Recherche d'une solution rigoureuse du problème des figures d'équilibre

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **10 (1928)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742834

R. Wavre. — *Recherche d'une solution rigoureuse du problème des figures d'équilibre.*

Dans une note insérée au Compte Rendu de la séance du 16 février le problème de la répartition de la matière à l'intérieur d'une planète a été ramené à la résolution d'une équation différentielle. Soient t un paramètre caractérisant les surfaces d'égale densité, $\rho(t)$ la densité, φ un angle polaire pris au centre de l'astre et $R(t, \varphi)$ le rayon vecteur du point t, φ. On pourra supposer que la surface libre correspond à la valeur $t = 0$ et le centre à la valeur $t = 1$, l'axe polaire à la valeur $\varphi = 0$ et enfin on pourra prendre pour unité de longueur la distance du centre au pôle de la surface extérieure.

En introduisant le logarithme népérien du rayon vecteur

$$h(t. \varphi) = \mathrm{L}R(t, \varphi)$$

et en posant successivement

$$F = -\frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)^2}, \qquad x = -Fe^{2h}\frac{\partial h}{\partial t},$$

$$c_0 = \left[\frac{2}{1-t}\left(1 - \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}\right)\right]_{\varphi=0}$$

$$y = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t} + F\left(1 - \frac{\partial h}{\partial \varphi}\operatorname{cotg}\varphi - \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}\right) \tag{1}$$

l'équation différentielle du problème s'écrira

$$y = c_0 + \Psi(t)(1 - x) \tag{2}$$

$\Psi(t)$ représentant une fonction arbitraire de la forme

$$\Psi(t) = \frac{k(t)}{1-t} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t \to 1} k(t) = a, \qquad a \neq 0.$$

Le premier terme de l'expression (1) de y fait intervenir la dérivée seconde de h par rapport à t; en explicitant cette dérivée on obtient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \mathrm{H}\left[\varphi\,,\ t\,,\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}\,,\ \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}\,,\ \frac{\partial h}{\partial t}\,,\ \frac{\partial^2 h}{\partial t\, \partial \varphi}\,,\ k(t)\right]. \tag{3}$$

On peut donner de la fonction h un développement suivant les puissances de t

$$h = h_0(\varphi) - th_1(\varphi) - \frac{1}{2}t^2 h_2(\varphi) - \dots - \frac{1}{n}t^n h_n(\varphi) - \dots\,, \tag{4}$$

puis en faisant $t = 0$ dans l'équation (3) et dans celles que l'on en déduit par des dérivations successives par rapport à t, on obtient une relation de récurrence de la forme

$$h_n(\varphi) = \Phi[h_0(\varphi)\,,\ h_1(\varphi)\,,\ \dots\,,\ h_{n-1}(\varphi)] \tag{5}$$

valable à partir de la valeur $n = 2$. Or, la fonction $h_0(\varphi)$ est connue, elle est entièrement déterminée par la connaissance de la surface libre, la fonction $h_1(\varphi)$ est déterminée, comme on le vérifie aisément en partant de notre note du 16 février 1928 (Soc. phys. Genève), par le champ de la pesanteur sur la surface libre; les fonctions h_0, h_1, h_2, ... peuvent donc s'obtenir de proche en proche.

Il suffira dès lors que la série (4) converge, qu'elle représente une fonction continue et soit dérivable terme à terme en φ jusqu'à l'ordre deux, pour que sa somme h fournisse une solution rigoureuse du problème des figures d'équilibre. En fait, nous n'avons pas encore pu établir dans quelles circonstances générales il en sera ainsi; c'est une question très délicate et pour certaines données extérieures une singularité doit se présenter avant le centre.

Pour prouver que la série (4) fournit une solution, il suffirait d'établir que l'on a, N représentant un nombre positif aussi grand que l'on voudra:

$$|h_n(\varphi)| < \mathrm{N} \qquad \left|\frac{dh_n}{d\varphi}\right| < \mathrm{N} \qquad \left|\frac{d^2 h_n}{d\varphi^2}\right| < \mathrm{N}$$

et cela pour toutes les valeurs de l'indice n. On a d'ailleurs: $h_0 = 0$, $h_1 = h_2 = h_3 = \dots 1$, pour $\varphi = 0$.

Cette méthode nous a permis de démontrer plus simplement que nous ne l'avions fait précédemment l'impossibilité d'une répartition des couches d'égale densité en surfaces homothétiques si la densité reste finie au voisinage du centre $t = 1$ de la planète.

En effet, pour des surfaces homothétiques en aurait:

$$2\omega^2 - 4\pi\varepsilon\rho(t) = A(1 - t)^B \tag{6}$$

où ω est la vitesse angulaire, ε le coefficient de l'attraction universelle, A et B deux constantes. Or, de trois choses l'une:

1° $B > 0$ et le premier membre de (6) tend vers zéro lorsque l'on se rapproche du centre; cela est impossible en vertu d'une inégalité de Poincaré.

2° $B = 0$ et la densité $\rho(t)$ est constante, la masse est homogène et elle n'est pas stratifiée.

3° $B < 0$ et la densité augmente indéfiniment lorsque l'on se rapproche du centre ce qui est exclu par hypothèse et d'ailleurs physiquement impossible.

Enfin, revenons au cas général et désignons par f la fonction

$$f(t) = 2\omega^2 - 4\pi\varepsilon\rho(t) \ ;$$

représentons aussi par

$$c_0 = \frac{2}{1 - t}\gamma(t)$$

le double de la courbure moyenne, sur l'axe polaire, des surfaces d'égale densité. On aura

$$\frac{f'}{f} = \frac{k'}{k} + \frac{1}{1 - t}[1 - k + 2\gamma]$$

de sorte que si la dérivée de la fonction arbitraire K reste finie lorsque t tend vers l'unité et si la densité admet une dérivée qui reste également finie lorsque t tend vers un, on devra avoir

$$\lim_{t \to 1} [1 - k(t) + 2\gamma(t)] = 0 \ ,$$

relation qui régit la courbure moyenne des surfaces d'égale densité, sur l'axe polaire, quand on se rapproche du centre.

Université de Genève.