Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 12 (1930)

Artikel: De la densité superficielle moyenne de la terre
Autor: Tiercy, Georges
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741235

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DE LA
DENSITÉ SUPERFICIELLE MOYENNE DE LA TERRE

PAR

Georges TIERCY

---

§ 1. — Introduction.

1. — On sait combien les géodésiens ont hésité avant d'adopter une valeur universellement admise pour l'aplatissement h du sphéroïde terrestre:

$$h = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297} ;$$

cette valeur a été choisie parce qu'elle permettait de rendre compte, dans la mesure du possible, *en première approximation*, du comportement de la pesanteur g à la surface de la Terre.

Mais on sait aussi que cette valeur n'est guère satisfaisante dès qu'on fait allusion aux mesures géodésiques elles-mêmes; ces mesures [1] conduisent plutôt à l'aplatissement autrefois adopté par Clarke, $\frac{1}{293,5}$.

Ce désaccord entre les mesures précessionnelles et gravifiques et les mesures géodésiques a paru pendant longtemps ne pas pouvoir être réduit. Cet échec provenait, comme M. R. Wavre

[1] M. Helbronner, *Revue générale des Sciences*, 1929.

l'a bien montré [1] ici-même, de ce que l'accord n'était tenté que par des procédés de première approximation; en seconde approximation, par contre, le désaccord disparaît. M. R. Wavre arrive, en conclusion, à la valeur:

$$h = \frac{1}{294} .$$

Il est bon de rappeler encore que, d'après M. E. Brown [2], le dénominateur 294 convient bien à la théorie de la Lune. Après la remarquable étude de M. R. Wavre, on peut dire que le « désaccord de Poincaré » n'existe plus. Les géodésiens ont, pendant longtemps, commis l'erreur de négliger, dans les calculs précessionnels et gravifiques, les termes contenant la 4me puissance de la vitesse de rotation de la Terre; contrairement à l'opinion de certains auteurs, ces termes ne sont pas négligeables; et leur prise en considération a permis de donner une solution au problème de d'Alembert.

J'adopterai donc, pour la suite, l'aplatissement $\frac{1}{294}$ proposé par M. R. Wavre. Et nous verrons qu'il permet de rendre compte de la valeur de la densité moyenne superficielle de la Terre ($\rho_1 = 2{,}6$ à $2{,}7$).

§ 2. — Les équations et les surfaces de niveau.

2. — Rappelons d'abord comment le problème se pose, dans l'hypothèse essentielle que la densité croît d'une manière continue, de la surface au centre de la masse terrestre. On sait que la solution du problème relève, en première approximation, de la résolution de l'équation [3] de Clairaut:

$$\frac{d^2 a}{dA^2} + \frac{2\rho A^2}{\int_0^A \rho A^2 \, dA} \cdot \frac{da}{dA} + a \left(\frac{2\rho A}{\int_0^A \rho A^2 \, dA} - \frac{6}{A^2} \right) = 0 , \qquad (1)$$

[1] *Archives* (5) 11, p. 131, 212 et 295 (1929); (5) 12, p. 11 (1930); *Publ. de l'Obs. de Genève*, fasc. 8 et 10.

[2] *London Astron. Soc. Monthly Notices 1915*, p. 508.

[3] F. Tisserand, Traité de mécanique céleste, tome 2.

où A est le rayon équatorial d'une couche de densité ρ (A), a (A) l'aplatissement de cette couche. M. R. Wavre écrit d'ailleurs l'équation de Clairaut sous la forme plus ramassée:

$$2\,\mathrm{D}'a + 6\rho a' + t\mathrm{D}a'' = 0 \ , \qquad (2)$$

où D(t) représente la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t, et où les dérivées sont indiquées par la notation de Newton; cette équation (2) est donnée par la dérivation, par rapport au rayon polaire t, de l'égalité classique:

$$\mathrm{D}(2a + ta') = \frac{15}{8\pi f} + 3\int_t^{t_1} \rho a' dt \ , \qquad (2_1)$$

où t_1 désigne le rayon polaire de la surface libre. D'ailleurs, à l'extérieur de l'astre, où ρ est nulle, cette équation (2_1) s'écrit:

$$ta' + 2a = \frac{5t^3}{2f\mathrm{M}} \ ; \qquad (3)$$

f est la constante de l'attraction universelle. En désignant par k une constante, (3) s'intègre facilement et donne:

$$a = \frac{1}{2f\mathrm{M}}(t^3 - 3kt^{-2}) \ , \qquad ta' = \frac{3}{2f\mathrm{M}}(t^3 + 2kt^{-2}) \ ; \qquad (4)$$

et l'on a, en première approximation:

$$k = -\frac{f}{\omega^2}(\mathcal{C} - \mathcal{A}) \ ,$$

où ω est la vitesse de rotation de la Terre, $\mathcal{A}$ le moment d'inertie de celle-ci par rapport à un diamètre équatorial, et $\mathcal{C}$ le moment d'inertie par rapport à l'axe polaire. On obtient ainsi, en fin de compte, comme valeur numérique de l'aplatissement de la surface libre S_1 de la Terre, la valeur $\frac{1}{297{,}3}$, alors que la géodésie donne $\frac{1}{293{,}5}$.

3. — Posons, avec M. R. Wavre, en gardant les termes de l'ordre de grandeur de ω^4:

$$\left\{\begin{aligned} e &= \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} , \\ e^{(1)} &= e_0^{(1)} + e_2^{(1)} X_2 (\cos\theta) , \\ e^{(2)} &= e_0^{(2)} + e_2^{(2)} X_2 (\cos\theta) + e_4^{(2)} X_4 (\cos\theta) , \end{aligned}\right.$$

où e représente la *déformation* suivant le rayon t:

$$R = t + te = t + \varepsilon ;$$

les X_q sont les polynômes de Legendre.

L'équation de M. Wavre remplaçant, en seconde approximation, l'équation (2_1) de la première approximation s'écrit [1]:

$$\frac{1}{3} D t^{2-q} \left(qe + t \frac{de}{dt} \right) = \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} \left[(2-q) e + t \frac{de}{dt} \right] dt ; \qquad (5)$$

et, pour l'*extérieur* de l'astre, la déformation (e) exprimée en fonction de la colatitude θ devient:

$$\left\{\begin{aligned} e &= \omega^2 \lambda \sin^2\theta (\alpha + \beta\lambda\omega^2 + \gamma\lambda\omega^2 \sin^2\theta) , \\ \alpha &= t^3 - 3kt^{-2} , \\ \beta &= -3kt + 3k_1 t^{-2} + 10k_2 t^{-4} - \frac{9}{7} k^2 t^{-4} , \\ \gamma &= 3t^6 - 3kt - \frac{35}{2} k_2 t^{-4} , \\ \lambda &= \frac{1}{2fM} ; \quad M = \text{masse} ; \end{aligned}\right. \qquad (6)$$

k, k_1 et k_2 sont trois constantes. De sorte qu'en seconde approximation, l'équation de la méridienne de la surface libre S_1 s'écrit:

$$R_1 = t + \lambda t \omega^2 \sin^2\omega (\alpha + \beta\lambda\omega^2 + \gamma\lambda\omega^2 \sin^2\theta) , \qquad (7)$$

qui est de la forme:

$$R_1 = t + m_1 \sin^2\theta - n_1 \sin^2\theta \cos^2\theta .$$

[1] *Archives* (5) 11, p. 131, 212 et 295 (1929); (5) 12 (1930), p. 11; *Publ. de l'Obs. de Genève*, fasc. 8 et 10.

En outre, on trouve que:

$$f \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{A}) = - \omega^2 k + 2\lambda \omega^4 k_1 .$$

Telle est la solution théorique de M. R. Wavre; c'est de là qu'il a tiré la valeur $\frac{1}{294}$ d, l'aplatissement terrestre.

§ 3. — Etude de ρ a l'intérieur du globe.

4. — La densité ρ est une certaine fonction du rayon et de la latitude (la longitude n'entre pas en jeu, les surfaces d'égale densité étant de révolution). Quelle est cette répartition ?

Pour aborder ce problème, nous reprendrons l'équation de Clairaut, qui paraît être suffisante; mais il est bien entendu que nous adopterons la valeur $\frac{1}{294}$ pour l'aplatissement de la surface extérieure S_1 de la Terre.

D'autre part, pour cette même surface S_1, nous prendrons la valeur de seconde approximation de M. R. Wavre pour le rapport φ de la « force centrifuge à l'équateur » à la « pesanteur à l'équateur »; on sait qu'en première approximation, ce rapport vaut:

$$\varphi^{(1)} = \frac{\omega^2 t_1}{g} ;$$

en seconde approximation, il devient, comme l'a montré M. Wavre [1]:

$$\varphi^{(2)} = 2 \wedge [1 + \wedge (5 + 2u)] ,$$

où

$$\wedge = \frac{1}{583,7} ,$$

et où u prendra la valeur approchée 0,980; on trouve:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{288,42} .$$

[1] Loc. cit.

On connaît le procédé de Tisserand pour aborder l'équation de Clairaut; on suppose que la densité ρ est une fonction continue du rayon équatorial A:

$$\rho = \Phi(A) ,$$

et l'on prendra $A = 1$ pour la surface extérieure. Introduisant la fonction $\Phi(A)$ dans l'équation (1), on cherche, de cette dernière, une intégrale particulière b, qui se réduise à l'unité lorsqu'on fait $A = 0$.

L'aplatissement a de la couche considérée est alors donné par:

$$a = Cb + C'b' ,$$

où $C' = 0$, et où la constante C prend la valeur:

$$C = \frac{5\varphi}{4} \cdot \frac{1}{b_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1} ,$$

l'indice (1) se rapportant à la surface extérieure de la planète. On a donc:

$$a = \frac{5\varphi}{4} \cdot \frac{b}{b_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1} . \tag{9}$$

L'aplatissement extérieur est ainsi donné par:

$$a_1 = \frac{5\varphi}{4} \cdot \frac{b_1}{b_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1} . \tag{10}$$

Pour continuer le calcul, on considère $\rho = \Phi(A)$ comme développable suivant les puissances du rayon A:

$$\rho = \rho_0(1 + c_1 A^{x_1} + c_2 A^{x_2} + \ldots) , \qquad x_1 < x_2 < \ldots ,$$

où ρ_0 est la densité au centre du globe; et on arrive à la forme:

$$b = 1 + \frac{6c_1}{(x_1 + 3)(x_1 + 5)} A^{x_1} + \ldots \tag{11}$$

La question importante est donc l'adoption d'une formule donnant le développement de ρ; c'est là une condition indispensable pour pouvoir intégrer complètement l'équation de Clairaut. On a donc été amené à admettre certaines formes simples de $\Phi(A)$.

5. — L'une des plus connues est l'hypothèse de Roche:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta A^2) \ ;$$

les constantes de Roche étaient $\rho_0 = 10{,}6$ et $\beta = 0{,}8$; ce qui donnait $\rho_1 = \rho_0(1 - \beta) = 2{,}1$ comme valeur de la densité superficielle moyenne. Cette valeur n'est pas satisfaisante; elle est trop faible; on sait que la valeur actuellement admise est comprise entre 2,6 et 2,7. Il conviendrait donc, en tout cas, de corriger les deux constantes ρ_0 et β.

Rappelons ici la relation élémentaire:

$$\int_0^1 \rho A^2 dA = \frac{D}{3} \ , \tag{12}$$

où D est la densité moyenne de la Terre ($D = 5{,}52$); on peut ainsi trouver ρ_0.

Dernièrement, M. G. Boaga [1] a essayé l'application d'une formule trimône:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta A^2 + \gamma A^4) \ , \tag{13}$$

avec $\beta = 0{,}901$ et $\gamma = 0{,}127$; il est conduit à:

$$\begin{cases} \rho_0 = 10{,}84 \ , \\ \rho_1 = \ \ 2{,}45 \ ; \end{cases}$$

la densité superficielle est encore un peu faible. D'autre part, l'aplatissement de la surface extérieure obtenu par la formule (13) est alors proche de $\frac{1}{300}$; il est trop faible. Il faut ajouter que M. Boaga a déterminé ses coefficients β et γ de façon à obtenir un aplatissement voisin de la valeur $\frac{1}{297}$; et nous avons

[1] *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 7 juillet 1929.

dit que cette valeur ne correspond pas aux conclusions géodésiques.

Nous verrons d'ailleurs que l'hypothèse de Roche peut pratiquement suffire.

6. — Rappelons encore, pour mémoire, l'hypothèse de Legendre, reprise et discutée par Laplace, et maintenant inacceptable; elle conduirait à un aplatissement de la surface libre beaucoup trop faible $\left(\text{environ } \frac{1}{310}\right)$.

7. — Représentons par R le rayon vecteur d'une surface de niveau dont le rayon équatorial est A; en première approximation, on a l'expression classique:

$$R = A(1 - h \cos^2 \theta) \ , \tag{14}$$

où θ est la colatitude du lieu, et où h n'est fonctions que de A; ces surfaces (14) sont des ellipsoïdes de révolution, dont l'*aplatissement* est h, et dont les demi-axes principaux sont A et $A(1 - h)$; on sait d'ailleurs que la fonction $h(A)$ croît avec A, de sorte que l'aplatissement de ces ellipsoïdes va en croissant lorsqu'on procède du centre à la surface libre.

Considérons maintenant les surfaces de niveau en seconde approximation; soit e la *déformation* de l'une d'entre elles, suivant la notation de M. R. Wavre; et soit $(e_{\frac{\pi}{2}})$ la déformation à l'équateur de l'ellipsoïde voisin ayant même équateur et même pôle, t représentant le rayon vecteur au pôle (donc le petit axe B); $e_{\frac{\pi}{2}}$ est comptée à partir de la sphère de rayon t.

La déformation e est alors exprimée par la formule de M. R. Wavre, au troisième ordre près en $e_{\frac{\pi}{2}}$:

$$e = e_{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta - \frac{3}{2} e^2_{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \ , \tag{15}$$

avec:

$$e = \frac{R - t}{t} = \frac{\varepsilon}{t} \ .$$

Or:

$$e_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A - B}{B} = \frac{A - B}{A(1 - h)},$$

où h représente l'*aplatissement* $\frac{A - B}{A}$; on a donc:

$$e_{\frac{\pi}{2}} = \frac{h}{1 - h} = h + h^2 + h^3 + \dots ;$$

et l'égalité (15) peut s'écrire comme suit, au troisième ordre près de h:

$$e = (h + h^2) \sin^2\theta - \frac{3}{2} h^2 \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta ;$$

$$e = h \sin^2\theta - h^2\left(\frac{3}{2} \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta - \sin^2\theta\right) ; \qquad (15')$$

On trouve donc, pour le méridien de la surface de niveau en seconde approximation, l'expression suivante:

$$R = t + \varepsilon = t + te = t(1 + e) ,$$

$$R = t\left[1 + h \sin^2\theta - h^2\left(\frac{3}{2} \sin^2\theta \cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] .$$

Or, à l'équateur, on a:

$$R = A \qquad \text{et} \qquad \theta = 90° ;$$

d'où:

$$A = t[1 + h + h^2] ;$$

$$t = \frac{A}{1 + h + h^2} = A(1 - h + h^3 - h^4 + h^6 - \dots) ;$$

$$t = B = A(1 - h) ;$$

$$R = A(1 - h)\left[1 + h \sin^2\theta - h^2\left(\frac{3}{2} \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] ;$$

et, en s'arrêtant aux termes en h^2:

$$R = A\left[1 - h \cos^2\theta - \frac{3}{2} h^2 \sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta\right] ; \qquad (16)$$

En comparant (16) à (14), on voit bien clairement la correction de seconde approximation.

Maintenant, h est fonction de A; nous le déterminerons en repartant de l'équation de Clairaut.

8. — Soit donc l'équation de Clairaut:

$$\frac{d^2h}{dA^2} - \frac{6h}{A^2} + \frac{2\rho A}{\int_0^A \rho A^2 dA}\left(\frac{A\,dh + h\,dA}{dA}\right) = 0 \,. \qquad (1)$$

Reprenons ici l'hypothèse de Roche:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta A^2) \;;$$

l'équation (1) devient:

$$\frac{d^2h}{dA^2} + \frac{30(1-\beta A^2)}{A(5-3\beta A^2)} \cdot \frac{dh}{dA} - \frac{12\beta h}{5-3\beta A^2} = 0 \,. \qquad (1')$$

On peut poser $\beta A^2 = x^2$, ce qui conduit à l'équation:

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{30(1-x^2)}{x(5-3x^2)} \cdot \frac{dh}{dx} - \frac{12h}{5-3x^2} = 0 \;; \qquad (17)$$

et comme $x < 1$, h pourra être représenté par une série convergente suivant les puissances croissantes de x, série valable pour tout l'intérieur du globe jusqu'à la surface libre inclusivement.

Posons donc:

$$h = h_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots \;;$$

on a:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dx} = m_1 + 2m_2 x + 3m_3 x^3 + 4m_4 x^3 + 5m_5 x^4 + \ldots \;; \\[2ex] \dfrac{d^2h}{dx^2} = 2m_2 + 6m_3 x + 12m_4 x^2 + 20m_5 x^3 + 30m_6 x^4 + \ldots \;; \end{cases}$$

en portant ces expressions dans (17) et en identifiant les coefficients des deux membres, on trouve:

$$\begin{cases} m_1 = m_3 = m_5 = m_7 = m_{2i+1} = 0 \;; \\[2ex] m_2 = \dfrac{6}{35} h_0 \;; \quad m_4 = \dfrac{13}{175} h_0 \;; \quad m_6 = \dfrac{52}{1375} h_0 \;; \quad m_8 = \dfrac{141}{6875} h_0 \;; \\[2ex] m_{10} = \dfrac{1974}{171875} h_0 \;; \quad \ldots\ldots \;; \end{cases}$$

comme on le verrait aussi en partant de l'expression (11) de Tisserand.

En prenant $h_0 = 1$, et avec $x^2 = \beta A^2$, on obtient une solution particulière b de l'équation de Clairaut:

$$b = 1 + \frac{6}{35}\beta A^2 + \frac{13}{175}(\beta A^2)^2 + \frac{52}{1375}(\beta A^2)^3 + \frac{141}{6875}(\beta A^2)^4 + \frac{1974}{171875}(\beta A^2)^5 + \ldots \qquad (18)$$

et la solution générale sera, comme on sait:

$$h = Cb = \frac{5\varphi}{4} \cdot \frac{b}{b_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1} .$$

A la surface libre, il vient:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1 = b_1\left(\frac{5\varphi}{4h_1} - 1\right) ;$$

en prenant les valeurs de seconde approximation de M. R. Wavre:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{288,42} ; \qquad h_1^{(2)} = \frac{1}{294} ,$$

on a:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1 = 0,274\, b_1 . \qquad (19)$$

D'autre part, on connaît la relation fondamentale:

$$\frac{\int_0^1 \rho A^2 dA}{\int_0^1 \rho A^4 dA} = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{A}} \cdot \frac{1}{h_1 - \frac{\varphi}{2}} , \qquad (20)$$

où l'on fera:

$$\frac{\mathcal{A} - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{1}{305,1} , \qquad h_1^{(2)} = \frac{1}{294} , \qquad \frac{\varphi^{(2)}}{2} = \frac{1}{576,84} ;$$

avec $\rho = \rho_0 (1 - \beta A^2)$, on obtient de (20):

$$\frac{\int_0^1 (1 - \beta A^2) A^2 dA}{\int_0^1 (1 - \beta A^2) A^4 dA} = 1{,}9662 \text{ [1]} ;$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\beta = (1{,}9662)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\beta\right) ;$$

$$\beta = 0{,}740 .$$

Il vient donc:

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 - 0{,}740 A^2) ; \\ b_1 &= 1 + 0{,}1269 + 0{,}0407 + 0{,}0153 + 0{,}0062 \\ &\qquad + 0{,}0025 + 0{,}0010 + \ldots = 1{,}1930 ; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dA}\right)_1 &= (0{,}274)(1{,}1930) = 0{,}3269 ; \end{aligned}\right.$$

et finalement:

$$h = 0{,}00285 (1 + 0{,}1269 A^2 + 0{,}0407 A^4 + 0\ 0153 A^6 + 0{,}0062 A^8 + \ldots) . \qquad (21)$$

En faisant A = 1 dans (21), on trouve bien:

$$h_1 = 0{,}00285 (1{,}1930) = 0{,}003400 , \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{294} .$$

9. — Reprenons maintenant la relation (12):

$$\int_0^1 \rho A^2 dA = \frac{D}{3} = \frac{5{,}52}{3} = 1{,}84 .$$

En remplaçant, dans le premier membre, ρ par $\rho_0(1 - 0{,}740 A^2)$, il vient:

$$\rho_0\left(\frac{1}{3} - \frac{0{,}740}{5}\right) = 1{,}84 = 0{,}1853 \rho_0 ;$$

$$\rho_0 = 9{,}93 ;$$

[1] Ce rapport valait 2,02 avec les anciennes données de h et φ.

et enfin:

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - 0{,}740) = (9{,}93)(0{,}260) \rightarrow 2{,}6 \ ,$$

résultat qui s'accorde bien avec la valeur actuellement adoptée pour la densité moyenne superficielle. Les valeurs numériques obtenues jusqu'ici sont donc d'accord avec l'expérience; seule, la valeur ρ_0 ne peut être contrôlée.

10. — Reprenons les expressions (16) et (21):

$$R = A \left[1 - h \cos^2 \theta - \frac{3}{2} h^2 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta \right] , \qquad (16)$$

$$h = 0{,}00285 \, [1 + 0{,}1269 \, A^2 + 0{,}0407 \, A^4 + 0{,}0153 \, A^6 + 0{,}0062 \, A^8 + \ldots] \ . \qquad (21)$$

On en tire l'égalité suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} R = {} & A (1 + 0{,}00285 \cos^2 \theta - 0{,}0000122 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta) \\ & + A^3 (0{,}0003617 \cos^2 \theta - 0{,}0000030 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta) \\ & + A^5 (0{,}0001160 \cos^2 \theta - 0{,}0000012 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta) \\ & + A^7 (0{,}0000436 \cos^2 \theta - 0{,}0000005 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta) \\ & + A^9 (0{,}0000117 \cos^2 \theta - 0{,}0000002 \sin^2 \theta \, . \, \cos^2 \theta) \\ & + A^{11} (0{,}0000072 \cos^2 \theta - 0{,}0000001 \sin^2 \theta . \cos^2 \theta) \\ & \qquad + 0{,}0000029 \cos^2 \theta \, A^{13} + 0{,}0000009 \cos^2 \theta \, A^{15} \end{aligned} \right. \qquad (22)$$

d'où l'on pourra déduire A en série de puissances croissantes de R, par un calcul de retour de série; et, portant cette expression de A dans la formule de Roche, on aura ρ en fonction de R et θ.

Mais il est préférable de procéder par approximations successives pour calculer la valeur de ρ en un point donné (R, θ); on choisit une valeur approximative $h \leq h_1$; on en déduit, par (16), une première valeur approchée de A; celle-ci, portée dans (21), fournit une nouvelle valeur de h; d'où, par (16), une meilleure approximation de A; et ainsi de suite; deux ou trois essais donneront la valeur définitive de A; et l'on portera cette dernière dans:

$$\rho = \rho_0 (1 - 0{,}740 \, A^2) \ .$$

Remarque. — On a d'ailleurs aussi:

$$A = R\left[1 + h\cos^2\theta + h^2\cos^2\theta\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right],$$

$$A^2 = R^2[1 + 2h\cos^2\theta + h^2(3\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta)],$$

$$\rho = \rho^0[1 - 0{,}740\,R^2(1 + 2h\cos^2\theta + 3h^2\cos^2\theta + h^2\sin^2\theta\cos^2\theta)]\,; \qquad (23)$$

formule qui peut être commode dans certains cas.

11. — En résumé, par l'adoption des valeurs $h_1^{(2)} = \frac{1}{294}$ et $\varphi^{(2)} = \frac{1}{288{,}42}$ de seconde approximation, et en conservant pour la suite l'équation de Clairaut et l'hypothèse de Roche, on obtient une valeur numérique convenable (2,6) de la densité moyenne superficielle de la Terre.

Quant à la densité centrale trouvée (9,9), elle est un peu plus faible que celle indiquée par certains auteurs (10,5 ou 10,8); mais ces valeurs sont incontrolables.