Sur les formules de Clairaut relatives à la géodésie

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **10 (1928)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742855

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Séance du 6 décembre 1928.

R. Wavre. — *Sur les formules de Clairaut relatives à la géodésie.*

Considérons une masse fluide hétérogène dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons que l'équilibre relatif soit réalisé et que cette masse que nous appellerons une planète tourne avec une vitesse angulaire ω autour de son axe polaire. Ses surfaces d'égale densité seront définies par un paramètre t, elles doivent avoir un même plan équatorial de symétrie et elles seront supposées de révolution. Nous désignerons par $\rho(t)$ la densité, par $g(t)$ la pesanteur sur l'axe polaire. Soit encore $a(t)$ le rayon polaire, $b(t)$ le rayon équatorial, $c_P(t)$ la courbure moyenne sur l'axe polaire, $c_E(t)$ la courbure moyenne dans le plan équatorial, de la surface t. D'une relation (formule 4) donnée dans la séance du 16 février 1928 [1] que je ne reproduis pas ici, on déduit très aisément la suivante ou i désigne la constante de la gravitation universelle et où les accents représentent des dérivées par rapport à t:

$$\frac{4\pi i\,\rho(t) - 2\omega^2}{g(t)} = \frac{c_E\, b' - c_P\, a' + \dfrac{a''}{a'} - \dfrac{b''}{b'}}{b'^2 - a'^2} \qquad (1)$$

relation rigoureuse et générale s'appliquant à toute figure d'équilibre. Elle lie comme on le voit, les variations des rayons a et b, les courbures moyennes c_E et c_P à la densité et à la pesanteur. Le second membre comme le premier est à calculer sur la surface t.

Considérons, maintenant, le cas spécial très important pour la pratique, où s'est placé Clairaut. Celui d'une vitesse angulaire très faible et d'une stratification en ellipsoïdes très peu aplatis. Posons $\varepsilon = b - a$ (différence des axes), puis faisons $a = t$, ce qui ne restreint nullement la valeur des déductions suivantes; cela donne:

$$a' = 1 \qquad a'' = 0 \qquad b = 1 + \varepsilon(t) \qquad b' = 1 + \varepsilon' \qquad b'' = \varepsilon''$$

[1] C. R. des séances Soc. phys., Vol. 45, nº 1, page 39 (1928).

Puis cherchons, en première approximation, les valeurs des deux membres de l'équation (1). Prenons d'abord le second. En négligeant les termes du second ordre en ε, ε', ε'', vis-à-vis de ceux du premier ordre, on trouve tout d'abord

$$c_{\mathrm{E}} = \frac{2}{t} \qquad c_{\mathrm{P}} = \frac{2}{t}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{t}\right)$$

et l'équation (1) devient à cet ordre d'approximation

$$\frac{4\pi i\,\rho(t) - 2\omega^2}{g(t)} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\,. \tag{2}$$

Le second membre, on le voit, ne dépend que des rapports $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ et $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$. Lorsque ω et ε tendent vers 0 ce membre ne tend pas vers zéro. Calculons, ensuite, le premier membre approximativement. On le fera dans l'hypothèse d'une stratification sphérique très voisine de celle que l'on envisage, cela ne présente pas de difficulté et l'on trouve la valeur

$$\frac{2\omega^2 - 4\pi i\,\rho(t)}{g(t)} = \frac{3}{t} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} \tag{3}$$

où D (t) est la densité moyenne de la matière intérieure à la surface t. En rapprochant (2) et (3) on obtient

$$\frac{2}{t} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \tag{4}$$

et en introduisant l'aplatissement e de la surface t

$$e = \frac{\varepsilon}{t} = \frac{b-a}{a}\,,$$

on trouve après un calcul tout élémentaire la relation

$$e''\mathrm{D} + 2e'\mathrm{D}' + \frac{2}{t}e\mathrm{D}' + \frac{6}{t}e'\mathrm{D} = 0\,. \tag{5}$$

C'est l'*équation de Clairaut* qui est à la base de la géodésie. Elle lie l'aplatissement e des couches d'égale densité à la densité moyenne à l'intérieur de chacune d'elles.

L'équation de Clairaut (5) n'est valable que pour une stratification quasi sphérique, tandis que la relation (1) est valable quelles que soient la stratification et la vitesse angulaire. L'équation (1) de la présente note et l'équation (4) de notre note du 16 février 1928 sont donc des extensions de l'équation de Clairaut rigoureuses et générales.

On voit que notre méthode n'exige à aucun instant l'emploi des fonctions sphériques dont l'usage est constant chez Laplace et Poincaré et dans les ouvrages de géodésie supérieure tels que ceux de Helmert ou de Tisserand.

La méthode retracée dans cette note et dans les précédentes nous paraît être la plus simple, et la plus satisfaisante, car on ne fait une approximation qu'en dernier lieu sur des formules d'ailleurs nouvelles et surtout rigoureuses. Cherchons maintenant une relation entre l'aplatissement et la vitesse angulaire.

Pour cela remplaçons le c_P de tout à l'heure par c_ρ, c'est donc la courbure moyenne sur l'axe polaire de la surface de densité ρ; soit c_U la courbure moyenne sur le même axe et au même point de la surface U = constante, U désignant le potentiel du champ de Newton.

Par une transformation indiquée dans une note intitulée *Sur une formule utile pour la géodésie* (Séance du 17 novembre 1927, C. R., Vol. 44, n° 3, p. 162, formule 5), on peut écrire sur l'axe polaire

$$\frac{dg}{dt} + c_\rho g = 4\pi i \rho - 2\omega^2 \tag{6}$$

et

$$\frac{dg}{dt} + c_U g = 4\pi i \rho \tag{7}$$

suivant qu'on se réfère au champ de la pesanteur ou au champ de Newton. En soustrayant membre à membre ces deux équations on trouve

$$\frac{2\omega^2}{g} = c_U - c_\rho \tag{8}$$

relation vraie en tout point de l'axe polaire. Cette relation est encore vraie en dehors de la masse, c_ρ désigne alors la courbure moyenne des surfaces équipotentielles pour le champ de la pesanteur.

Plaçons-nous ensuite sur la surface libre $t = 1$ et affectons de l'indice 1 tout ce qui s'y rapporte. La courbure c_U varie entre deux limites qui correspondent au cas d'une concentration de toute la masse au centre, d'une part, et à une répartition homogène, d'autre part. On trouve respectivement les deux valeurs 2 et $2\left(1 - \frac{6}{5} e_1\right)$, tandis que $c_\rho = 2(1 - 2e_1)$.

On en déduit les inégalités suivantes

$$\frac{4}{5} e_1 \leqq \frac{\omega^2}{g} \leqq 2 e_1 \qquad \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \leqq e \leqq \frac{4}{5} \frac{\omega^2}{g}$$

qui constituent elles aussi un important théorème de Clairaut.

Enfin, les surfaces d'égale densité étant de révolution les surfaces équipotentielles U = constante le sont aussi et les courbures moyennes c_U et c_ρ ont les valeurs

$$c_U = \frac{2}{R_U} \qquad c_\rho = \frac{2}{R_\rho}$$

R_U et R_ρ désignant les rayons de courbure des méridiennes des surfaces en question.

La relation (6) s'écrit donc sous la forme expressive:

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R_U} - \frac{1}{R_\rho} .$$

Enfin, on vérifie aisément qu'en remplaçant les surfaces d'égale densité par les surfaces d'égale pression p, la formule (6) demeure exacte sur l'axe polaire pour toute rotation permanente. On a donc toujours dans ce dernier cas

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R_U} - \frac{1}{R_p}$$

R_p étant le rayon de courbure de la méridienne de la surface à p constant.