(\rho, \theta)}{\partial \theta}$$

est continue, sauf pour $\rho = \rho_1$, elle est en valeur absolue inférieure à une constante:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial \theta}\right| < N .$$

e) La dérivée seconde:

$$\frac{\partial^2 R(\rho_0, \theta)}{\partial \theta^2}$$

existe et est continue au voisinage du pôle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et de l'équateur $\theta = 0$ sur la surface extérieure.

L'hypothèse *e*) peut être remplacée par la suivante :

e') Le rapport:

$$\delta(\rho_0, \theta) = \frac{\sin\theta \dfrac{\partial R_0 \sin\theta}{\partial \theta}}{\cos\theta \dfrac{\partial R_0 \cos\theta}{\partial \theta}}$$

est continu et toujours négatif sur la surface extérieure.

Cette dernière hypothèse ne suppose pas l'existence de la dérivée seconde.

Dans ces conditions, les surfaces d'égale densité tendent vers un ellipsoïde infiniment petit, dont le rapport des axes est un nombre fini non nul, quand elles se rapprochent du centre.

Des surfaces homothétiques ne peuvent tendre vers la forme ellipsoïdale sans être des ellipsoïdes; or une stratification en ellipsoïde est impossible. Il faut en conclure:

Dans les mêmes conditions que précédemment, une stratification en surfaces homothétiques est impossible.

Les hypothèses faites sont extrêmement larges pour des surfaces homothétiques. Ces dernières ont, en effet, une équation de la forme:

$$R(\rho, \theta) = g(\rho) h(\theta) ,$$

et les hypothèses *c*), *d*), *e*) sont satisfaites si les dérivées suivantes existent et sont continues:

$$\frac{dg}{d\rho}, \quad \frac{dh}{d\theta}, \quad \frac{d^2 h}{d\theta^2},$$

la première étant négative sur tout l'intervalle $\rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1$.

§ 5. *Remarque sur les hypothèses b) et d).*

Les surfaces d'égale densité s'approchent du centre autant qu'on veut, lorsque ρ tend vers ρ_1. Elles tendent vers l'origine dans toutes leurs parties, car, dans le cas contraire, l'hypothèse *b*) exigerait qu'elles s'aplatissent soit contre un cercle du plan équatorial, soit contre un segment de l'axe de rotation, soit contre ces deux figures à la fois. Mais alors, les variations de R rapportées aux variations de θ croîtraient au-delà de toute limite lorsque ρ tend vers ρ_1. Mais cette circonstance est exclue par l'hypothèse *d*). Ainsi, R tend vers zéro quand ρ tend vers ρ_1, et cela quelle que soit la latitude θ:

$$\lim_{\rho \to \rho_1} R(\rho, \theta) = 0 .$$

Le centre joue dans notre problème un rôle très particulier. C'est en ce point que les dérivées premières de R peuvent cesser d'être définies, et il convient de désigner d'un nom: *masse ouverte*, par exemple, la masse fluide dont le centre est retranché.

§ 6. *Sur le droit à intégrer terme à terme un certain développement de l'inverse de la distance.*

Dans la recherche des figures d'équilibre d'une masse homogène, on fait usage de développements de l'inverse de la distance en polynomes de Legendre, en fonctions sphériques et en fonctions de Lamé. Ici, nous développerons simplement la distance de deux points P et P′ en série de puissances du cosinus de l'angle i des deux rayons vecteurs. Soient θ la latitude, φ la longitude et R le rayon vecteur. Le carré de la distance des deux points $P(R, \theta, \varphi)$, $P'(R', \theta', \varphi')$ est:

$$r^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos i \;;$$

avec les notations abrégées:

$$R_X = \frac{2RR'}{R^2 + R'^2}\,, \qquad Y_{2p} = \frac{(2p-1)\,!!}{(2p)\,!!}\,,$$

$$(2p-1)\,!! = 1.3.5. \ldots .(2p-1)$$
$$(2p)\,!! = 2.4.6. \ldots .2p\,,$$

le développement s'écrit:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(R^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p}\, R_X^p \cos^p i\,. \tag{5}$$

On conviendra de remplacer (0) !! et (— 1) !! par l'unité lorsque ces expressions se présenteront. Considérons alors la série:

$$\sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p}\, R_X^p \cos^p i\,, \tag{6}$$

et remarquons que la fonction R_X est positive et inférieure à l'unité, à moins que les deux rayons R et R′ ne soient égaux, $R = R'$. La série (6) admet la série majorante:

$$\sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \,|\cos^p i\,|\,.$$

Celle-ci peut être considérée comme prise sur une sphère Σ de rayon quelconque sur laquelle se trouveraient P et P'. L'intégrale :

$$\iint_{\Sigma} \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \,|\cos^p i\,|\, d\Sigma\,, \tag{7}$$

ainsi que chacune des intégrales des termes de la série, sont indépendantes des coordonnées θ et φ du point P. De sorte que l'on peut supposer $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$, ce qui revient à faire une simple rotation d'axe. L'intégrale (7) devient :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta' \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p}\,|\sin^p\theta'\,|\cos\theta' = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \sin^p\theta' \cos\theta'\,.$$

Envisageons la série :

$$\Theta(\theta') = \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \sin^p\theta' \cos\theta'\,, \tag{8}$$

elle converge pour toute valeur $0 \leqq \theta' \leqq \frac{\pi}{2}$ et tous ses termes sont positifs. On vérifierait :

1° que la série (8) représente une fonction continue sur l'intervalle :

$$0 \leqq \theta' < \frac{\pi}{2}\,, \qquad \left(\text{on a} \quad \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta' \to \frac{\pi}{2}} \Theta(\theta') = \sqrt{2}\right)\,;$$

2° que les sommes partielles des n premiers termes représentent des fonctions continues et bornées;

3° que la série (8) n'est pas uniformément convergente.

Ces deux derniers points résultent immédiatement du premier.

Le théorème classique sur l'intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonction continue ne s'appliquerait qu'à l'intervalle $0 \leqq \theta' \leqq \theta''$, θ'' étant une valeur d'ailleurs quelconque, mais inférieure à $\frac{\pi}{2}$. On en déduirait le droit à intégrer terme à terme sur l'intervalle total. Mais il est plus simple d'invoquer le théorème sur l'intégration des fonctions limites de M. Lebesgue, qui assure le droit à intégrer terme à terme lorsque les circonstances telles que: 1° et 2° ont lieu. On a donc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta(\theta')\, d\theta' = \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \theta' \cos\theta'\, d\theta' = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{Y_{2p}}{p+1} \,.$$

La formule de Wallis:

$$\pi = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{Y_{2p}}\right)^2$$

montre que le terme Y_{2p} tend vers zéro comme $p^{-\frac{1}{2}}$. L'intégrale (7) peut donc être calculée terme à terme, quoique la série sous le signe somme soit divergente, et la série des intégrales de chaque terme admet une majorante de la forme:

$$M \sum_{p=0}^{\infty} p^{-\frac{3}{2}} \,. \tag{9}$$

Considérons maintenant une suite de fonctions:

$$u_p(R,\, \theta,\, \varphi,\, R',\, \theta',\, \varphi') \,, \tag{10}$$

continues lorsque les points P et P′ sont dans un certain domaine D, et supposons que l'on ait, quel que soit l'indice p et les points P et P′ dans D:

$$|u_p| < N \,, \tag{11}$$

N désignant une constante.

La série:

$$\sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p}\, u_p \sin^p \theta' \cos\theta' \tag{12}$$

jouit comme la série (8) des propriétés suivantes:

1° Elle représente une fonction continue et en valeur absolue, bornée supérieurement sur l'intervalle $0 \leqq \theta' < \frac{\pi}{2}$.

2° Les sommes des n premiers termes sont continues et en valeur absolue inférieures à une constante, quel que soit n. On pourra donc encore intégrer cette série terme à terme en θ'. La série des intégrales sera de la forme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} V_n(R, \theta, \varphi, R', \varphi') \tag{13}$$

et admettra la majorante :

$$MN \sum_{p=0}^{\infty} p^{-\frac{3}{2}} .$$

Les fonctions V_p sont continues dans le domaine D, de sorte que la série est uniformément convergente et pourra être intégrée en φ' et R', si besoin est, terme à terme, d'après le théorème classique. Le résultat final sera indépendant de l'ordre des intégrations, de sorte que l'on pourra faire tout d'abord l'intégration en φ' ou en R', quoique l'une de ces intégrations puisse être illégitime quand on la fait seule.

Envisageons maintenant une surface fermée S contenant l'origine et soit P' un point de cette surface $R' = R'(\theta', \varphi')$. Supposons que l'élément d'aire dS et l'angle solide $d\Sigma$ qu'il détermine soient tels que l'on ait :

$$dS = R'\Psi(\theta', \varphi')\, d\Sigma ,$$

la fonction Ψ étant continue. Cette hypothèse est en particulier satisfaite si la normale à la surface S varie d'une manière continue et ne fait jamais un angle droit avec le rayon vecteur. Soit en plus $\mu(P, P')$ une fonction continue des deux points P et P' lorsque ceux-ci sont dans un domaine D contenant la surface S.

L'intégrale :

$$V(P) = \iint_S \frac{\mu(P, P')}{r}\, dS$$

est une fonction des coordonnées x, y, z du point P.

Développons l'inverse de la distance comme précédemment et remplaçons dS par sa valeur; il faudra calculer l'intégrale sur la sphère Σ de rayon unité:

$$V(P) = \iint_{\Sigma} \mu(P, P') \frac{R'}{(R^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} \Psi(\theta', \varphi') \left(\sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} R_X^p \cos^p i \right) d\Sigma.$$

Pour l'intégration, faisons à nouveau passer l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$ par le point P, cela n'altérera aucune des intégrales des termes de la série. Remplaçons $d\Sigma$ par:

$$d\Sigma = \cos\theta' \, d\theta' \, d\varphi' ,$$

et remarquons que les fonctions:

$$\mu(P, P') \frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2}} R_X^p \Psi(\theta', \varphi')$$

jouissent des propriétés requises précédemment pour les fonctions u_p, on a $\cos i = \sin \theta'$ et l'intégration en θ' peut encore s'effectuer terme à terme, puis on pourra intégrer en φ'. Le résultat est pour chaque terme une fonction $Vp(P)$ indépendante du changement d'axe fait tout à l'heure. En résumé, on peut écrire:

$$\iint_{S} \frac{\mu(P, P')}{r} dS = \sum_{p=0}^{\infty} Y_{2p} \iint_{S} \frac{\mu(P, P')}{(R^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} R_X^p \cos^p i \, dS ,$$

et cette dernière série admet une majorante de la forme (9).

§ 7. *Sur le développement en série de la vitesse angulaire.*

Revenons à la planète et à l'équation (4') du § 3. En coordonnées polaires, elle s'écrit:

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial R^2 \cos^2\theta}{\partial\theta} = F \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{D_1 - D_2}{r} R' \cos\theta' \, d\theta' , \quad (14)$$

$$D_1 = \frac{\partial R \sin\theta}{\partial\theta} \frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial\theta'} , \quad D_2 = \frac{\partial R \cos\theta}{\partial\theta} \frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial\theta'} \cos(\varphi' - \varphi) .$$

Développons $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de $\cos i$. Chaque terme de la série (6) est à multiplier par la fonction continue et bornée dans la masse ouverte qui va jouer le rôle du domaine D:

$$\frac{R'}{(R^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}} (D_1 - D_2) .$$

L'intégration terme à terme en θ', φ', ρ' dans un ordre quelconque est légitime.

Mais pour isoler ω^2 il faut diviser la série intégrée par les deux facteurs $R \cos \theta$ et $\frac{\partial R \cos \theta}{\partial \theta}$ dont le premier est nul pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le second pour $\theta = 0$. Nous allons faire voir que la série intégrée et divisée par ce double facteur est absolument et uniformément convergente, que ses termes sont continus dans la masse ouverte et qu'elle admet encore une majorante de la forme:

$$M \sum_{p=1}^{\infty} p^{-\frac{3}{2}} ,$$

ce qui ne résulte pas directement du raisonnement du paragraphe précédent, puisque l'ancienne série est divisée par des termes qui peuvent être nuls. En invoquant l'hypothèse *a*), on aperçoit que la fonction D_1 est impaire en θ', la fonction D_2 paire en θ'; puis en tenant compte de ces propriétés et du fait que les puissances impaires de *cos* $(\varphi' - \varphi)$ disparaissent dans l'intégration en φ', on peut mettre en évidence les deux facteurs:

$$\frac{\partial R^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R^2 \cos^2 \theta}{\partial \theta} .$$

L'équation (14) devient:

$$\frac{\omega^2(\rho, \theta)}{8\pi} \frac{\partial R^2 \cos^2 \theta}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k(\rho, \theta) \frac{\partial R^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} - B_k(\rho, \theta) \frac{\partial R^2 \cos^2 \theta}{\partial \theta} \right];$$

les fonctions A_k et B_k sont définies par les équations suivantes :

$$A_k(\rho, \theta) = Y_{4k-2}\alpha_k(\rho, \theta), \qquad B_k(\rho, \theta) = Y_{4k-2}\beta_k(\rho, \theta),$$

$$\alpha_k(\rho, \theta) = F\int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\alpha} G_k \frac{1}{R'} \left|\frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial \theta'}\right| d\theta', \tag{15}$$

$$\beta_k(\rho, \theta) = F\int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\beta} G_k \frac{1}{R'} \left|\frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial \theta'}\right| d\theta', \tag{16}$$

$$G_k(\rho, \theta, \rho', \theta') = \frac{R'^3}{(R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} R_X^{2k-2} = G_k(R, R'),$$

les H_k^{α} et H_k^{β} sont des polynomes en $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$, résultant de l'intégration de $\cos i$ en φ. Les fonctions G_k sont positives et au plus égales à l'unité.

§ 8. *Recherche de majorantes des termes:*

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots; \beta_2, \beta_3, \ldots$

Dans l'opérateur F des seconds membres des expressions α_k et β_k, envisageons séparément: 1° le terme en ρ_0 et 2° le terme provenant de l'intégration en ρ'.

1° *Le facteur de* ρ_0. L'existence et la continuité de la dérivée:

$$\frac{\partial^2 R(\rho_0, \theta)}{\partial \theta^2}$$

au voisinage des valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ implique les relations:

$$\left|\frac{\partial R_0' \sin\theta'}{\partial \theta'}\right| < a_1 \cos\theta', \qquad \left|\frac{\partial R_0' \cos\theta'}{\partial \theta'}\right| < a_2 \sin\theta', \tag{17}$$

a_1 et a_2 désignant deux constantes positives dont la plus grande sera représentée par a.

Les termes en ρ_0 dans α_k et β_k sont majorés par les expressions suivantes où R_0^i représente le minimum de R_0, nombre positif:

$$\frac{a_1 \rho_0}{R_0^i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\alpha} \sin\theta' \, d\theta' \,, \qquad \frac{a_2 \rho_0}{R_0^i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\beta} \cos\theta' \, d\theta' \,. \tag{18}$$

Les deux intégrales précédentes sont respectivement:

$$\frac{1}{2k+1} \sum_{n=1}^{k} \frac{(2k-2)\,!!}{(2k-2n)\,!!\,(2n-2)\,!!} \sin^{2k-2n}\theta \cos^{2n-2}\theta \,,$$

$$\frac{1}{2k+1} \sum_{n=1}^{k} \frac{(2k-2)\,!!}{(2k-2n)\,!!\,(2n)\,!!} \sin^{2k-2n}\theta \cos^{2n-2}\theta \,,$$

en convenant toujours de remplacer le symbole (0)!! par l'unité lorsqu'il se présente.

Des inégalités immédiates:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p(\theta' - \theta)\, d\theta' < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\left(\theta' - \frac{\pi}{4}\right) d\theta' < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p \theta' \, d\theta' \,,$$

on déduit la suivante:

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{p\,!!}{(p-n)\,!!\,n\,!!} \sin^{p-n}\theta \cos^n\theta < \pi \,,$$

et de cette dernière on infère que les majorantes (18) sont inférieures à:

$$\frac{a \rho_0}{R_0^i} \quad \frac{\pi}{2k+1} \,. \tag{19}$$

2° *L'intégration en ρ'*. Les inégalités (17) ne peuvent plus être invoquées, car nous ne supposons pas l'existence de la dérivée seconde sur toute surface $S\rho'$. Les intégrales en θ', qui vont remplacer les intégrales (18) sont simplement:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\alpha}\, d\theta' \,, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_k^{\beta}\, d\theta' \,,$$

elles admettent la majorante:

$$\frac{\pi}{2k} \frac{1}{Y_{2k-1}} \,, \tag{20}$$

c'est-à-dire qu'elles tendent vers zéro comme $K^{-\frac{1}{2}}$ et non plus K^{-1}.

L'intégration en θ' ne paraît plus assurer à elle seule la convergence, mais l'intégration en ρ' va la rétablir. Posons, en effet:

$$D_k(\rho, \theta, \theta') = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{1}{R'} G_k\, d\rho' \,,$$

et faisons le changement de variable:

$$R(\rho', \theta') = R(\rho, \theta)\, u \,, \qquad \frac{\partial R'}{\partial \rho'} d\rho' = R du \,.$$

L'intégrale devient en posant encore:

$$U_0 = \frac{R(\rho_0, \theta')}{R(\rho, \theta)} \,, \qquad U_1 = \frac{R(\rho_1, \theta')}{R(\rho, \theta)} \,,$$

$$D_k(\rho, \theta, \theta') = \int_{U_0}^{U_1} \frac{1}{\frac{\partial R'}{\partial \rho'}} \frac{2^{2k-2} u^{2k}}{(1+u^2)^{2k-\frac{1}{2}}} du \,.$$

Les deux nombres U_0 et U_1 sont positifs, on majorera l'intégrale en la prenant de 0 à $+\infty$ et en remplaçant d'autre part l'expression $\left|\frac{\partial R'}{\partial \rho'}\right|$ par la constante i qui lui est toujours inférieure, en vertu de l'hypothèse c).

On aura, quels que soient les arguments θ et θ' et la valeur de ρ:

$$D_k(\rho, \theta, \theta') < \frac{2^{2k-2}}{i} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2k}}{(1+u^2)^{2k-\frac{1}{2}}} du ,$$

et cette dernière expression est égale à:

$$\frac{1}{i} \frac{2k-1}{2k-2} Y_{4k-3} . \tag{21}$$

Soit encore R_0^a le maximum du rayon R_0. En vertu de l'hypothèse c) on peut écrire:

$$\left| \frac{\partial R' \cos \theta'}{\partial \theta'} \right| < N + R_0^a , \quad \left| \frac{\partial R' \sin \theta'}{\partial \theta'} \right| < N + R_0^a .$$

D'autre part, l'inégalité formelle:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |H(\theta, \theta')| \, d\theta' \int_{\rho_0}^{\rho_1} |J(\theta, \theta', \rho, \rho')| \, d\rho'$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H(\theta, \theta')| \, d\theta' \times \underset{\text{quels que soient } \rho,\, \theta,\, \theta'}{\text{maximum de}} \int_{\rho_0}^{\rho_1} |J(\theta, \theta', \rho, \rho')| \, d\rho'$$

permet d'affirmer, en vertu des majorantes (20) et (21), que les expressions qui proviennent de l'intégration en ρ' sont inférieures à:

$$\frac{\pi}{i}(N + R_0^a) \frac{1}{2k} \frac{2k-1}{2k-2} \frac{Y_{4k-3}}{Y_{2k-1}} ,$$

quantité qui tend vers zéro de nouveau, comme K^{-1}.

En résumé, les termes α_k et β_k tendent vers zéro comme K^{-1} et les termes A_k et B_k comme $K^{-\frac{3}{2}}$.

Les séries:

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k(\rho, \theta) , \quad \sum_{k=2}^{\infty} B_k(\rho, \theta) , \tag{22}$$

admettent donc une série majorante:

$$M \sum_{k=1}^{\infty} K^{-\frac{3}{2}} ,$$

On se rend compte aisément que l'hypothèse *d*) implique la continuité des fonctions A_2, A_3, ..., B_2, B_3, ... dans la masse ouverte ($R > 0$). Les séries (22) représentent en conséquence des fonctions continues positives et bornées supérieurement dans la masse ouverte.

§ 9. *Etude des premiers termes α_1 et β_1 des développements.*

Les termes α_1 et β_1 laissés de côté jusqu'ici ont les valeurs suivantes:

$$\alpha_1(R) = - F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta' \cos\theta' \frac{R'^3}{(R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{R'} \frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial\theta'} d\theta' ,$$

$$\beta_1(R) = \frac{1}{2} F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta' \frac{R'^3}{(R^2 + R'^3)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{R'} \frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial\theta'} d\theta' .$$

Soit ψ l'angle que fait la tangente à la méridienne avec le rayon vecteur. Cet angle donne lieu aux inégalités:

$$\frac{\pi}{2} < \psi + \theta < \pi , \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} , \tag{23}$$

qui expriment que dans le premier quadrant la tangente a une direction $\psi + \theta$ qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe de rotation.

La formule élémentaire:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial\theta} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi}$$

donne:

$$\frac{1}{R'} \frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial\theta'} = \frac{\cos(\psi + \theta')}{\sin\psi} ; \qquad \frac{1}{R'} \frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial\theta'} = \frac{\sin(\psi + \theta')}{\sin\psi} ,$$

et les relations (23) impliquent les suivantes:

$$\left|\frac{\cos(\psi+\theta')}{\sin\psi}\sin\theta'\right| \leqq \sqrt{2} \qquad \left|\frac{\sin(\psi+\theta')}{\sin\psi}\cos\theta'\right| \leqq 1 .$$

Les termes α_1 et β_1 ont donc un sens et sont continus dans la masse ouverte. Lorsque R tend vers zéro, ils tendent vers les nombres positifs:

$$\alpha_1' = -\, F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta' \cos\theta' \, \frac{1}{R'} \, \frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial\theta'} \, d\theta' ,$$

$$\beta_1' = \frac{1}{2} F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta' \, \frac{1}{R'} \, \frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial\theta'} \, d\theta' .$$

Il résulte alors des §§ 8 et 9 que les séries:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\rho, \theta) , \qquad \sum_{=1}^{\infty} B_k(\rho, \theta) ,$$

représentent des fonctions continues et supérieures à un nombre positif dans la masse ouverte.

§ 10. *Inégalité portant sur la courbure des méridiennes.*

L'expression:

$$\delta(\rho_0, \theta) = \frac{\sin\theta \, \dfrac{\partial R_0 \sin\theta}{\partial\theta}}{\cos\theta \, \dfrac{\partial R_0 \cos\theta}{\partial\theta}}$$

est continue et négative dans l'intervalle $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, mais aux extrémités $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ elle revêt la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. L'hypothèse *e*) de l'existence et de la continuité de la dérivée seconde:

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial\theta^2}$$

au voisinage du pôle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et de l'équateur $\theta = 0$ permet de lever cette indétermination. On trouve:

$$\begin{aligned} \delta(\rho_0\,,\,0) &= \frac{R(\rho_0\,,\,0)}{\dfrac{\partial^2 R(\rho_0\,,\,0)}{\partial\theta^2} - R(\rho_0\,,\,0)}\,, \\ \delta\left(\rho_0\,,\,\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\dfrac{\partial^2 R\left(\rho_0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}{\partial\theta^2} - R\left(\rho_0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}{R\left(\rho_0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

La première de ces expressions pourrait être infinie, mais en vertu de l'équation:

$$\frac{\omega^2(\rho_0\,,\,\theta)}{4\pi} = -\,\delta(\rho_0\,,\,\theta)\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\rho_0\,,\,\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\rho_0\,,\,\theta)\,, \tag{25}$$

la vitesse angulaire serait infinie aussi sur l'équateur, ce qui ne peut pas être, car la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction. Les deux limites (24) existent et le rapport $\delta(\rho_0, \theta)$ est bien continu sur l'intervalle total $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$.

Remarque. — Le rapport $\delta(\rho, \theta)$ étant toujours négatif ou nul sur une surface ρ quelconque, la dérivée seconde, lorsqu'elle existe et est continue, est inférieure au rayon au pôle et à l'équateur:

$$\frac{\partial^2 R(\rho\,,\,\theta)}{\partial\theta^2} < R(\rho\,,\,\theta)$$

§ 11. *La continuité de la vitesse angulaire et de la fonction $\delta(\rho, \theta)$.*

La vitesse angulaire $\omega(\rho, \theta)$, étant la même en tous les points d'une même parallèle à l'axe de rotation, est continue dans toute la masse si elle est continue sur la surface extérieure. Or, sur la surface extérieure, l'expression $\delta(\rho_0, \theta)$ et les séries en k de la formule (25) sont continues, de sorte que la vitesse angulaire $\omega(\rho_0, \theta)$ est bien continue. Elle l'est aussi dans toute la masse.

D'autre part, les séries en k dans l'expression de cette vitesse:

$$\frac{\omega^2(\rho,\theta)}{4\pi} = -\delta(\rho,\theta)\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\rho,\theta) - \sum_{k=1}^{\infty}B_k(\rho,\theta)$$

sont continues et supérieures à un nombre positif dans la masse ouverte; on peut donc isoler la fonction — δ qui sera elle aussi continue dans la masse ouverte:

$$-\delta(\rho,\theta) = \frac{\dfrac{\omega^2(\rho,\theta)}{8\pi} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\rho,\theta)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\rho,\theta)} .$$

Ce rapport — δ est compris entre deux nombres positifs δ_1 et δ_2, et dans la masse ouverte la relation suivante est vérifiée:

$$-\delta_1 < \delta(\rho,\theta) < -\delta_2 . \tag{26}$$

De cette dernière relation, on déduit les suivantes:

$$\frac{(\delta_2-1)R\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\delta_2\cos^2\theta} < \frac{\partial R}{\partial\theta} < \frac{(\delta_1-1)R\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\delta_1\cos^2\theta} ,$$

$$\left|\frac{\partial R}{\partial\theta}\right| < cR\sin\theta\cos\theta . \tag{27}$$

Remarques. — 1° L'ensemble de nos hypothèses et la nature du problème ont permis de déduire de l'inégalité:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial\theta}\right| < N$$

l'inégalité beaucoup plus spéciale et instructive (27).

2° De l'inégalité (27) on déduit les suivantes:

$$\left|\frac{\partial R\cos\theta}{\partial\theta}\right| < (c+1)R\sin\theta , \quad \left|\frac{\partial R\sin\theta}{\partial\theta}\right| < (c+1)R\cos\theta , \tag{28}$$

valables dans la masse ouverte. La convergence des séries ΣA_k et ΣB_k du § 8 résultait en fait de la seule intégration en θ' sans qu'il soit nécessaire d'intégrer en ρ'. En effet, les inégalités (28) sont celles que nous déduisions de l'existence de la dérivée seconde sur la surface extérieure. Elles nous permettaient de prouver la convergence du facteur de ρ_0 qui ne contenait pas d'intégration en ρ'. Nous voyons maintenant que, les mêmes inégalités (28) étant vérifiées sur toute surface d'égale densité, l'intégration superficielle assurerait déjà la convergence sans qu'il soit nécessaire de procéder à l'intégration en ρ'.

3° Si la condition e' est satisfaite, elle donne lieu, comme les relations (26), aux inégalités (28) sur la surface extérieure. Elle remplace l'hypothèse e portant sur la dérivée seconde les deux fois où nous l'avons invoquée § 8, 1° et § 10.

§ 12. *Etude de la stratification au voisinage du centre.*

Les inégalités (28) vont permettre de démontrer que les termes $\alpha_2, \alpha_3 \ldots, \beta_2, \beta_3 \ldots$ tendent vers zéro avec R, ce que nous ne pouvions pas encore affirmer au § 8. En effet, actuellement, on peut écrire:

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{G_k}{R'} \left| \frac{\partial R' \cos\theta'}{\partial\theta'} \right| d\rho' < (c+1)\sin\theta' \int_{\rho_0}^{\rho_1} G_k d\rho' ,$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{G_k}{R'} \left| \frac{\partial R' \sin\theta'}{\partial\theta'} \right| d\rho' < (c+1)\cos\theta' \int_{\rho_0}^{\rho_1} G_k d\rho' .$$

Faisons à nouveau le changement de variable:

$$R' = Ru ,$$

alors:

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} G_k d\rho' < \frac{R(\rho, \theta)}{i} \int_0^{+\infty} \frac{2^{2k-1} u^{2k+1}}{(1+u^2)^{2k-\frac{1}{2}}} du ,$$

et ces quantités tendent vers zéro avec R quel que soit le paramètre $k > 1$.

D'autre part, pour les mêmes valeurs de k, les coefficients de ρ_0 dans les termes α_k et β_k tendent vers zéro avec:

$$R_X = \frac{2RR_0'}{R^2 + R_0'} .$$

Or, les séries:

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k(\rho , \theta) \quad , \qquad \sum_{k=2}^{\infty} B_k(\rho , \theta)$$

sont uniformément convergentes et ont une majorante de la forme:

$$M \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} ;$$

cela résulte du § 8. Et, puisque leurs termes tendent tous vers zéro avec R, elles tendent elles aussi vers zéro.

Il ne reste plus que les termes A_1 et B_1 lesquels tendent, on le sait (§ 9), vers deux nombres positifs $\frac{1}{2}\alpha_1'$ et $\frac{1}{2}\beta_1'$. On a donc:

$$\lim_{\rho \to \rho_1} \delta(\rho , \theta) = - \frac{\frac{\omega(0 , 0)}{4\pi} + \beta_1'}{\alpha_1'} ,$$

et, en désignant par $-s^2$ cette valeur limite et par l la distance d'un point à l'axe oz:

$$\lim_{R \to 0} \frac{\delta z^2}{\delta l^2} = - s^2 .$$

En intégrant, on trouve l'équation d'une ellipse:

$$z^2 + s^2 l^2 = c .$$

Les surfaces d'égale densité tendent donc vers un ellipsoïde infiniment petit mais de forme bien déterminée dont le rapport des axes s *est un nombre fini et non nul.*

§ 13. *Remarque finale sur les hypothèses faites.*

Les majorantes à termes constants rencontrées au cours de cette étude étaient de la forme:

$$M \sum_{p=0}^{\infty} p^{-\frac{3}{2}} .$$

Or, on sait que la série:

$$M \sum_{p=0}^{\infty} p^{-1-\varepsilon^2}$$

est convergente, si petit que soit le nombre positif ε^2. On peut donc espérer élargir les hypothèses, quitte à ce que les majorantes convergent moins rapidement. En particulier, les relations suivantes déduites du § 9 et qui résultent de l'hypothèse b):

$$\left| \frac{\partial R' \cos \theta'}{\partial \theta'} \sin \theta' \right| \leqq R' , \qquad \left| \frac{\partial R' \sin \theta'}{\partial \theta'} \cos \theta' \right| \leqq \sqrt{2}\, R'$$

font espérer que l'hypothèse d):

$$\left| \frac{\partial R'}{\partial \theta'} \right| < N$$

n'est pas indispensable. En effet, il suffirait d'incorporer les facteurs $\sin \theta'$ et $\cos \theta'$ à l'intégration en ρ' et de prouver que, malgré le retranchement de ces facteurs de l'intégration en θ', on aboutit encore à une convergence des séries majorantes.

23 mai 1927.