Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 14 (1932)

Artikel: Les polydromies des potentiels newtoniens et la topologie
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740861

voir les calcaires oolithiques de la base du groupe supérieur des Calcaires du Niari. Cette série plissée représente à l'extrémité orientale du Plateau de Tchicoumba l'équivalent des plissements accentués, synclinaux et anticlinaux, à flanc déchiré accompagnés de brèches tectoniques que nous avons signalés à Tchicoumba Mines. C'est une preuve que les plis sont en effet plus accentués sur le flanc S du Plateau de Tchicoumba que dans la région au N ou au S.

Notons encore que les épaisseurs des couches nous semblent réduites à Comba. Rien cependant, si ce n'est ce dernier fait, ne nous autorise pour le moment à songer à des décollements ou étirements de couches tels que ceux que nous avons trouvés dans d'autres régions du Congo français.

R. Wavre. — *Les polydromies des potentiels newtoniens et la topologie* [1].

1. Envisageons un corps homogène limité par des surfaces analytiques et régulières Σ, Σ', Σ'', ... Soient U*e* le potentiel newtonien à l'extérieur du corps, U_i le potentiel à l'intérieur. Appelons fonction barrière pour l'entrée dans le corps par la face Σ la fonction:

$$f_\Sigma = U(e)_i - U(i)$$

différence du potentiel extérieur prolongé et du potentiel intérieur. Nous supposerons que cette fonction est analytique dans tout l'espace réel. Ce sera le cas comme nous le verrons, si la surface Σ est un plan, une sphère ou un cylindre de révolution. f_Σ ne dépend d'ailleurs que des matières situées sur un trajet infinitésimal le long duquel $U(e)$ est prolongé.

La relation précédente peut s'inverser et s'écrire, dans *e*

$$f_\Sigma = U(e) - U(i)_e \,.$$

[1] Cet exposé est très sommaire, il sera développé dans le numéro de novembre-décembre 1932 des Archives des Sciences physiques et naturelles.

Dès lors si l'on décrit un trajet qui entre dans le corps par Σ et ressort par Σ' on aura à l'arrivée en M, en partant de P

$$U(P)_M - U(M) = f_\Sigma - f_{\Sigma'} .$$

Si M coïncide avec P la différence des deux fonctions barrières fournira la fonction période pour le trajet considéré.

D'une manière générale, si l'on entre par Σ, que l'on ressort par Σ', pour rentrer par Σ'',... l'on aura à l'arrivée en M

$$U(P)_M - U(M) = f_\Sigma - f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} - f_{\Sigma'''} + \dots$$

2. Des relations de même nature existent pour les potentiels de simple couche, i et e désignent alors les deux côtés de la couche Σ.

3. Les fonctions barrières pour une surface Σ limitant un volume ont à satisfaire aux trois équations

$$\Delta f = +4\pi\rho \quad \text{dans le voisinage de} \quad \sigma$$

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dn} = 0 \qquad \text{sur} \quad \sigma$$

où σ est une portion quelconque de Σ, et ρ la densité. La fonction f existe et est unique en vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska. Ainsi elle se trouve définie dans le voisinage de σ.

4. Pour les potentiels de simple couche la fonction barrière φ sera déterminée par les conditions suivantes:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{dans le voisinage de} \quad \sigma$$

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dn} = 4\pi\rho \qquad \text{sur} \quad \sigma$$

conditions qui en assurent encore l'existence et l'unicité dans le voisinage de σ en vertu du même théorème.

Exemples de fonctions barrières:

Pour l'entrée dans un corps homogène par un plan $z = 0$, la fonction f est

$$f = 2\pi\rho z^2 .$$

Pour la traversée d'une surface plane homogène $z = 0$ c'est

$$\varphi = 4\pi\rho z \; .$$

Pour l'entrée dans une sphère pleine de rayon a

$$f = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{r} - 2\pi\rho a^2 + \frac{2}{3}\pi\rho r^2$$

où r est la distance au centre.

Pour la traversée d'une surface sphérique homogène on aura

$$\varphi = \frac{m}{a} - \frac{m}{r}$$

où m est la masse totale: $m = 4\pi\rho a^2$.

Pour l'entrée dans un volume cylindrique de révolution l'on aura

$$f = \pi\rho\left(a^2 + l^2 - 2a^2 \mathrm{L}'\frac{l}{a}\right)$$

où l est la distance du point argument à l'axe du cylindre.

Pour la traversée d'une surface cylindrique homogène on aura

$$\varphi = 4\pi\rho a \mathrm{L}\frac{l}{a} \; .$$

5. Nous constatons que les fonctions barrières pour les plans et les sphères sont définies dans l'espace entier où elles n'ont que des pôles. Les potentiels prolongés jouissent de la même propriété. Pour les cylindres, il y a une ligne critique logarithmique sur l'axe de révolution. D'autre part, le potentiel à l'intérieur du corps peut se prolonger au travers des surfaces limites et l'on a pour ce potentiel

$$\mathrm{U}(\mathrm{Q})_{\mathrm{M}} - \mathrm{U}(\mathrm{M}) = -f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} - f_{\Sigma'''} \cdots \; .$$

6. Les polyèdres, qu'il s'agisse de volume ou de surface, engendrent un potentiel newtonien qui se prolonge au travers des surfaces limites et du corps lui-même. Il n'est qu'une branche d'une fonction harmonique multiforme qui n'admet dans tout l'espace réel que les arêtes du corps comme singu-

larité et ces arêtes sont des lignes de ramification autour desquels s'échangent les différentes branches du potentiel prolongé. Il en est de même pour le potentiel intérieur.

7. Un corps limité par des plans, des sphères et des cylindres (ou formé par ces corps) engendre un potentiel qui est prolongeable au travers du corps et représente une branche d'une fonction harmonique multiforme. Cette dernière admet les arêtes du corps comme lignes de ramification et elle n'admet d'autre singularité dans l'espace réel que des pôles aux centres des sphères et des lignes critiques logarithmiques sur les axes des cylindres.

8. Les corps envisagés peuvent former un ensemble topologique quelconque. Soient alors R_1, R_2, ... les régions d'un seul tenant et sans surface frontière commune en lesquelles se répartit la masse envisagée. Soient, enfin, D_1, D_2, ... les régions de l'espace extérieur aux corps, séparées par la matière.

Les potentiels physiques dans R_i et R_k seront le prolongement analytique l'un de l'autre et appartiendront par conséquent à la même fonction harmonique s'il est possible de relier R_i et R_k par un chemin tel que la somme des fonctions barrières soit nulle

$$f_\Sigma - f_{\Sigma'} + f_{\Sigma''} - \dots = 0 \; .$$

Il en est de même, pour deux domaines D_i et D_k, qu'il s'agisse du potentiel de volume ou de surface.

L'on peut former des exemples tels que l'équation précédente soit bien vérifiée.

La proposition affirmée dans notre note précédente est donc démontrée.

M. Gysin. — *Recherches pétrographiques dans le Haut Katanga. Note n° 1. Esquisse géologique de la partie sud du Haut-Katanga.*

Introduction.

En août 1929, l'Union minière du Haut-Katanga voulut bien me confier la direction d'une mission de recherches minières au Congo belge; nous devions prospecter la région située dans le Haut-Katanga, au SE d'Elisabethville, entre la rivière Kafubu,