

Réflexions sur le problème des comètes

Autor(en): **Tiercy, Georges**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **15 (1933)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-740594>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RÉFLEXIONS

SUR

LE PROBLÈME DES COMÈTES

PAR

Georges TIERCY¹

(Avec 5 figures.)

RÉSUMÉ

On admet ici, comme loi de probabilité de la vitesse v d'un corps cométaire, à son point d'émergence dans la sphère d'activité du Soleil, une loi du type:

$$\varphi(v) = e^{-k(v^m - U^m)^{2p}},$$

où U est une certaine vitesse dite « vitesse normale » et dont la fréquence est maximum; une autre vitesse v a d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarte davantage de cette vitesse U normale.

Il s'agit de calculer, dans cette hypothèse, le rapport des fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques des comètes théoriquement *visibles*, c'est-à-dire des corps cométaires pour lesquels la distance périhélie ρ est inférieure à 4.

Pour $k = 25$, $m = 1$ et $p = 1$, on trouve que les orbites elliptiques sont environ 300 fois plus nombreuses que les hyperboliques; et l'on voit que les chances de voir réalisée une excentricité plus grande que 1,01 sont, pour ainsi dire, inexistantes.

Avec $k = 100$, $m = 2$ et $p = 1$, on trouve que le rapport ci-dessus vaut environ 550 au lieu de 300, toujours pour $\rho < 4$.

On voit clairement que la valeur de U est déterminante, et que le choix de la fonction $\varphi(v)$ est arbitraire.

¹ Voir une première étude sur ce même sujet dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 3, 1932; la même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 19.



I. — INTRODUCTION.

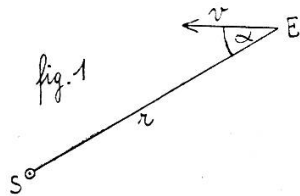
HYPOTHÈSES ET CONDITION DE VISIBILITÉ.

1. — Il s'agit encore ici de rechercher s'il existe des raisons qui rendent très rares les comètes hyperboliques, et parmi celles-ci, celles dont l'excentricité n'est pas très voisine de l'unité. Comme précédemment, nous supposerons que les comètes « naissent » à une très grande distance du Soleil, distance considérable par rapport aux dimensions du système solaire, mais cependant assez faible pour que l'action du Soleil l'emporte sur l'action des étoiles. Nous considérons donc que les comètes

sont des corps étrangers au système solaire, et qui n'y font apparition que par suite de circonstances spéciales; par exemple, dans sa course dans l'espace, le corps cométaire s'approche assez du Soleil pour que l'action de celui-ci devienne dominante; le corps cométaire est alors capté, temporairement ou définitivement par le Soleil. Ce qui ne veut pas dire qu'il sera forcément visible par la suite pour l'observateur terrestre.

Désignons par r la distance qui sépare le Soleil du point E d'émergence de la comète (fig. 1), c'est-à-dire du point où elle entre dans la sphère d'activité du Soleil. Soit ρ la distance périhélie, qui doit satisfaire à la condition $\rho < 4$ pour que la comète soit observable. Désignons le rapport de r à ρ par $a = \frac{r}{\rho}$; r étant un très gros nombre (par exemple 40 000), il faut, pour que la comète soit observable, que ce rapport soit plus grand qu'une certaine limite inférieure n , égale ici à 10 000. L'inégalité $a > n$ est donc ce qu'on peut appeler la *condition de visibilité*; si $\rho > 4$, on aura $a < n$, le corps restera invisible et on l'ignorera.

Soit maintenant α l'angle que fait la vitesse de la comète avec le rayon ES (fig. 1); α est un angle aigu; et nous supposerons encore que tous les angles α possibles sont également vraisemblables. Il est évident qu'il y a là quelque arbitraire. Rappelons



ici que, pour une valeur de ρ (ou de a) donnée, le domaine des valeurs possibles de α est compris entre $\alpha = 90^\circ$ et $\alpha = \alpha'$ tel que $\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{1}{a^2 - 1}$.

Si, en outre, on désigne par α'' une valeur de α telle que

$$\operatorname{tg}^2 \alpha'' = \frac{1}{a - 1} ,$$

les valeurs de α comprises entre α'' et α' correspondent à des hyperboles; les ellipses correspondent à $\alpha'' < \alpha < 90^\circ$.

Le domaine de α réservé aux hyperboles est donc très petit, ρ étant supposé donné.

Il nous faut encore une hypothèse sur les vitesses ν des comètes au point d'émergence E. Nous admettrons une certaine vitesse relative $\nu = U$, que nous appellerons *vitesse relative normale*, et dont la fréquence serait maximum; par exemple $U = \text{km } 0,2$ (valeur suggérée par les observations, comme nous le verrons plus loin); une autre vitesse relative ν aurait alors d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarterait davantage de cette vitesse U normale. La loi de probabilité d'une vitesse ν pourrait alors être représentée par une formule telle que:

$$\varphi_1(\nu) = e^{-g(\nu-U)^2} , \quad (1)$$

ou bien:

$$\varphi_2(\nu) = e^{-k(\nu^2-U^2)^2} , \quad (1')$$

ou encore, d'une façon plus générale:

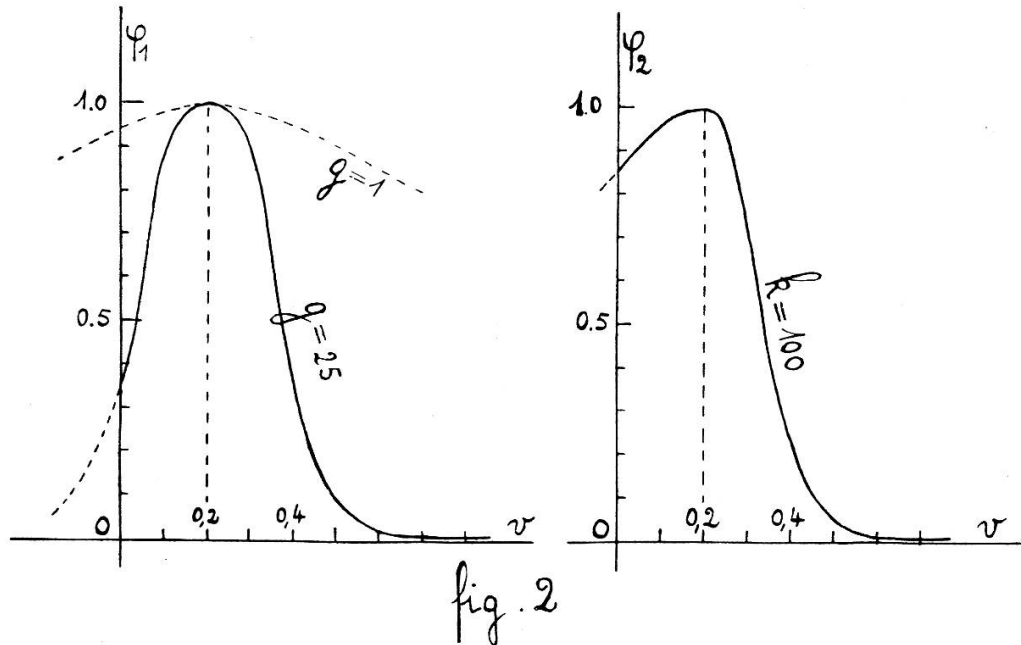
$$\varphi(\nu) = e^{-K(\nu^m-U^m)2p} . \quad (1'')$$

La première formule, donne une courbe de probabilité en forme de cloche symétrique par rapport à l'ordonnée correspondant à $\nu = U$.

La seconde expression conduit à une cloche non symétrique par rapport à cette même ordonnée; la branche de descente à droite plongera plus vite vers l'axe des ν que ce n'est le cas dans

la première courbe. On fera par exemple $g = 25$ et $k = 100$, avec $U = 0,2$ (fig. 2):

La seconde courbe correspond peut-être mieux que la première aux observations; il est bien entendu que celles-ci, ne concernant que les cas où $\rho < 4$, c'est-à-dire les comètes proprement dites, elles ne sauraient concerner les corps cométaires non visibles; et l'on sait que sur 420 comètes calculées (jusqu'en 1910), on trouvait: 100 ellipses, 300 paraboles ou ellipses extrêmement allongées, 20 hyperboles. Il semble donc bien que, pour les



comètes observées, la courbe de probabilité de v doit être la seconde.

Mais comme d'autre part une partie (et la plus grande) des comètes nous ont échappé, on peut aussi bien admettre la première courbe.

On pourra donc examiner les deux éventualités suivantes pour la probabilité d'avoir une vitesse comprise entre v et $(v + dv)$:

$$\varphi_1(v) dv = e^{-25(v-0,2)^2} dv ,$$

$$\varphi_2(v) dv = e^{-100(v^2-\overline{0,2^2})^2} dv .$$

II. — LE PROBLÈME φ_1 .

2. — L'une des équations nécessaires est la relation entre l'angle α , l'excentricité e et le rapport a ; elle s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{e + 1}{e(a^2 - 1) - (a - 1)^2}, \quad \text{(fonction décroissante} \\ \text{de } e), \\ \text{ou bien:} \\ \sin^2 \alpha = \frac{e + 1}{(e - 1)a^2 + 2a}; \end{array} \right. \quad (2)$$

elle montre que l'excentricité e ne peut varier (ρ ou a étant connu) que de

$$e = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1} \quad \text{à} \quad e = \infty,$$

l'angle α suivant, en décroissant, de $\alpha = 90^\circ$ à $\alpha = \alpha'$; la direction $\alpha = \alpha''$ (pour un ρ donné) correspond à $e = 1$; et il est facile de voir qu'entre $\alpha = 90^\circ$ et $\alpha = \alpha''$ (cas des ellipses), l'excentricité est comprise entre les limites très rapprochées $e = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1}$ et $e = 1$, soit, dans le cas de $a = 10\,000$, entre 0,9998 et 1.

3. — La seconde équation nécessaire sera tirée du théorème des forces vives:

$$\frac{\varphi^2}{K^2} - \frac{2}{R} = \text{constante},$$

où K est la constante képlérienne. La constante du second membre est égale à $\left(\frac{e - 1}{\rho}\right)$; comme on a toujours $\frac{r}{\rho} = a$, l'équation des forces vives s'écrit:

$$r \frac{\varphi^2}{K^2} - \frac{2r}{R} = a(e - 1);$$

et comme, au point d'émergence E , on a $R = r$, il vient:

$$\frac{\varphi^2}{K^2} r - 2 = a(e - 1);$$

ou bien, puisque $K^2 = v_0^2 r_0$, où v_0 et r_0 désignent la vitesse moyenne de la Terre et sa distance moyenne au Soleil:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 = a(e - 1) . \quad (3)$$

Posons maintenant:

$$A = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 , \quad (4)$$

où v est alors la vitesse au point d'émergence E; A est ainsi une donnée du problème, r étant la distance SE, supposée connue et égale à 40 000, par exemple. On voit ici que A pourra varier entre -2 , sa limite inférieure, et un très gros nombre N, 40 000 ou 80 000, par exemple.

Pour trouver nos inconnues e et a , nous avons donc l'équation (2) et l'équation (3); nous écrirons celle-ci sous la forme plus simple:

$$a(e - 1) = A . \quad (5)$$

4. — Par élimination de l'inconnue a entre (2) et (5), on trouve pour l'excentricité:

$$e^2 = 1 + A(A + 2) \sin^2 \alpha ; \quad (6)$$

et la relation (5) donnera ensuite ρ :

$$\frac{r}{\rho} = a = \frac{A}{e - 1} . \quad (7)$$

Telle est la solution générale du problème; il s'agissait en effet de trouver les éléments e et ρ de l'orbite cométaire, en partant des données initiales (r , α , v).

Rappelons que le nombre A est une donnée telle que:

$$-2 \leq A \leq N ,$$

et que le nombre a obtenu par (6) et (7) doit être supérieur à $n = 10\,000$.

5. — *Cas de l'ellipse.* C'est le cas de A négatif; en posant $A = -B$, les équations deviennent:

$$\begin{cases} e^2 = 1 - B(2 - B) \sin^2 \alpha ; \\ a = \frac{B}{1 - e} . \end{cases}$$

La condition de visibilité $a > n$ s'écrit alors ¹:

$$\sin^2 \alpha < \frac{\frac{2}{n} - \frac{B}{n^2}}{2 - B} , \quad (8)$$

B ne pouvant dépasser 2; le second membre, fonction croissante de B, augmente de $\frac{1}{n}$ jusqu'à l'infini, quand B varie de 0 à 2; il devient égal à l'unité pour $B = \frac{2n}{n+1}$. Par conséquent, si B est compris entre 2 et $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$, l'angle α n'est pas limité par l'inégalité (8).

Cela veut dire que, pour toute vitesse v suffisamment faible au point d'émergence E, on aura une comète *visible* à son passage au périhélie, quel que soit α entre α' et $\alpha = 90^\circ$. Pour les vitesses v plus grandes, et telles que B soit inférieur à $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$, l'angle α est limité par (8); et seules seront *visibles* les comètes dont la vitesse initiale fait avec ES un angle suffisamment petit.

Dans les deux cas, l'excentricité e dépasse $\left(1 - \frac{B}{n}\right)$, à cause de (5).

6. — *Cas de l'hyperbole.* C'est le cas de A positif et inférieur à la limite N.

La condition de visibilité exige que e soit inférieure à $\left(1 + \frac{A}{n}\right)$; la condition peut alors s'écrire ²:

$$\sin^2 \alpha < \frac{\frac{2}{n} + \frac{A}{n^2}}{2 + A} \quad (8')$$

¹ *Commentarii Mathematici Helvetici*, loc. cit.

² *Comm. Mathem. Helv.*, loc. cit.

le second membre est décroissant par rapport à A; il varie de $\frac{1}{n}$ pour A = 0, à $\frac{1}{n^2}$ pour A = ∞ . Ainsi $\sin^2 \alpha$ est étroitement limité.

La comète hyperbolique ne sera vue de la Terre que si sa vitesse initiale est très peu inclinée sur ES.

7. — Graphiquement, nous procéderons comme suit: nous porterons en abscisse la donnée A et en ordonnée la quantité $\sin^2 \alpha = y$; A est comprise entre -2 et N; et la condition de visibilité exige que $y = \sin^2 \alpha$ soit compris entre l'axe des x (ou des A) et la courbe \overline{KBCD} (fig. 3):

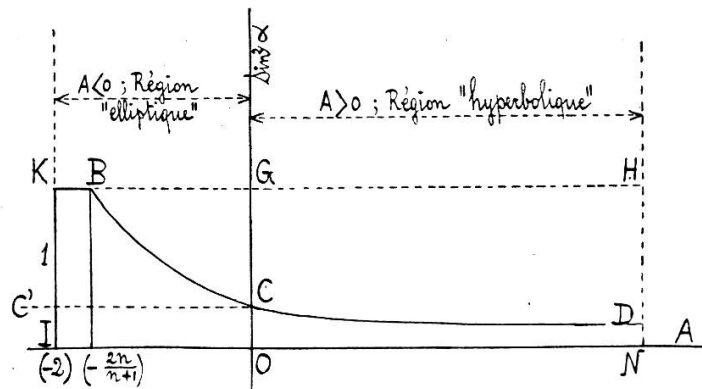


Fig. 3.

La courbe comporte un segment \overline{KB} parallèle à Ox , entre $x = -2$ et $x = -\frac{2n}{n+1}$; la partie \overline{BCD} a pour équation:

$$y = \frac{\frac{2}{n} + \frac{x}{n^2}}{2 + x};$$

nous l'appellerons l'hyperbole limitative.

Pour une valeur de x (ou de A), l'excentricité a pour valeur:

$$e^2 = 1 + A(A + 2) \sin^2 \alpha; \tag{6}$$

son maximum est atteint (pour une valeur donnée de A) lorsque $\sin^2 \alpha$ est donné par l'ordonnée de la courbe \overline{KBCD} . Cette valeur extrême de e est représentée sur la figure 4 par la ligne \overline{KEGF} .

Ce graphique montre bien que, dans la région elliptique ($A < 0$), l'excentricité e diffère très peu de l'unité; tandis qu'elle peut s'en écarter sensiblement pour la région hyperbolique.

Rapportons maintenant l'*hyperbole-limitative* aux axes \overline{ION} et \overline{IK} , choisis dès maintenant comme axes des x et des y ; l'équation de la courbe devient:

$$x\left(y - \frac{1}{n^2}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right); \tag{9}$$

et son asymptote parallèle à Ox est à l'ordonnée $\frac{1}{n^2}$.

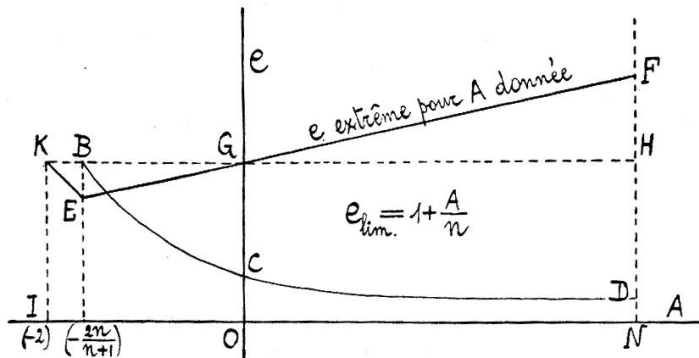


Fig. 4.

8. — Il s'agit maintenant de voir si les orbites elliptiques sont plus ou moins fréquentes que les hyperboliques. Pour les premières, les données A et α sont figurées par un point de l'aire \overline{IKBCO} (fig. 4); pour les secondes, par un point de l'aire \overline{OCDN} .

La probabilité de choisir un élément $dx dy$ de la surface est de la forme:

$$f(x, y) dx dy ;$$

et il s'agit de trouver la fonction $f(x, y)$. La probabilité de choisir α entre α et $(\alpha + dx)$ est donnée par l'expression:

$$\frac{dy}{2\sqrt{1-y}},$$

puisque l'on a posé $y = \sin^2 \alpha$.

D'autre part, la loi de fréquence de la vitesse relative v est fournie par l'expression:

$$\varphi_1(v) dv = e^{-25(v-0,2)^2} dv ;$$

et, vu le choix de notre origine I, on a:

$$x = A + 2 ,$$

où l'on sait que:

$$A = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2 ;$$

avec $\frac{r}{r_0} = 40\ 000$ et $v_0 = 30$ kl, il vient:

$$x = 40\ 000 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 ; \quad \frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{x}}{200} ; \quad dv = 0,075 \frac{dx}{\sqrt{x}} ;$$

$$\varphi_1(v) dv = 0,075 e^{-0,5625\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} ;$$

telle est la probabilité qu'il y a d'avoir x entre x et $(x + dx)$.

La probabilité de choisir un élément $dx dy$ de surface est donc:

$$f(x, y) dx dy = M \cdot \frac{e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2}}{\sqrt{x(1-y)}} dx dy . \quad (10)$$

En résumé, la conséquence directe de nos hypothèses sur les lois de probabilités pour v et α est d'admettre que les fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques des comètes *visibles* sont dans le même rapport que les intégrales doubles suivantes:

$$\int_{\text{OIKBC}} \int e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} \quad \text{et} \quad \int_{\text{OCDN}} \int e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} ,$$

qui s'écrivent immédiatement et respectivement:

$$\int_0^2 \frac{-2\sqrt{1-y} \cdot e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2} dx}{\sqrt{x}}$$

et

$$\int_2^N \frac{-2\sqrt{1-y} \cdot e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x} - \frac{4}{3}\right)^2} dx}{\sqrt{x}} , \quad (11)$$

y étant fonction de x .

1^{re} intégrale (cas des ellipses). On a :

$$\int_0^2 = \int_0^{\frac{2}{n+1}} + \int_{\frac{2}{n+1}}^2 ;$$

dans la première partie du second membre, le champ est limité supérieurement par la droite KB ou $y = 1$; on a donc pour cette partie :

$$\left(-2\sqrt{1-y}\right)_0^1 \cdot \int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x}-\frac{4}{3}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx = + 2 \int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x}-\frac{4}{3}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx ;$$

dans la seconde partie du second membre, y est limité par la courbe \overline{BCD} (équation 9) ; d'où :

$$\sqrt{1-y} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{x}} ; \quad (9')$$

et puisque $\left(\sqrt{1-y}\right)_0^y = \sqrt{1-y} - 1$, il vient pour cette partie :

$$- 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{x}} \cdot e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x}-\frac{4}{3}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx + 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{e^{-\frac{9}{16}\left(\sqrt{x}-\frac{4}{3}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx ;$$

et l'on remarquera que le radical de 9' s'annule pour $x = \frac{2}{n+1}$. L'intégrale des ellipses devient donc, par addition des deux parties ci-dessus :

$$+ 2 \int_0^2 \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx$$

$$- 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{x}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

2^{me} intégrale (cas des hyperboles). L'ordonnée y étant limitée par la courbe \overline{BCD} , on a, à cause de 9' :

$$- 2 \int_{\frac{2}{2}}^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{x}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx + 2 \int_{\frac{2}{2}}^N \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \quad (13)$$

Et il s'agit maintenant de calculer le rapport de l'expression (12) à l'expression (13); les facteurs 2 disparaissent.

9. — Calcul du numérateur (12) du rapport, après division par 2.

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \sqrt{x} - 1 = t , \\ \sqrt{x} = \frac{4}{3} (t - 1) , \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{8}{3} dt ; \end{array} \right. \quad (14)$$

on trouve pour la première intégrale de (12) :

$$\begin{aligned} + \frac{8}{3} \int_{-1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}-1} e^{-t^2} dt &= \frac{8}{3} \int_{-1}^{+0,0605} e^{-t^2} dt = \frac{8}{3} \int_{-1}^0 e^{-t^2} dt + \frac{8}{3} \int_0^{0,0605} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{8}{3} \left[\int_0^1 e^{-z^2} dz + \int_0^{0,0605} e^{-t^2} dt \right] ; \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\frac{8}{3} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (0,84270) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (0,06818) \right] \\ = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} (0,91088) = (2,3633) (0,91088) = 2,1529 .$$

Quant à la seconde intégrale de (12), on trouvera sa valeur numérique approchée comme suit, après suppression du facteur 2. Etudions d'abord la fonction de x représentée par le radical (9'); le tableau numérique suivant montre qu'on peut intégrer d'abord de $\frac{2}{n+1}$ à $\frac{1}{10}$, puis de $x = \frac{1}{10}$ à $x = 2$; pour la seconde partie de cette intégration numérique, on peut traiter le radical comme une constante et lui donner sa valeur moyenne 0,9995; le résultat correspondant ne sera ainsi modifié que d'une quantité inférieure au $\frac{1}{1000}$ de sa valeur.

x	$\sqrt{1-y}$ avec $n = 10.000$	Valeur moyenne
$\frac{2}{n+1}$	0	
$\frac{1}{4999}$	0,003	0,0015
$\frac{1}{4990}$	0,045	0,024
$\frac{1}{4900}$	0,14	0,093
$\frac{1}{4800}$	0,20	0,17
$\frac{1}{4500}$	0,32	0,26
$\frac{1}{4000}$	0,45	0,38
$\frac{1}{3000}$	0,61	0,53

x	$\sqrt{1-y}$ avec $n = 10.000$	Valeur moyenne
$\frac{1}{3000}$	0,61	
$\frac{1}{2000}$	0,77	0,69
$\frac{1}{1000}$	0,90	0,83
$\frac{1}{500}$	0,95	0,925
$\frac{1}{50}$	0,995	0,972
$\frac{1}{10}$	0,9990	0,997
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}$	0,9995
1	$\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$	
2	$\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ 0,99995	

Cette seconde partie de l'intégrale devient donc :

$$\begin{aligned}
 -0,9995 \int_{0,1}^2 \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx &= - (0,9995) \cdot \frac{\frac{3}{4}\sqrt{2}-1}{\frac{3}{4}\sqrt{0,1}-1} \int e^{-t^2} dt \\
 &= - 2,6653 \int_{-0,76283}^{+0,06050} e^{-t^2} dt \\
 &\quad - 0,76283
 \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 - 2,6653 \left[\int_{-0,76283}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{0,06050} e^{-t^2} dt \right] \\
 &= - 2,6653 \left[+ \int_0^{0,76283} e^{-z^2} dz + \int_0^{0,06050} e^{-t^2} dt \right] \\
 &= (- 2,6653) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} [0,71932 + 0,06818] = - 1,086011 .
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer la première partie de l'intégrale, de $\frac{2}{n+1}$ à $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire :

$$- \int_{\frac{2}{n+1}}^{0,1} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx ;$$

on morcellera le domaine d'intégration, en donnant par exemple à x les valeurs indiquées dans le tableau précédent; et, dans chacun des petits domaines, on donnera au radical $\sqrt{1-y}$ sa valeur moyenne; l'erreur ainsi commise est très petite. On obtient le tableau suivant :

x	$\int_{x'}^{x''} \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx = \frac{8}{3} \int_{\frac{3}{4}\sqrt{x'}-1}^{\frac{3}{4}\sqrt{x''}-1} e^{-t^2} dt$	$\sqrt{1-y}$	Produit divisé par $\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2,36325$
$\frac{2}{n+1}$			
0,0002000	négligeable	0,0015	—
0,0002004	id.	0,024	—
0,000204	id.	0,093	—
0,000208	id.	0,17	—
0,00022	$\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (0,00013)$	0,26	0,0000338
0,00025	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,00033)$	0,38	0,0001254
0,00033	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,00084)$	0,53	0,0004452
0,00050	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,00126)$	0,69	0,0008694
0,001	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,00399)$	0,83	0,0033117
0,002	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,00433)$	0,925	0,0040053
0,02	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,03445)$	0,972	0,0334854
0,1	$\frac{4}{3} \sqrt{\pi} \cdot (0,07452)$	0,997	0,0742964
		Total:	0,1165728

et:

$$- \int_{\frac{2}{n+1}}^{0,1} = - (2,36325) (0,1165728) = - 0,275495 .$$

Le numérateur (soit l'expression (12) divisée par 2) vaut donc :

$$\begin{array}{r} 1^{\text{re}} \text{ intégrale:} \qquad \qquad \qquad + 2,1529 \\ 2^{\text{me}} \text{ intégrale} \left(\begin{array}{l} - 1,86011 \\ - 0,27550 \end{array} \right): - 2,1356 \\ \hline \text{Numérateur} = 0,0173 \end{array}$$

10. — Voyons maintenant le dénominateur (13), après division par 2.

Pour $x = 2$, on a :

$$\sqrt{1 - y} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 0,999950 ;$$

pour $x = N = 40\ 000$:

$$\sqrt{1 - y} = \sqrt{1 - \frac{3}{2n^2}} = 0,999999998 ;$$

on peut donc pratiquement considérer le radical $\sqrt{1 - y}$ comme quantité constante et égale à la valeur moyenne 0,999 975 ; et le dénominateur devient :

$$\begin{aligned} \int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \cdot (1 - 0,999\ 975) \\ = 0,000025 \int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx , \end{aligned}$$

soit, avec $N = 40\ 000$:

$$\begin{aligned} (0,000\ 025) \cdot \frac{8}{3} \int_{\frac{3}{4}\sqrt{2} - 1}^{\frac{3}{4}\sqrt{N} - 1} e^{-t^2} dt &= 0,000\ 066\ 67 \int_0^{149} e^{-t^2} dt = \\ &+ 0,0605 \\ &= (0,000\ 066\ 67) (1 - 0,06818) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,000055056 . \end{aligned}$$

11. — Le rapport de (12) à (13) vaut donc à peu près :

$$\frac{0,0173}{0,000055} \text{ soit } 315 .$$

Ainsi, dans l'hypothèse φ_1 , les ellipses seraient environ 300 fois plus nombreuses que les hyperboles (comètes *visibles* théoriquement, $\rho < 4$).

Le résultat est davantage en faveur des ellipses que ce n'est le cas dans l'hypothèse $\varphi(\varrho) = \text{const.}$ Il fallait s'y attendre, étant donné la valeur de km 0,2 admise pour la vitesse U dite « normale ». On sait, en effet, que la quantité

$$A = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2$$

est comprise entre -2 et zéro pour les cas d'orbites elliptiques; donc, pour une ellipse, on doit avoir:

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 \frac{r}{r_0} \leq 2, \quad \text{ou} \quad \varrho < \frac{\varrho_0}{142} \quad \text{puisque} \quad \frac{r}{r_0} = 40\,000 ;$$

avec $\varrho_0 = 30$ km, on a:

$$\varrho \leq \text{km } 0,22 ;$$

la vitesse U adoptée est proche de cette valeur.

Si l'on avait admis la valeur $U = 10$ km par exemple, cette valeur « normale » appartenant au domaine des hyperboles, la probabilité de voir réalisées des orbites elliptiques eût été extrêmement minime.

Le choix de la valeur de U est donc *déterminant* dans le problème $\varphi_1(\varrho)$. Mais il faut insister sur le fait qu'en réalité, parmi les comètes *visibles* effectivement observées, la très grande majorité sont elliptiques ou paraboliques; les hyperboles étant très rares en fait, nous étions fondés à choisir $U = \text{km } 0,2$. Mais il est bien évident que le choix de la fonction $\varphi_1(\varrho)$ elle-même est très arbitraire.

Si l'on remarque qu'avec les corrections d'orbites dues à MM. Fayet et Fabry, il n'y a guère que quatre ou cinq cas pour lesquels l'écart avec le type parabolique soit assez grand pour qu'il n'y ait pas de doute au sujet du caractère hyperbolique des courbes, alors qu'on compte actuellement presque un millier de comètes enregistrées, on voit que notre calcul est sensiblement en accord avec les faits observés. Mais, au fond, il n'y a

rien là que de très naturel, puisque nous avons adopté la vitesse normale U suggérée justement par les faits eux-mêmes. Il faut simplement constater maintenant que les conclusions du calcul s'appliquent, non seulement aux comètes *vues* , mais aussi à tous les corps cométaires *théoriquement visibles* ($\rho < 4$) et que cependant on n'a pas vus.

Il est évident que l'extension de ces conclusions au cas des corps cométaires *non visibles* serait risquée.

12. — Cherchons encore, toujours dans l'hypothèse $\varphi_1(\nu)$, si, *parmi les hyperboles* , les excentricités beaucoup plus grandes

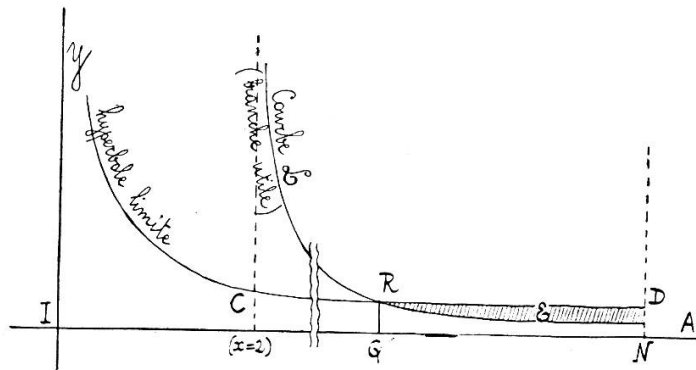


Fig. 5.

que l'unité sont plus fréquentes ou moins fréquentes que celles voisines de 1.

Rappelons ici que la valeur de e^2 est donnée par:

$$e^2 = 1 + x(x - 2) \sin^2 \alpha ,$$

ou bien:

$$e^2 = 1 + xy(x - 2) .$$

Remarquons d'abord que la valeur $e = 1,01$ est la valeur limite correspondant à $x = 102$; en effet, on a:

$$e_{\text{lim}} = 1 + \frac{A}{n} = 1 + \frac{x - 2}{n} ;$$

avec $e = 1,01$ et $n = 10\,000$, on trouve bien $x = 102$. Seuls les couples de valeurs (x, y) donnant des points d'un certain domaine \mathcal{E} , partie du segment (QRDN) pour lequel $x > 102$,

pourront conduire à des valeurs de e supérieures à 1,01; le domaine \mathcal{E} est donc situé « à droite » de l'ordonnée \overline{QR} pour laquelle $x = 102$ (fig. 5).

Il convient alors de chercher la *courbe séparative* \mathcal{L} , qui détache du segment (QRDN) le domaine \mathcal{E} . Cette courbe est donnée par l'équation:

$$(1,01)^2 = 1 + xy(x - 2) = \left(1 + \frac{100}{n}\right)^2,$$

ou:

$$y = \frac{200\left(\frac{1}{n} + \frac{50}{n^2}\right)}{x(x - 2)}; \tag{15}$$

x étant donné (ou A), l'excentricité sera supérieure à 1,01 pour des ordonnées y plus grandes que celles données par la relation (15).

D'autre part, les valeurs de y sont limitées supérieurement par l'hyperbole limitative \overline{CRD} , dont l'équation est:

$$y = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}. \tag{9}$$

La courbe \mathcal{L} admet des asymptotes parallèles à l'axe des y pour $x = 0$ et $x = 2$; cette dernière seule est à considérer, puisqu'on ne prend que des valeurs de x supérieures à 2 ($x \geq 102$).

On vérifie vite que la branche utile de la courbe \mathcal{L} coupe la courbe limitative au point R, pour $x = 102$; avec $n = 10\,000$, on a $y = 0,000\,001\,97$ pour les deux courbes.

Le domaine \mathcal{E} est donc limité inférieurement par (15) et supérieurement par (9).

Le rapport des fréquences des orbites à excentricité $e > 1,01$ et de l'ensemble des orbites hyperboliques est le rapport des intégrales:

$$\int_{\text{domaine } \mathcal{E}} \int e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} : \int_{\text{OCDN}} \int e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}},$$

ou bien:

$$\int_{102}^N \frac{(-2\sqrt{1-y})_{\mathcal{L}}^{\text{CRD}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx :$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^N \frac{(-2\sqrt{1-y})_0^{\text{CRD}} \cdot e^{-\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}-1\right)^2}}{\sqrt{x}} dx .$$

Si l'on tient compte du fait que l'ordonnée du point C (fig. 5) est égale à $1/n$, tandis que celles des points R et D sont respectivement égales à:

$$\left\{ \begin{aligned} y_R &= \frac{2}{102} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{51} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} , \\ y_D &= \frac{2}{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} ; \quad \left(\text{avec } \begin{array}{l} n = 10\,000 \\ n = 40\,000 \end{array} \right) , \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire qu'elles sont respectivement 50 fois et 20 000 fois plus petites que celle de C; que, d'autre part, dans le domaine \mathcal{E} , en intégrant entre les courbes \mathcal{L} et CRD on ne prend qu'une partie de l'ordonnée de la courbe CRD; et qu'enfin les intégrales

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

tendent vers l'unité et en diffèrent de moins de 0,000 000 01 dès que x dépasse quelques unités (4, par exemple), on verra vite que le numérateur à une valeur considérablement plus petite que celle du dénominateur; autrement dit, dans l'hypothèse φ_1 , les chances de voir réalisée une excentricité plus grande que 1,01 pour une comète théoriquement visible sont pour ainsi dire inexistantes.

III. — LE PROBLÈME φ_2 .

13. — La probabilité d'avoir une vitesse relative d'émergence comprise entre v et $(v + dv)$ est donnée par l'expression:

$$\varphi_2(v) dv = e^{-k(v^2-U^2)^2} dv ,$$

avec $U = \text{km } 0,2$ et $k = 100$, par exemple. La forme de la cloche de probabilité est donnée par la seconde courbe de la figure (2); elle n'est plus symétrique par rapport à l'ordonnée correspondant à $\nu = 0,2 = U$.

La courbe de $\varphi_2(\nu)$ présentant une « chute » plus rapide que la courbe de $\varphi_1(\nu)$ après $\nu = 0,2$, on peut dès maintenant prévoir que les conclusions de la partie II de cet essai seront confirmées et renforcées.

Remarquons que les courbes $\overline{\text{BCRD}}$ et \mathcal{L}^2 restent les mêmes (fig. 5); elles sont indépendantes de la forme adoptée pour la fonction $\varphi(\nu)$:

$$\text{courbe } \overline{\text{BCRD}} ; \quad y = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} ; \quad (9)$$

$$\text{courbe } \mathcal{L}^2 : \quad y = \frac{200 \left(\frac{1}{n} + \frac{50}{n^2} \right)}{x(x-2)} . \quad (15)$$

On a toujours que la probabilité de choisir α entre α et $(\alpha + d\alpha)$ est de la forme

$$\frac{dy}{2\sqrt{1-y}} ;$$

et aussi:

$$\nu = \frac{3}{20} \sqrt{x} , \quad d\nu = \frac{3}{40} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} ,$$

comme on l'a vu au début du n° 8.

La loi des fréquences de ν devient donc ici:

$$\varphi_2(\nu) d\nu = \frac{3}{40} \cdot e^{-100 \left(\frac{9}{400} x - 0,04 \right)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{3}{40} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

La probabilité qu'il y a de choisir un élément $dx \cdot dy$ de la surface limite de la figure (5) est donc de la forme:

$$f(x, y) dx \cdot dy = M \cdot \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} , \quad (M = \text{const.}) .$$

Et la conséquence directe de nos hypothèses sur les fréquences de ν et α est d'admettre que les fréquences relatives des orbites

elliptiques et hyperboliques *visibles* sont dans le même rapport que les intégrales suivantes :

$$\int_{\text{OIKBC}} \int e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} \quad \text{et} \quad \int_{\text{OCDN}} \int e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x(1-y)}} ,$$

c'est-à-dire :

$$E = \int_0^2 \frac{[-2\sqrt{1-y}]_{\text{OIKBC}} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx$$

et

$$H = \int_2^N \frac{[-2\sqrt{1-y}]_{\text{OCDN}} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx .$$

La première intégrale, proportionnelle au nombre d'ellipses, s'écrit :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 = \int_0^{\frac{2}{n+1}} + \int_{\frac{2}{n+1}}^2 ; \\ E &= + 2 \int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \\ &\quad - 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} dx + 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx \\ E &= 2 \int_0^{\frac{2}{n+1}} \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2}}{\sqrt{x}} dx - 2 \int_{\frac{2}{n+1}}^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40}\right)^2} dx \end{aligned} \quad (1)$$

La seconde intégrale, proportionnelle au nombre d'hyperboles, s'écrit :

$$H = -2 \int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}} + 2 \int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}}. \quad (16')$$

On a donc, pour le rapport cherché :

$$\frac{E}{H} = \frac{\int_0^2 \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}} - \int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}}}{\int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}} - \int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{9x-16}{40} \right)^2} dx}{\sqrt{x}}};$$

ou bien, en posant :

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt, \quad \frac{3}{4} \sqrt{x} = t, \quad x = \frac{16}{9} t^2, \\ \frac{9x - 16}{40} = \frac{2t^2 - 2}{5},$$

$$\frac{E}{H} = \frac{\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4} = 1,0605} e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5} \right)^2} dt - \int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{9}{8t^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5} \right)^2} dt}{\sqrt{\frac{9}{8(n+1)}}}{\int_2^N \frac{e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5} \right)^2} dt}{\frac{3\sqrt{N}}{4} = 150} - \int_2^N \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{9}{8t^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2-2}{5} \right)^2} dt}{\frac{3\sqrt{N}}{4}}}. \quad (17)$$

(N = 40.000)

On remarquera que le radical $\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{9}{8t^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}$ s'annule pour $t = \sqrt{\frac{9}{8(n+1)}}$, c'est-à-dire à la limite inférieure de la seconde intégrale du numérateur; tandis que l'exposant des exponentielles s'annule pour $t = 1$.

Le calcul numérique ne présente aucune difficulté; on y fera $n = 10\ 000$ et $N = 40\ 000$; et l'on utilisera une table de la fonction exponentielle e^{-u} . On trouve rapidement que

$$\frac{E}{H} = \frac{15\ 650}{28}$$

à peu près.

Ainsi, dans l'hypothèse φ_2 , les ellipses seraient environ 550 fois plus nombreuses que les hyperboles. Répétons qu'il s'agit ici des corps cométaires *théoriquement visibles*, c'est-à-dire pour lesquels on aurait $\rho < 4$; et l'on sait que l'on n'en observe effectivement qu'une partie.

14. — Il va sans dire que, dans l'hypothèse φ_2 comme dans l'hypothèse φ_1 , le choix de la valeur de la vitesse U dite « normale » est déterminant, comme on l'a fait remarquer à la fin du n° 11. Et rappelons que si l'on a choisi la valeur $U = 0,2$, c'est en se basant sur les observations enregistrées jusqu'ici (comètes effectivement vues); le résultat que nous obtenons s'étend à tous les corps cométaires théoriquement visibles, dont un grand nombre nous ont échappé.

D'ailleurs, on trouverait, dans l'hypothèse φ_2 comme dans l'hypothèse φ_1 , que les orbites hyperboliques à excentricité plus grande que 1,01, par exemple, sont excessivement rares; elles sont pratiquement inexistantes. Remarquons enfin qu'en prenant la fonction de probabilité (1'') un peu plus générale:

$$\varphi(\rho) = e^{-K(v^m - U^m)^{2p}}$$

on disposerait des trois nombres U , p et m , en plus du coefficient K ; on pourrait donc modifier à volonté la forme et la position de la cloche de probabilité. Ce qui montre encore une fois combien le choix de la fonction $\varphi(\rho)$ est arbitraire.