La seconde approximation dans le problème des figures d'équilibre

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **11 (1929)**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740984

LA SECONDE APPROXIMATION

DANS LE

PROBLÈME DES FIGURES D'ÉQUILIBRE

PAR

R. WAVRE

Cet article fait suite au précédent[1] dans lequel se trouve exposé l'essentiel de notre méthode. Il nous sera sans doute permis d'être bref et de ne pas reproduire certains calculs sans difficulté théorique. Nous passerons de la première à la deuxième approximation; on pourrait entreprendre aussi la troisième et les suivantes, le procédé est toujours le même. Les notations déjà employées seront rappelées dans un premier paragraphe.

§ 1. — Les notations.

M sera la masse totale, i la constante de l'attraction universelle, ω la vitesse angulaire, Q le potentiel de la force centrifuge, S une surface équipotentielle pour le champ de la pesanteur, t le rayon polaire de cette surface, $\rho(t)$ la densité sur S, O le centre de l'astre, P_0 le pôle de S, g_0 la pesanteur en P_0, U_0 le potentiel newtonien en P_0, g la pesanteur en un autre point P de S, R le rayon vecteur OP, θ le complément de la latitude

[1] Sur un procédé uniforme dans la recherche des figures planétaires, *Archives*, (5), 11, p. 131 (1929).

géocentrique de P ou angle P_0OP, ψ la longitude de P, ε la différence des rayons OP et OP_0 et e cette différence rapportée à t que nous appellerons aussi déformation.

Les quantités ε et e sont fonctions de t, θ, ψ et l'on a :

$$R(t, \theta, \psi) = t + \varepsilon(t, \theta, \psi), \qquad \varepsilon(t, \theta, \psi) = te(t, \theta, \psi) ;$$

S_1 sera la surface libre, t_1 son rayon polaire, Z le volume compris entre S et S_1, V le volume intérieur à S, D la densité moyenne de la matière répartie dans V, V′ le volume compris entre S et une sphère de même pôle, sphère de rayon t; dV, dZ, dV′ seront les éléments des volumes V, Z, V′, dn sera un élément de normale à la surface S, $d\Omega$ un angle solide élémentaire, r la distance d'un point potentié à un point potentiant; x, y, z seront trois axes orthogonaux, l'axe de rotation sera oz et enfin A, B, C seront les moments d'inertie de la planète par rapport aux axes x, y, z respectivement.

§ 2. Les éléments géométriques du problème.

Les surfaces S ont la connexité de la sphère dans la planète et dans son voisinage, elles admettent toutes un même plan de symétrie comme M. Lichtenstein l'a démontré.

Tant qu'il s'agissait de la première approximation, on pouvait négliger l'angle ν de la normale à S en P avec le rayon vecteur, car cet angle n'intervenait que par son cosinus comparable à 1 au second ordre près. Maintenant, au contraire, il faudra calculer ce cosinus. Au troisième ordre près on a, en effet:

$$g\,dn = g_0\,dt, \qquad dZ = dS\,dn, \qquad \cos\nu\, dS = R^2 d\Omega,$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t}\cos\nu, \qquad dZ = R^2\frac{\partial R}{\partial t}\,dt\,d\Omega, \qquad \omega^2 dV' = \omega^2 t^2 \varepsilon\, d\Omega,$$

$$g\,dS = g_0 R^2 \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial t}} \cdot \frac{1}{\cos^2\nu}\, d\Omega .$$

A l'avenir, nous représenterons le sinus par s et le cosinus par c, pour abréger.

Cette convention faite, déterminons l'angle ν. Les coordonnées de P sont:

$$x = R s\theta c\psi \ , \qquad y = R s\theta s\psi \ , \qquad z = R c\theta \ .$$

Les cosinus directeurs du rayon vecteur OP sont:

$$P_x = s\theta c\psi \ , \qquad P_y = s\theta s\psi \ , \qquad P_z = c\theta \ .$$

Les paramètres directeurs de la normale en P sont, en coordonnées curvilignes θ et ψ:

$$N_x = \frac{D(y\,,\,z)}{D(\theta\,,\,\psi)} \ , \qquad N_y = \frac{D(z\,,\,x)}{D(\theta\,,\,\psi)} \ , \qquad N_z = \frac{D(x\,,\,y)}{D(\theta\,,\,\psi)} \ .$$

Le cosinus de l'angle ν que font ces deux directions est donné par la relation:

$$c\nu = \frac{P_x N_x + P_y N_y + P_z N_z}{\left(N_x^2 + N_y^2 + N_z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ .$$

On trouvera, tout calcul fait:

$$\frac{1}{c^2\nu} = 1 + \left(\frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}}{R}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{\frac{\partial R}{\partial \psi}}{R}\right)^2 .$$

§ 3. Les équations a résoudre.

Les deux équations qui jouent un rôle si important dans notre méthode sont: l'équation de Poincaré transformée:

$$\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int g\,dS + i\int\!\!\int\!\!\int \rho\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int dV - iM = 0 \ , \qquad (32)$$

et la suivante:

$$\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \frac{g}{r}\,dS + i\int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho}{r}\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{r}\,dV - U_0 + Q = 0 \ ; \qquad (33)$$

Cette dernière doit être vérifiée quelle que soit la position du point potentié à l'intérieur de S, U_0 doit être pris au pôle de S et Q au point potentié.

Soient, de nouveau, τ et t' les distances à l'origine O des points potentié et potentiant. L'inverse de la distance r se développera de nouveau en série de polynômes de Legendre X_q:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t'}\left(X_0 + X_1 \frac{\tau}{t'} + \dots + X_q \frac{\tau^q}{t'^q} + \dots\right),$$

τ pourra être pris aussi petit qu'il le faudra, par exemple $\tau < \frac{1}{2} t^+$, tandis que t' satisfait à la relation $t' > t^+$. Le développement est absolument et uniformément convergent.

En remplaçant $\frac{1}{r}$ par son développement dans (33) et identifiant les deux membres, on trouve la suite des équations:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int X_q \cdot \frac{g dS}{t'^{q+1}} + i \int\int\int X_q \frac{\rho\, dZ}{t'^{q+1}} + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\int\int X_q \frac{dV'}{t'^{q+1}}$$

$$= \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{pour } q = -1 \\ U_0 - \omega^2 t^2 & \text{» } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{» } q = 2 \\ 0 \quad \text{pour } q = 1, 3, 4, 5, 6, \dots \end{cases} \tag{34}$$

La première ligne $q = -1$, correspond à l'équation de Poincaré. Nous convenons de poser $X_{-1} = 1$.

§ 4. Les premiers polynômes de Legendre.

Rappelons les valeurs de X_0, X_2 et X_4:

$$X_0(c\gamma) = 1 \; ;$$

$$X_2(c\gamma) = \frac{3}{2}c^2\gamma - \frac{1}{2} \; ;$$

$$X_4(c\gamma) = \frac{35}{8}c^4\gamma - \frac{15}{4}c^2\gamma + \frac{3}{8} \, .$$

On tire de là les relations suivantes:

$$
\begin{aligned}
s^2\gamma &= \frac{2}{3}(1 - X_2) , \\
s^4\gamma &= \frac{8}{15} - \frac{16}{21}X_2 + \frac{8}{35}X_4 , \\
s^2\gamma c^2\gamma &= \frac{2}{15} + \frac{2}{21}X_2 - \frac{8}{35}X_4 .
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Les polynômes X_1 et X_3 ne nous intéressent pas.

§ 5. Les équations au troisième ordre près.

Le carré de la vitesse angulaire ω^2 et la déformation e sont des quantités petites; nous prendrons en considération les termes du premier et du second ordre en ω^2 et e, et nous négligerons les termes d'ordre trois et d'ordre supérieur.

On trouve par exemple:

$$\frac{1}{t'^{q+1}} = t^{-1-q}\left[1 - (1+q)e + \frac{1}{2}(q+1)(q+2)e^2\right] .$$

Comme l'on a:

$$R = t + te ,$$

les quantités $gd\mathrm{S}$, $d\mathrm{Z}$ et $d\mathrm{V}'$ du § 2 s'exprimeront au moyen de e; en portant ces différentes expressions dans le tableau (34), on trouvera, tout calcul fait, le nouveau tableau, vrai au troisième ordre près:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{4\pi} g_0 t^{1-q} \iint (1 - E + G) X_q \, d\Omega \\
+ i \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} dt \iint (1 + F + H) X_q \, d\Omega \\
+ \frac{\omega^2}{2\pi} t^{2-q} \iint e X_q \, d\Omega \\
= \begin{cases}
iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{pour } q = -1 \\
U_0 - \omega^2 t^2 & \text{»} \quad q = 0 \\
\frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{»} \quad q = 2 \\
0 \quad \text{pour } q = 1, 3, 4, 5, 6, \ldots &
\end{cases}
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Les symboles E, F, G, H représentent les expressions suivantes:

$$E = qe + t\frac{\partial e}{\partial t},$$

$$F = (2 - q)e + t\frac{\partial e}{\partial t},$$

$$G = \frac{1}{2}q(q+1)e^2 + (q+1)et\frac{\partial e}{\partial t} + \left(t\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{s^2\theta}\left(\frac{\partial e}{\partial \psi}\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2}(q-1)(q-2)e^2 + (1-q)et\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Remarquons que E et F sont du premier ordre en e et ses dérivées tandis que G et H sont du second ordre.

§ 6. Le principe des approximations.

Il convient de mettre en évidence des facteurs ω^0, ω^2, ω^4 dans les termes qui correspondent aux approximations d'ordre 0, 1, 2. Pour cela nous poserons:

$$e = 0 + \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)},$$

$$g_0 = g_{0,0} + \omega^2 g_{0,1} + \omega^4 g_{0,2},$$

$$U_0 = U_{0,0} + \omega^2 U_{0,1} + \omega^4 U_{0,2}.$$

Nous portons ces expressions de e, g_0, U_0 dans le tableau (36). *Ce dernier devra être satisfait identiquement en ω, t, θ, ψ.*

On identifiera, tout d'abord les termes en ω^0, puis ceux en ω^2 et enfin ceux en ω^4; cela nous donnera les approximations d'ordre 0, 1, 2. On pourra, en faisant l'une de ces approximations, tenir compte des résultats de la précédente. Cette recherche se poursuit donc comme une itération. Les calculs sont pratiquement un peu long et il est bon d'avoir un principe de vérification qui rende les erreurs de calcul très improbables. Celui que nous avons employé consiste à tirer g_0 et U_0 des équations et à vérifier la relation:

$$g_0 = -\frac{dU_0}{dt}. \qquad (37)$$

Le signe (—) provient de ce que l'on évalue g_0 positivement du côté des t décroissants, vers le centre. On devra avoir par identification en ω aux trois étapes:

$$g_{0,0} = -\frac{dU_{0,0}}{dt}, \quad g_{0,1} = -\frac{dU_{0,1}}{dt}, \quad g_{0,2} = -\frac{dU_{0,2}}{dt}.$$

Et maintenant nous ne reparlerons plus de ces vérifications.

§ 7. L'APPROXIMATION D'ORDRE ZÉRO.

Identifions les termes indépendants de ω dans le système (36). Les quantités E, F, G, H, e, n'interviennent pas car elles contiennent ω^2 en facteur. Le terme 1 des parenthèses est orthogonal aux polynômes X_1, X_2, ... Il ne reste que les deux équations relatives à $q = -1$ et $q = 0$:

$$\begin{aligned} g_{0,0}\, t^2 &= i\mathrm{M} - 4\pi i \int_t^{t_1} \rho t^2 dt\,, \\ \mathrm{U}_{0,0} &= g_{0,0}\, t + 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t\, dt\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Ce sont les relations qui conviendraient à un astre immobile et sphérique: $\omega = 0$, $e = 0$. Les intégrales disparaissent si $t > t_1$, on retrouve, alors, l'attraction et le potentiel dus à une sphère de masse M à l'extérieur de celle-ci.

§ 8. L'APPROXIMATION D'ORDRE UN.

Identifions les termes en ω^2 dans le système (36). Les fonctions G et H n'interviennent pas car elles contiennent ω^4 en facteur et l'on trouve:

$$\frac{g_{0,0}}{4\pi} t^{1-q} \int\int \mathrm{E}\,[e^{(1)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega - i \int_t^{t_1} \rho\, t^{1-q} \int\int \mathrm{F}\,[e^{(1)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} \frac{2}{3} t^3 + g_{0,1} t^2 & \text{pour} & q = -1 \\ t^2 + g_{0,1} t - \mathrm{U}_{0,1} & \text{»} & q = 0 \\ -\frac{1}{3} \mathrm{X}_2 (c\,\theta) & \text{»} & q = 2 \\ 0 \quad \text{pour} \quad q = 1, 3, 4, 5, 6, \ldots\,. & & \end{array} \right. \qquad (39)$$

Nous avons fait passer les termes en $g_{0,1}$ et $\mathrm{U}_{0,1}$ qui ne dépendent pas de $e^{(1)}$ aux seconds membres. Les fonctions E et F sont formées à partir de $e^{(1)}$, ce qui proviendrait de $e^{(2)}$ étant d'ordre quatre. Le système (39), est celui qui a été dégagé de l'étude précédente, c'est une nouvelle forme du système (8). On passerait de ce dernier au système (39) en mettant en évidence dans (8) l'approximation d'ordre zéro, ce que nous n'avions pas jugé nécessaire de faire tout de suite dans l'étude précédente.

§ 9. L'approximation d'ordre deux.

Identifions les termes en ω^4. On trouvera, après avoir fait passer au second membre ce qui ne dépend pas de $e^{(2)}$:

$$\frac{g_{0,0}}{4\pi} t^{1-q} \int\int \mathrm{E}\,[e^{(2)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega - i \int_t^{t_1} \rho\, t^{1-q}\, dt \int\int \mathrm{F}\,[e^{(2)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega$$

$$=$$

$$-\frac{g_{0,1}}{4\pi} t^{1-q} \int\int \mathrm{E}\,[e^{(1)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega + \frac{g_{0,0}}{4\pi} t^{1-q} \int\int \mathrm{G}\,[e^{(1)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega$$

$$+ i \int_t^{t_1} \rho\, t^{1-q}\, dt \int\int \mathrm{H}\,[e^{(1)}]\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega + \frac{1}{2\pi} t^{2-q} \int\int e^{(1)}\, \mathrm{X}_q\, d\,\Omega \qquad (40)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{lll} g_{0,2} t^2 & \text{pour} & q = -1 \\ g_{0,2} t - \mathrm{U}_{0,2} & \text{»} & q = 0 \\ 0 & \text{»} & q = 2 \\ 0 \quad \text{pour} \quad q = 1, 3, 4, 5, 6, \ldots\,. & & \end{array} \right.$$

A part les termes sous l'accolade, les seconds membres ne dépendent que des valeurs $g_{0,0}$, $g_{0,1}$, $e^{(1)}$, calculables à partir des systèmes (38) et (39) des approximations précédentes.

Les fonctions inconnues dans (40) sont $e^{(2)}$, $g_{0,2}$ et $U_{0,2}$.

§ 10. L'APPROXIMATION D'ORDRE DEUX, SUITE TRANSFORMATION DU SYSTÈME.

Pour chaque valeur t, l'aplatissement, fonction des deux variables θ et ψ est développable en série de fonctions sphériques fondamentales (voir premier mémoire, page 138), ce qui donne:

$$e(t, \theta, \psi) = \sum_{q=0}^{\infty} e_q(t) X_q(c\theta) + \text{autres fonctions sphériques en } \theta \text{ et } \psi .$$

C'est ainsi que nous écrirons le développement formel de $e^{(2)}$. Quant à $e^{(1)}$, la première approximation nous a fourni la formule:

$$e^{(1)} = a(t) s^2\theta .$$

Les fonctions E, F, G, H de $e^{(1)}$ s'expriment donc au moyen des expressions:

$$t \frac{\partial e^{(1)}}{\partial t} = ta' s^2\theta ; \qquad \frac{\partial e^{(1)}}{\partial \theta} = 2as\theta c\theta , \qquad \frac{\partial e^{(1)}}{\partial \psi} = 0 .$$

Les fonctions $e^{(1)}$, E, F, G, H de $e^{(1)}$ s'expriment en $s^2\theta$, $s^2\theta c^2\theta$, $s^4\theta$, que nous convertissons en polynômes X_2 et X_4 par les formules du § 4.

Puis on tiendra compte des relations d'orthogonalité des fonctions sphériques fondamentales et des polynômes de Legendre (voir page 138). Les intégrales sphériques disparaîtront comme dans l'article précédent. On trouvera, alors, un système (40) transformé et mis sous la forme du tableau suivant, dit *tableau T :*

$$g_{0,0}\, t^{1-q}\left(q e^{(2)} + t\,\frac{de^{(2)}}{dt}\right)$$

$$-\; 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t^{1-q}\left[(2-q)\, e^{(2)} + t\,\frac{de^{(2)}}{dt}\right] dt$$

$$=$$

$$\text{à}\; -\frac{2}{3}\, g_{0,1}\, t^2(-a + ta') + \frac{8}{15}\, g_{0,0}\, t^2[a^2 + (ta')^2] + \frac{4}{3}\, t^3 a + g_{0,2}\, t^2$$

$$+ \frac{8}{15}\cdot 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t^2 (3a^2 + 2ata')\, dt \qquad \text{pour}\quad q = -1 \quad\text{et}\quad e^{(2)} = e_0^{(2)}\;;$$

$$\text{à}\; -\frac{2}{3}\, g_{0,1}\, tta' + \frac{8}{15}\, g_{0,0}\, t[a^2 + ata' + (ta')^2] + \frac{4}{3}\, t^2 a + g_{0,2}\, t$$

$$-\, \mathrm{U}_{0,2} + \frac{8}{15}\cdot 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t\,(a^2 + ata')\, dt \qquad \text{pour}\quad q = 0 \quad\text{et}\quad e^{(2)} = e_0^{(2)}\;;$$

$$\text{à}\; \frac{2}{3}\, g_{0,1}\, t^{-1}(2a + ta') - \frac{8}{21}\, g_{0,0}\, t^{-1}[5a^2 + 6ata' + 2(ta')^2]$$

$$-\, \frac{4}{3}\, a + \frac{16}{21}\cdot 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t^{-1}\, ata' dt \qquad \text{pour}\quad q = 2 \quad\text{et}\quad e^{(2)} = e_2^{(2)}\;;$$

$$\text{à}\; \frac{8}{35}\, g_{0,0}\, t^{-3}[6a^2 + 5ata' + (ta')^2] + \frac{24}{35}\cdot 4\pi i \int_t^{t_1} \rho\, t^{-3}(a^2 - ata')\, dt$$

$$\text{pour}\; q = 4 \quad\text{et}\quad e^{(2)} = e_4^{(2)}\;;$$

$$\text{à}\quad 0 \qquad \text{pour} \qquad q = 1,\, 3,\, 5,\, 6,\, 7,\, \ldots\; e_1^{(2)},\, e_3^{(2)},\, e_5^{(2)},\, e_6^{(2)},\, e_7^{(2)} \ldots$$

respectivement et pour toute autre fonction sphérique que X_0, X_2, X_4, quel que soit $q = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Pour la seconde approximation, ce tableau T joue le rôle du système (9) de la première.

§ 11. Le théorème analogue a celui de Laplace.

En remplaçant $g_{0,0}$ par sa valeur en la densité moyenne D :

$$g_{0,0} = \frac{4}{3}\pi i \mathrm{D} t \ ,$$

la dernière équation du tableau T s'écrit sous la forme :

$$-\frac{1}{3}\mathrm{D}t^{2-q}\left(qe + t\frac{de}{dt}\right) = \int_t^{t_1} \rho t^{1-q}\left[(2-q)e + t\frac{de}{dt}\right] dt \ . \quad (41)$$

Cette équation est identique à l'équation (10) de la première approximation. On sait par l'étude précédente qu'elle exprime que le coefficient e_q ne figure pas dans le développement de e. Dans l'article antérieur, elle nous apprenait que tous les coefficients, sauf $e_0^{(1)}$ et $e_2^{(1)}$ étaient identiquement nuls. Maintenant, elle nous apprend de même que tous les coefficients, sauf $e_0^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ et $e_4^{(2)}$, sont identiquement nuls. La fonction $e^{(2)}$ ne dépend donc que de t et de θ; elle est de la forme :

$$e^{(2)} = e_0^{(2)}(t) + e_2^{(2)}(t)\,\mathrm{X}_2(c\theta) + e_4^{(2)}(t)\,\mathrm{X}_4(c\theta) \ .$$

La seconde approximation introduit un terme en $\mathrm{X}_4(c\theta)$, *mais elle n'introduit aucune autre fonction sphérique.*

Les surfaces d'égale densité sont encore de révolution.

Pour $\theta = 0$, c'est-à-dire sur l'axe polaire, on a $\mathrm{X}_q = 1$ et il faut que $e^{(2)}$ soit nul, quel que soit t; on a donc entre les trois coefficients l'identité :

$$e_0^{(2)}(t) + e_2^{(2)}(t) + e_4^{(2)}(t) \equiv 0 \ . \quad (42)$$

On retrouverait encore les équations (41) pour une approximation d'ordre $n = 3, 4, 5, \ldots$. Elles exprimeraient toujours l'absence de certaines fonctions fondamentales dans le développement de e.

§ 12. Résolution des équations pour l'extérieur de l'astre.

Dans le tableau T, les seconds membres peuvent être calculés explicitement à partir de la solution donnée de la première approximation. Nous avons vu que les quantités $g_{0,0}$, $g_{0,1}$, a, ta' s'expriment en dehors de la planète, au moyen d'une seule constante k. En posant pour simplifier:

$$\lambda = \frac{1}{2iM},$$

nous avions, page 142, les valeurs suivantes rapportées à ω:

$$g_{0,0} = \frac{1}{2\lambda} t^{-2}, \qquad g_{0,1} = 3kt^{-4},$$

$$a = \lambda(t^3 - 3kt^{-2}), \qquad ta' = 3\lambda(t^3 + 2kt^{-2}).$$

On peut substituer ces valeurs dans les seconds membres de T, les intégrales de t à t_1 disparaissent à l'extérieur et l'on peut résoudre les équations $q = 2$ et $q = 4$ en $e_2^{(2)}$ et $e_4^{(2)}$, puis déterminer $e_0^{(2)}$ par l'identité (42) et les équations $q = 0$ et $q = -1$ donneront ensuite $U_{0,2}$ et $g_{0,2}$.

Il n'y a là que des calculs sans intérêt théorique et l'on trouve les expressions que voici:

$$U_{0,2} = 2\lambda\left(-k_1 t^{-3} - k_2 t^{-5} + \frac{36}{35} k^2 t^{-5}\right), \tag{43}$$

$$g_{0,2} = 2\lambda\left(-3k_1 t^{-4} - 5k_2 t^{-6} + \frac{36}{7} k^2 t^{-6}\right), \tag{44}$$

$$e_0^{(2)} = 4\lambda^2\left(\frac{2}{5} t^6 - \frac{7}{5} kt + k_1 t^{-2} + k_2 t^{-4} - \frac{3}{7} k^2 t^{-4}\right), \tag{45}$$

$$e_2^{(2)} = 4\lambda^2\left(-\frac{4}{7} t^6 + \frac{11}{7} kt - k_1 t^{-2} + \frac{3}{7} k^2 t^{-4}\right), \tag{46}$$

$$e_4^{(2)} = 4\lambda^2\left(\frac{6}{35} t^6 - \frac{6}{35} kt - k_2 t^{-4}\right). \tag{47}$$

Les symboles k_1 et k_2 représentent deux nouvelles constantes.

§ 13. Autres expressions de la déformation.

On peut repasser de l'expression de la déformation en polynôme de Legendre:

$$e = \omega^2 e_0^{(1)} + \omega^2 e_2^{(1)} X_2 + \omega^4 e_0^{(2)} + \omega^4 e_2^{(2)} X_2 + \omega^4 e_4^{(2)} X_4 , \quad (48)$$

à l'expression en le sinus de θ et l'on trouve:

$$e = \omega^2 \alpha \lambda s^2 \theta + \omega^4 \beta \lambda^2 s^2 \theta + \omega^4 \gamma \lambda^2 s^4 \theta , \quad (49)$$

où les trois fonctions α, β, γ de t ont la forme suivante:

$$\alpha = t^3 - 3kt^{-2} ,$$

$$\beta = -3kt + 3k_1 t^{-2} + 10 k_2 t^{-4} - \frac{9}{7} k^2 t^{-4} ,$$

$$\gamma = 3t^6 - 3kt - \frac{35}{2} k_2 t^{-4} .$$

Le terme en α n'est autre que celui qui répond à la première approximation. L'équation des méridiennes de la surface libre et des surfaces S extérieures à l'astre s'écrit donc en coordonnées polaires R et θ:

$$R = t + \lambda \omega^2 s^2 \theta (\alpha + \beta \lambda \omega^2 + \gamma \lambda \omega^2 s^2 \theta) .$$

La seconde approximation modifie légèrement le terme en $s^2 \theta$ de la première et introduit un terme petit en $s^4 \theta$.

§ 14. Les moments d'inertie en seconde approximation.

Nous avons déjà formé, page 143, l'expression exacte mais théorique des moments d'inertie et de leurs différences. Ces dernières se déduisent les unes des autres par permutation des lettres. On avait en particulier:

$$4\pi i (A - B) = \int\int (y^2 - x^2) g dS + 2\omega^2 \int\int\int (y^2 - x^2) dV .$$

La surface S doit être extérieure à l'astre et rester fermée, à part cela, elle est quelconque et peut coïncider avec la surface libre.

Mettons de nouveau en évidence la sphère de mêmes pôles que S et la marge V'. Pour la sphère, la dernière intégrale est nulle et il reste:

$$4\pi i(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \iint (y^2 - x^2)\, g d\mathrm{S} + 2\omega^2 \iiint (y^2 - x^2)\, d\mathrm{V}' \ .$$

Additionnons les deux formules relatives à C — A et à C — B et tenons compte qu'en fait A = B pour une figure de révolution. On obtient :

$$8\pi i(\mathrm{C}-\mathrm{A}) = \iint (x^2 + y^2 - 2z^2)\, g d\mathrm{S} + 2\omega^2 \iiint (x^2 + y^2 - 2z^2)\, d\mathrm{V}' \ .$$

Au troisième ordre près on trouve facilement:

$$g d\mathrm{S} = g_0 t^2 \left[1 + e - t\frac{\partial e}{\partial t} + \left(t\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 \right] d\Omega \ ,$$

$$\omega^2 d\mathrm{V}' = \omega^2 t^3 e\, d\Omega \ ,$$

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = \mathrm{R}^2 (s^2\theta - 2c^2\theta) = -2t^2(1 + 2e + e^2)\, \mathrm{X}_2(c\theta) \ .$$

Portons ces valeurs dans l'expression de la différence C — A en remplaçant e par sa valeur (48) et l'on trouvera, tout calcul fait:

$$i(\mathrm{C}-\mathrm{A}) = -\omega^2 k + 2\lambda\omega^4 k_1 \ . \qquad (50)$$

Au premier ordre, le dernier terme du second membre disparaît et l'on retrouve la dernière formule, page 144, de l'article précédent.

La constante C — A est liée, on le sait, à la constante J de la précession des équinoxes, car on a:

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}} \ ;$$

La constante corrective k_1 pourra être déterminée par (50), mais je ne chercherai pas dans cet article d'ordre essentiellement mathématique à interpréter ces résultats dans le langage de la géodésie et de la mécanique céleste[1].

[1] Les travaux antérieurs sur ce sujet sont mentionnés dans le fascicule XIII du *Mémorial des Sciences mathématiques*, Paris, 1926.