# Application de la méthode de la cavité à certains mouvements de seconde espèce (note présentée par M. Wavre)

Autor(en): **Danoz, N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **12 (1930)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741282

voisin de 5°, ce qui correspond bien aux constatations expérimentales [1].

D'autre part, résultat imprévu, le calcul a montré que l'âge de la verrue asiatique est d'un ordre de grandeur égal à 1,4 milliard d'années, dans l'hypothèse où cette verrue, une fois constituée, n'aurait pas subi de modifications.

Il va sans dire que cette dernière hypothèse est gratuite; des bouleversements peuvent avoir, à certaines époques, modifié plus ou moins le relief de cette partie du globe; la verrue peut avoir été plus saillante à certains moments, ou moins importante à d'autres moments; il se peut même qu'elle ait été effacée complètement pendant quelques millions d'années, comme cela semble bien avoir été le cas, si l'on en juge par la présence de dépôts marins sur le plateau. Nous laissons ces points d'histoire géologique de côté. Il suffit que nous ayons trouvé l'ordre de grandeur de l'âge de la verrue, dans l'hypothèse où aucun changement ne serait survenu depuis la formation. Or, ce qu'il y a d'intéressant ici, c'est que cet ordre de grandeur (1,4 milliard d'années) est en accord avec les résultats obtenus par les recherches de radio-activité; on a trouvé en effet que la durée nécessaire pour que la croûte terrestre ait acquis sa constitution chimique actuelle, à partir de l'uranium et du thorium, est comprise entre 2 et 8 milliards d'années. L'âge que nous avons trouvé pour la verrue asiatique est compatible avec cette durée.

**N. Danoz.** — *Application de la méthode de la cavité à certains mouvements de seconde espèce.* (Note présentée par M. Wavre).

Dans ses récents travaux [2], M. Wavre a donné une belle méthode qui permet de résoudre avec rigueur le problème des figures planétaires. Cette méthode, dite de la cavité, ne s'applique pas seulement au cas de l'équilibre relatif; elle est plus générale; elle s'étend encore, M. Wavre l'a montré [3], à tout mouvement de seconde espèce.

[1] J. Hann. *Klimatologie.* III.
[2] Archives des Sciences physiques et naturelles: V. 11, 1929.
[3] Compte rendu des séances V. 47, N° 1, Janvier-Mars 1930.

Proposons-nous de déterminer, en première approximation, la forme de la surface libre d'une planète telle que l'équateur tourne plus vite que les calottes polaires, et supposons que la vitesse angulaire soit représentée par la fonction.

$$\omega^2(l^2) = \omega_0^2 + \omega_1^2 l^2 \tag{1}$$

$\omega_0$ et $\omega_1$ sont des constantes, $l$ désigne la distance d'une particule à l'axe polaire.

Nous conserverons partout les mêmes notations que celles que M. Wavre a employées dans ses quatre derniers mémoires aux Archives des Sciences physiques et naturelles.

Les équations fondamentales qui régissent les rotations permanentes de genre un, sont, dans cette hypothèse l'équation analogue à celle de Poincaré:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int g\,dS + i\int\int\int \rho\,dZ = iM - \frac{2}{3}\omega_0^2 t^3 - \frac{8}{15}\omega_1^2 t^5 \tag{2}$$

et celle de M. Wavre:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{g}{r}\,dS + i\int\int\int \frac{\rho}{r}\,dZ$$

$$= U_0 - \omega_0^2\left[t^2 - \frac{1}{3}X_2\tau^2\right] - \omega_1^2\left[\frac{2t^4}{3} - \frac{4t^2}{15}X_2\tau^2 + \frac{2}{35}X_4\tau^4\right] \tag{3}$$

équation dans laquelle l'intégrale $\int\int\int \frac{l^2}{r}\,dc$ a été remplacée par sa valeur donnée dans la note précédente.

Soient $\tau$ et $t'$ les distances à l'origine O des points potentié et potentiant et $r$ la distance de ces deux points.

L'équation 3) doit être satisfaite quelle que soit la position du point P $(\tau, \theta)$ dans la cavité.

Remplaçons, dans cette équation, $\frac{1}{r}$ par son développement en série

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t'}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t'}\right)^q X_q(\cos\gamma)$$

et annulons tous les coefficients des puissances de $\tau$. Après avoir posé

$$e = \omega_0^2 e^{1,1} + \omega_1^2 e^{1,2}$$

$$U_0 = U_0^{(0)} + \omega_0^2 U_0^{1,1} + \omega_1^2 U_0^{1,2}$$

$$g_0 = g_0^{(0)} + \omega_0^2 g_0^{1,1} + \omega_1^2 g_0^{1,2}$$

nous réunirons les équations obtenues en un tableau. Ces équations contiennent des termes en $\omega_0^2$, des termes en $\omega_1^2$, et des termes indépendants de $\omega_0^2$ et de $\omega_1^2$. L'identification des termes en $\omega_0^2$ donnera les résultats obtenus par M. Wavre dans l'étude de l'équilibre relatif. Nous procéderons ensuite à l'identification des termes en $\omega_1^2$. Puis, après avoir remplacé la déformation $e$ par un développement en série de fonctions sphériques.

$$e = \sum_{q=0}^{\infty} e_q(t)\, X_q(\cos\theta) + \text{autres fonctions sphériques} \ ,$$

et en tenant compte des relations d'orthogonalité des fonctions sphériques fondamentales et des polynomes de Legendre, nous trouvons le système:

$$\frac{D}{3} t^{2-q}(qe + te') - \int_t^{t_1} \rho t^{1-q}[(2-q)e^{1,2} + te']dt =$$

$$= \frac{|2q+1|}{4\pi i} \times \begin{cases} g_0^{1,2} t^2 + \dfrac{8}{15} t^5 & \text{pour } q = -1 \\ -U_0^{1,2} + g_0^{1,2} t + \dfrac{2}{3} t^4 & \text{»} \quad q = 0 \\ -\dfrac{4}{15} t^2 & \text{»} \quad q = 2 \\ \dfrac{2}{35} & \text{»} \quad q = 4 \\ 0 & \text{»} \quad q = 1, 3, 5, 6 \ldots \end{cases} \qquad (4)$$

pour $e = e^{1,2}$.

La discussion de ces équations est analogue à celle que M. Wavre a établie dans l'étude de l'équilibre relatif, en seconde approximation. Elle permet de montrer que les surfaces d'égale densité sont de révolution. La résolution de ces équations, pour l'extérieur et sur la surface libre, permet d'écrire la déformation sous la forme.

$$e = \lambda[\omega_0^2 \alpha + \omega_1^2(\beta_1 + \gamma_1)] \sin^2\theta - \lambda\omega_1^2\gamma_1 \sin^2\theta \cos^2\theta \tag{5}$$

où les trois fonctions de $t$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ont les valeurs suivantes:

$$\alpha = t^3 - 3kt^{-2} \; ; \qquad \beta_1 = -3k_1 t^{-2} - 10k_2 t^{-4} \; ;$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{2}t^5 + \frac{35}{4}k_2 t^{-4} \; ;$$

$k$, $k_1$ et $k_2$ sont des constantes d'intégration.

A l'intérieur, la déformation s'écrit:

$$e = \left[\omega_0^2 a - \omega_1^2\left(\frac{3}{2}e_2^{1,2} + \frac{5}{8}e_4^{1,2}\right)\right] \sin^2\theta - \omega_1^2\frac{35}{8}e_4^{1,2} \sin^2\theta \cos^2\theta \; . \tag{6}$$

Si nous mettons en évidence, dans l'expression de la déformation, une partie provenant d'un ellipsoïde ayant même équateur et mêmes pôles que la surface libre, et la correction à faire subir à cet ellipsoïde pour retrouver la surface réelle, l'étude de l'équation correspondant à $q = 4$ du système 4)

$$4e_4 + te_4' = \frac{3}{D}t^2\int_t^{t_1} \rho t^{-3}[-2e_4 + te_4']dt + \frac{27t^2}{70D\pi i}$$

permettra de déterminer le signe de cette correction et d'arriver aux conclusions suivantes:

I. Si l'équateur d'une planète tourne plus vite que les calottes polaires et si la vitesse angulaire peut être représentée par l'expression $\omega^2(l^2) = \omega_0^2 + \omega_1^2 l^2$, c'est le cas du Soleil, semble-t-il, nous pourrons affirmer qu'en première approximation:

1° la surface libre est un ellipsoïde comprimé entre le pôle et l'équateur;

2° cette compression diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces intérieures voisines.

II. Si l'équateur tourne moins vite que les calottes polaires, en remplaçant $\omega_1$ par $\sqrt{-1}\,\omega_1$ dans le problème précédent, nous obtiendrons les résultats suivants :

1º La surface libre est un ellipsoïde dilaté entre le pôle et l'équateur.

2º Cette dilatation diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces intérieures voisines.

## Séance du 3 juillet 1930.

**H. Decker.** — *Système des combinaisons organiques.*

L'auteur développe le système naturel des composés organiques, dont il a donné les principes il y a quelques années dans les Helvetica chimica Acta. Les dérivés contenant oxygène ou azote trouvent leur place dans le système par l'emploi des coordonnées à trois dimensions. Il se forme donc un réseau plan qui contient par exemple tous les alcools, un autre qui contient tous les glycols, etc. De cette manière l'édifice des combinaisons organiques que Gérard a entrevu il y a 80 ans est réalisé.

M. Decker montre qu'on peut constituer ces surfaces au moyen de cubes pareils aux cubes avec images employés pour les jeux d'enfants. En tournant les cubes, les surfaces correspondant aux dérivés mono-oxygénés, di-oxygénés, etc., apparaissent. Il parle d'une série d'hydrocarbures contenant le squelette atomique qui a été trouvé dans le diamant, commençant par le Cyclohexane $C_6H_{12}$, le Dicyclononane $C_9H_{16}$ et un hydrocarbure non réalisé encore $C_{14}H_{20}$. Ces hydrocarbures forment une série parabolique qui doit produire dans les termes plus élevés des substances ressemblant de plus en plus par leurs propriétés physiques au diamant.

D'autre part, il est probable que les particules des diamants les plus petites que nous connaissons ne contiennent pas à leur surface des valences libres, mais des groupes oxhydriles ou d'hydrogène, mais vu que les atomes de la surface ne représentent qu'une partie minimale de la molécule, leur