

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 14 (1932)

Artikel: Sur les polydromies des potentiels : esquisse d'une théorie générale
Autor: Wavre, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-740789>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES POLYDROMIES DES POTENTIELS

Esquisse d'une théorie générale

PAR

R. WAVRE

Soit R une répartition de matières, homogène, et limitée entre autres par une portion σ de surfaces. Soient P un point voisin de σ et situé hors de R et Q un point voisin dans R , soit enfin, U le potentiel newtonien créé par R . L'on sait que si σ est régulière et analytique, le potentiel $U(P)$ en P se prolonge au travers de σ ; soit alors $U(P)_Q$ son prolongement calculé en Q . Nous appellerons fonction barrière relative à σ l'expression suivante:

$$f_\sigma = U(P)_Q - U(Q) ,$$

différence du potentiel extérieur prolongé et du potentiel intérieur. Elle est nulle sur σ en vertu de la continuité de U et analytique du côté de R . Elle est donc analytique encore d'après un théorème connu du côté extérieur. Si l'on passe maintenant de Q en P par le même chemin, la relation précédente donne:

$$-f_\sigma = U(Q)_P - U(P) ;$$

f_σ sera dite la fonction d'entrée et $-f_\sigma$ fonction de sortie au travers de σ . La fonction barrière f_σ ne dépend que des matières situées sur un circuit infinitésimal joignant un point P à un point Q . En effet, les matières R' non situées sur le circuit

donnent une fonction barrière nulle, car le potentiel est harmonique le long du trajet et l'on a :

$$0 = U'(P)_Q - U'(Q) .$$

L'on pourra donc calculer la fonction barrière relative à σ en prenant un corps, d'une forme favorable pour le calcul, s'appuyant à σ . La fonction barrière ne tend pas vers zéro lorsque le corps devient infinitésimal.

Hypothèse H. Nous admettons que les fonctions barrière n'ont que des singularités polaires dans tout l'espace réel.

Hypothèse H Δ . Les fonctions barrière n'admettent que des singularités polaires dans un domaine Δ de l'espace réel. Nous verrons que les plans et les sphères satisfont à l'hypothèse H.

Le potentiel $U(Q)$ est analytique et holomorphe dans tout domaine d'un seul tenant faisant partie de R . Dès lors, en vertu de l'hypothèse H, le potentiel à l'extérieur $U(P)$ est prolongeable analytiquement au travers de σ dans tout le domaine d'un seul tenant R_σ limité par σ . L'on a en effet :

$$U(P)_Q = f_\sigma + U(Q) ,$$

et les deux termes du second membre sont bien prolongeables dans R_σ . Soient alors Σ, Σ', \dots les surfaces limitant R et supposons que pour chacune d'elles l'hypothèse H soit vérifiée. L'on pourra écrire pour la sortie de R au travers de Σ' :

$$U(Q')_{P'} = -f_{\Sigma'} + U(P') .$$

Mais $U(Q')$ est le prolongement de $U(Q)$. L'on aura par conséquent, si l'on est entré par Σ , ressorti par Σ' :

$$\begin{aligned} U(P) \rightarrow U(P)_Q = f_\Sigma + U(Q) \rightarrow f_\Sigma \\ + U(Q') \rightarrow f_\Sigma - f_{\Sigma'} + U(P') ; \end{aligned}$$

une flèche indique un prolongement analytique, et si l'on rentre dans R par Σ'' l'on aura évidemment :

$$U(P) \rightarrow f_\Sigma - f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} + U(Q') .$$

D'une manière générale, le prolongement de $U(P)$ le long d'un certain chemin qui joint P à M donne lieu à la relation :

$$U(P)_M - U(M) = f_{\Sigma} - f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} - f_{\Sigma'''} + \dots$$

L'on peut ainsi gagner un point quelconque M pourvu que le chemin évite les arêtes de la frontière du corps, intersections des surfaces Σ car, sur ces intersections, les fonctions barrière ne peuvent plus être définies par des surfaces σ analytiques et régulières. La fonction harmonique ainsi définie dans tout l'espace est multiforme, elle admet une infinité de branches qui s'échangent entre elles autour des arêtes. Ces dernières sont des lignes de ramification. En effet, si Σ et Σ' sont deux portions de frontière qui se coupent suivant une arête A , un circuit entrant par Σ et sortant par Σ' donnera une fonction période :

$$\omega_A = U(P)_P - U(P) = f_{\Sigma} - f_{\Sigma'}$$

Si l'on décrit le circuit n fois dans le même sens, l'on aura :

$$U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = n \omega_A$$

Si le circuit est décrit en sens inverse, la période fondamentale pour l'arête est évidemment $-\omega_A$.

Soient R_1, R_2, \dots les domaines d'un seul tenant et sans surface frontière commune en lesquels se répartit la matière R . Soient encore D_1, D_2, \dots les domaines d'un seul tenant sans frontière commune en lesquels se répartit l'ensemble des points qui ne font pas partie de R . Les premiers domaines comme les seconds ne peuvent avoir entre eux que des arêtes communes.

Le potentiel U calculé dans D_1 appartiendra à la même fonction multiforme que le potentiel D_2 s'il existe un chemin joignant D_1 à D_2 et tel que l'on ait :

$$f_{\Sigma} - f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} - f_{\Sigma'''} + \dots = 0$$

Cela se produit notamment si l'on entre de D_1 dans R par Σ , pour ressortir la première fois par Σ en pénétrant dans D_2 , car l'on aura alors $f_{\Sigma} - f_{\Sigma}$. Le potentiel dans un domaine R_i

jouit évidemment des mêmes propriétés de polydromie que le potentiel à l'extérieur de R_i précédemment étudié, car l'on a :

$$U(Q)_P = -f_\Sigma + U(P) .$$

L'on prouverait de même :

$$U(Q)_M - U(M) = -f_\Sigma + f_{\Sigma'} - f_{\Sigma''} + \dots .$$

Ici encore les deux déterminations principales du potentiel dans R_i et R_k appartiendront à la même fonction multiforme si ces deux domaines peuvent être reliés par un chemin tel que la somme algébrique des fonctions barrière soit nulle.

Par exemple deux domaines R_i et R_k qui s'appuient à la même surface analytique Σ rentreront dans le cas envisagé s'il est possible de les relier par un chemin traversant Σ à la sortie de R_i et à l'entrée dans R_k sans avoir rencontré d'autres matières.

Si c'est l'hypothèse $H\Delta$ pour toutes barrières qui est réalisée et que Δ contienne toutes les frontières à son intérieur, les mêmes conclusions subsistent, à part ceci, c'est qu'en dehors de Δ , les singularités les plus diverses peuvent se présenter.

Nous pouvons donc formuler la proposition suivante: *Soit Δ un domaine d'un seul tenant contenant à son intérieur une répartition homogène R de matières limitée par des surfaces Σ telles que les fonctions barrières f_Σ n'aient que des singularités polaires dans Δ .*

Le potentiel U créé par R et calculé au voisinage d'un point n'est qu'une branche d'une fonction multiforme qui admet les arêtes de R comme ligne de ramification et aucune autre singularité dans Δ que des pôles.

Les potentiels physiques dans deux régions de R appartiendront à la même fonction harmonique multiforme s'il est possible de relier les deux domaines par un chemin le long duquel la somme algébrique des fonctions barrière est nulle. Il en est de même pour deux domaines distincts extérieurs aux masses.

Avant de passer aux exemples qui concrétiseront la théorie précédente, examinons le cas des *potentiels de simple couche*.

Soit Σ une couche analytique, c'est-à-dire une surface régu-

lière et analytique, chargée d'une densité analytique. Soient i et e les deux côtés de la surface. On sait que le potentiel $U(i)$ du côté i se prolonge au travers de Σ . Il en est de même du potentiel du côté e . La fonction barrière pour le passage de i à e au travers de Σ sera définie par l'équation suivante :

$$f_{\Sigma} = U(i)_e - U(e) .$$

Elle ne dépend encore ici que d'une portion infinitésimale de Σ que le trajet traverse. Le passage de e à i donne évidemment $-f_{\Sigma}$. La fonction f_{Σ} nulle sur Σ est holomorphe dans un domaine qui contient à son intérieur tout point intérieur de Σ . Nous dirons qu'une fonction barrière satisfait à l'hypothèse $H\Delta$, si elle n'admet que des pôles dans la région Δ . Envisageons alors une famille de couches analytiques telle que les fonctions barrière $f_{\Sigma}, f_{\Sigma'}, \dots$ satisfassent toutes à une hypothèse $H\Delta$ relative à un même domaine Δ , qui contient toutes les couches à son intérieur et est d'un seul tenant. Partons du potentiel total U du côté i de Σ . Après avoir traversé Σ , l'on aura :

$$U(i)_e = f_{\Sigma} + U(e) .$$

Si l'on traverse ensuite Σ' en restant dans Δ , l'on aura, en M :

$$f_{\Sigma} - f_{\Sigma'} + U(M) ,$$

et, d'une manière générale, si l'on va de P en M, en traversant $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots$ l'on aura :

$$U(P)_M - U(M) = f_{\Sigma} + f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} + \dots .$$

Le potentiel $U(P)$ est prolongeable au travers de toutes les couches, il représente dans Δ une fonction harmonique multiforme. Il n'admet que des pôles dans Δ à part les lignes d'intersection des surfaces Σ ou leur frontière qui sont des lignes de ramifications. Les potentiels dans deux domaines D_i et D_h distincts appartiendront à la même fonction harmonique multiforme s'ils peuvent être reliés par un chemin tel que la somme algébrique des fonctions barrières soit identiquement nulle.

Détermination de quelques fonctions barrières.

1° Une couche sphérique homogène S crée à l'extérieur un potentiel égal à $\frac{m}{r}$ et à l'intérieur $\frac{m}{a}$ où a est le rayon de la sphère, m la masse totale et r la distance au centre. La fonction barrière pour cette couche est donc :

$$f_s = \frac{m}{a} - \frac{m}{r} .$$

2° Envisageons une répartition de matières M située hors d'un domaine Δ et une surface de niveau N pour cette répartition traversant Δ . Le potentiel :

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} dN$$

pour une couche de Robin étalée sur N est comme on le sait constant à l'intérieur de N et égal à V à l'extérieur de N. La fonction barrière est donc ici :

$$f_N = K - V ,$$

elle satisfait à l'hypothèse $H\Delta$ dans Δ , mais admet dans M, des singularités diverses.

3° Le potentiel d'une sphère pleine de rayon a est à l'extérieur :

$$\frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{r} \quad \text{et à l'intérieur} \quad 2\pi a^2 - \frac{2}{3} \pi r^2 .$$

La fonction barrière pour l'entrée dans une masse sphérique de rayon a est donc :

$$f^a = \frac{4}{3} \pi \frac{a^3}{r} - 2\pi a^2 + \frac{2}{3} \pi r^2 ,$$

L'on démontre facilement que si la masse est à l'extérieur de cette sphère, la fonction pour l'entrée est encore f^a .

4° *L'entrée par un plan.* Considérons une demi-sphère pleine (1) et soit (2) la région symétrique. Soit enfin h_0 une fonction

prenant, sur le plan de séparation $z = 0$, les valeurs du potentiel de la sphère totale divisées par 2 :

$$h_0 = \pi a^2 - \frac{\pi}{3} (x^2 + y^2) ,$$

Envisageons maintenant la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs que la précédente pour $z = 0$ et symétrique par rapport à ce plan ; on démontre qu'elle est unique et que c'est :

$$h = \pi a^2 - \frac{\pi}{3} (r^2 - 3z^2) .$$

Posons :

$$f_{(Q)}^{(1)} = U^{(1)}(P) - h(P) \quad \text{et} \quad f_{(Q)}^{(2)} = h(Q) - U^{(2)}(Q) ;$$

$f^{(1)}$ est harmonique dans (2), $f^{(2)}$ dans (1) et l'on a, aux points symétriques :

$$f^{(1)}(x, y, -z) = -f^{(2)}(x, y, z) ,$$

puis :

$$f^{(1)}(x, y, 0) = f^{(2)}(x, y, 0) = 0 .$$

Ces deux fonctions $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont le prolongement analytique l'une de l'autre en vertu du principe de la symétrie de Schwarz, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} U^{(1)}(P) = f^{(1)} + h &\rightarrow f^{(2)} + h = -U^{(2)} + 2h \\ &= U^{(1)}(Q) + 2h - U_{(U)}^{(1)+(2)} . \end{aligned}$$

La fonction barrière pour l'entrée par un plan $z = 0$ est donc :

$$f_{z=0} = U^{(1)}(P)_Q - U^{(1)}(Q) = 2\pi z^2 .$$

Elle est égale à 2π qui multiplie le carré de la distance au plan. Elle est holomorphe dans tout l'espace.

Exemples de polydromie. a) Des polyèdres (qui peuvent admettre des cavités et être emboîtés les uns dans les autres) engendrent un potentiel newtonien U qui prolongé au travers du corps donne :

$$U(P)_M - U(M) = 2\pi (d_1^3 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^1 + \dots) ,$$

les d étant les distances au plan traversé par le chemin PM considéré; la période pour une arête i, j est donc $2\pi(d_i^2 - d_j^2)$.

Les polyèdres engendrent un potentiel newtonien qui est une fonction harmonique multiforme dont les branches s'échangent autour des arêtes et cette fonction n'admet dans tout l'espace réel aucune autre singularité que ces lignes de ramification là.

b) La région d'une sphère massive située d'un même côté d'un plan sécant engendre un potentiel qui admet pour l'arête A de ce corps une fonction période égale à:

$$\omega_A = 2\pi d^2 - \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{r} + 2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2,$$

d est la distance au plan et a le rayon de la sphère. Cette fonction période ne tend pas vers zéro avec le volume générateur, j'entends ce segment sphérique.

c) Envisageons une calotte sphérique homogène limitée par une courbe fermée Γ tracée sur la sphère et considérons un circuit tracé autour de Γ . La fonction période sera, puisqu'on ne traverse que la calotte et une seule fois:

$$\omega_\Gamma = \frac{m}{a} - \frac{m}{r}.$$

d) Prenons deux sphères pleines moins leurs parties communes. La fonction période sera, pour l'arête A intersection des surfaces sphériques:

$$\begin{aligned} \omega_A = 2(f^{a_2} - f^{a_1}) &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a_1^3}{r_1} - \frac{a_2^3}{r_2} \right) \\ &+ 2\pi(a_2^2 - a_1^2) + \frac{2\pi}{3}(r_1^2 - r_2^2), \end{aligned}$$

a_1 et a_2 étant les rayons des sphères. Il est possible de montrer que le potentiel dans la région extérieure aux deux sphères n'appartient pas à la même fonction multiforme que le potentiel dans la région intérieure aux deux sphères.

e) Enfin, envisageons un homoïde sphérique c'est-à-dire la région comprise entre deux sphères concentriques, puis un second homoïde qui coupe le premier et enfin l'anneau commun aux deux homoïdes. Il engendre un potentiel qui admet les

4 arêtes x, y, z, t de l'anneau comme lignes de ramification et à par cela uniquement des pôles au centre des sphères. Les fonctions période pour les arêtes sont, si b_1, b_2 sont les rayons des sphères extérieures; a_1, a_2 des sphères intérieures:

$$\begin{aligned}\omega_x &= f^{b_2} - f^{a_1}, & \omega_y &= f^{a_1} - f^{b_2}, & \omega_z &= f^{a_2} - f^{a_1}, \\ \omega_t &= f^{b_1} - f^{a_2}.\end{aligned}$$

f) Envisageons maintenant les deux homoïdes réunis, l'anneau n'étant pris qu'une seule fois. Le corps est alors homogène. Les périodes pour les arêtes de l'anneau, qui sont encore ici les seules arêtes du corps, sont:

$$-\omega_x, \quad -\omega_y, \quad -\omega_z, \quad -\omega_t$$

le sens de parcours des lacets étant resté le même.

Actuellement: les potentiels physiques dans les quatre régions contiguës au corps et séparées par ce dernier appartiennent à la même fonction harmonique multiforme, en vertu d'un principe exposé précédemment.

Autre manière de former des fonctions barrières.

On peut imaginer une simple couche telle que la fonction barrière soit égale à une fonction harmonique donnée $H(x, y, z)$ à une constante près, et faire passer la couche par un point donné arbitrairement, ou la faire aboutir à ce point, pourvu qu'il se trouve dans une région où H est harmonique.

En effet, soit x_0, y_0, z_0 le point donné et envisageons une surface ouverte σ donnée par l'équation:

$$h(x, y, z) = H(x, y, z) - H(x_0, y_0, z_0).$$

Prenons sur σ une densité égale à:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dn},$$

et formons le potentiel de simple couche:

$$U = \int \frac{\rho}{r} d\sigma.$$

Je dis qu'il satisfait à la condition. En effet, soit f_σ la fonction barrière on aura sur σ :

$$f_\sigma = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{df_\sigma}{dn} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

d'où:

$$f_\sigma = h \quad \text{et} \quad \frac{df_\sigma}{dn} = \frac{dh}{dn}$$

sur σ , puis dans le voisinage:

$$\Delta f_\sigma = 0, \quad (3)$$

comme d'ailleurs $\Delta h = 0$. Or en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska, l'on doit avoir $f_\sigma \equiv h$.

On peut former les fonctions barrière à partir des conditions (1), (2), (3). Envisageons *un plan homogène*. Prenons-le pour plan des x, y . On devra avoir:

$$f_\sigma = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

mais (1) donne $a_0 = 0$, (3) donne $a_2 = a_3 = \dots = 0$ et (2) donne $a_1 = 4\pi\rho$. La fonction barrière pour un plan homogène que l'on traverse dans le sens des z positifs est donc:

$$f = 4\pi\rho z.$$

On vérifie facilement que pour une *surface cylindrique de révolution*, de rayon a , la fonction barrière est:

$$f_\sigma = 4\pi\rho a L \frac{z}{a},$$

où l est la distance à l'axe de rotation; cette expression satisfait, en effet, aux équations (1), (2) et (3).

Pour un volume s'appuyant à σ , l'on a comme l'on sait:

$$f_\sigma(Q) = U(P)_Q - U(Q) \quad \text{ou encore} \quad f_\sigma(P) = U(P) - U(Q)_P;$$

d'où dans le voisinage de σ :

$$\Delta f_\sigma = 4\pi\rho, \quad (4)$$

et en vertu de la continuité du potentiel et de ses dérivées premières:

$$f_{\sigma} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{df_{\sigma}}{dn} = 0 \quad (6)$$

sur σ . Ces trois équations déterminent encore d'une manière univoque la fonction f_{σ} au voisinage de σ .

On peut déduire de là que la fonction barrière pour *un volume cylindrique* de rayon a , est, l étant la distance à l'axe *de révolution*:

$$f_{\sigma} = \pi \varphi \left(a^2 + l^2 - 2a^2 \operatorname{L} \frac{l}{a} \right).$$

Il n'est pas superflu de remarquer le rôle du théorème de Cauchy-Kowalewska dans l'étude des polydromies, analogue à celui du principe de Dirichlet dans l'étude des potentiels eux-mêmes.
