Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante : applications astronomique et industrielles [suite]

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **16 (1934)**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741456

SENSIBILITÉ SPECTRALE
DES
RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

APPLICATIONS ASTRONOMIQUES ET INDUSTRIELLES

PAR

Paul ROSSIER

(suite)

IV. — Index de couleur.

13. — *Définitions.*

Soient m_1 et m_2 les magnitudes d'une étoile, relatives à deux récepteurs r_1 et r_2. Par définition, l'index de couleur y relatif est la différence

$$I_{12} = m_1 - m_2 = 2{,}5\left(\log\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} - \log\frac{L_1}{L_2}\right) .$$

Les $\mathcal{E}$ sont des constantes d'étalonnage, tandis que les L représentent les puissances apparentes, relatives aux deux récepteurs considérés.

L'index I_{12} dépend des deux constantes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. On les détermine généralement en choisissant une étoile pour laquelle $I_{12} = 0$. Pour cette étoile d'index nul, on a

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{L_1}{L_2} .$$

On peut satisfaire à cette condition en posant, pour cette étoile $L_1 = L_2$, d'où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Dans ces conditions, on a

$$I_{12} = -2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2} = -2{,}5 \log \frac{\int_0^\infty E(\lambda)\, \sigma_1(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty E(\lambda)\, \sigma_2(\lambda)\, d\lambda}.$$

L'index de couleur est proportionnel au logarithme du rapport des puissances apparentes, relatives aux deux récepteurs.

En général, les constantes d'étalonnage sont choisies de telle sorte que l'ensemble des étoiles appartenant au type spectral A_0 et de magnitude 5 à 6 ait l'index nul. Parfois, c'est le Soleil qui joue ce rôle.

Un cas particulier important est celui où l'un des récepteurs, r_2 par exemple, est bolométrique. L'index ainsi obtenu est dit absolu, relatif au récepteur r_1 (non intégral). On a pour l'index absolu

$$I_1 = -2{,}5 \log \frac{\int_0^\infty E(\lambda)\, \sigma_1(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty E(\lambda)\, d\lambda}.$$

Dans le cas de l'œil, le rapport des puissances qui figure au second membre est parfois appelé facteur de visibilité. L'index absolu visuel est donc proportionnel au logarithme de l'inverse du facteur de visibilité.

Notre problème fondamental, consistant à déterminer la magnitude bolométrique à partir des données d'observation obtenues au moyen de récepteurs sélectifs, n'est autre que le calcul des indices absolus.

14. — *Propriétés générales de l'index de couleur.*

Si les deux récepteurs ne présentent pas le phénomène de Purkinje, l'index a la propriété suivante:

Deux étoiles, dont la répartition de la puissance dans le spectre est la même, ont des indices de couleur égaux; autrement dit, l'index de couleur est indépendant de la magnitude de l'étoile, mais ne dépend que de la répartition de l'énergie dans le spectre.

On a, pour ces deux étoiles,

$$E'(\lambda) = kE''(\lambda) \quad \text{et} \quad L' = kL'' .$$

Les accents $'$ et $''$ concernent chacune des deux étoiles.

La loi de Pogson donne pour les deux magnitudes relatives au même récepteur

$$m' = 2{,}5\,(\log \mathcal{E} - \log L')$$
$$m'' = 2{,}5\,(\log \mathcal{E} - \log L'') = 2{,}5\,(\log \mathcal{E} - \log L' - \log k) .$$

Faisons intervenir deux récepteurs r_1 et r_2. Il vient pour l'index

$$I'_{12} = m'_1 - m'_2 = m''_1 - m''_2 = I''_{12} .$$

Insistons sur l'hypothèse de l'absence du phénomène de Purkinje, condition parfois assez mal remplie, ce qui rend nécessaires de délicates « corrections de magnitude ».

Permutons les deux récepteurs, l'index change de signe.

$$I_{21} = m_2 - m_1 = -I_{12} .$$

Considérons le cas de trois récepteurs pris deux à deux. On a

$$I_{12} + I_{23} = I_{12} - I_{32} = m_1 - m_2 + m_2 - m_3 = m_1 - m_3 = I_{13} .$$

La différence de deux indices, pris par rapport au même récepteur, est encore un index de couleur, indépendant de ce récepteur.

Supposons que le récepteur r_2 soit bolométrique; on a

$$I_1 - I_3 = I_{13} .$$

Tout index de couleur est la différence de deux indices absolus.

On est parfois conduit à changer l'origine de l'échelle des indices, ce qui revient à choisir une nouvelle étoile d'index nul et à modifier les constantes d'étalonnage. On a alors, en accentuant les symboles correspondant aux deux échelles,

$$I'_{12} - I''_{12} = 2{,}5 \left\{ \left(\log \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} - \log \frac{L_1}{L_2} \right) - \left(\log \frac{\mathcal{E}''_1}{\mathcal{E}''_2} - \log \frac{L_1}{L_2} \right) \right\}$$

$$= 2{,}5 \log \frac{\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}''_2}{\mathcal{E}'_2 \mathcal{E}''_1} = \text{const.}$$

Tous les indices sont modifiés d'une constante soustractive égale à la valeur, dans l'ancienne échelle, de l'index de la nouvelle étoile d'index nul.

15. — *Calcul de l'index de couleur.*

Nous avons vu que la magnitude absolue, relative à un récepteur r, présentant k maxima de sensibilité est

$$m_r = \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - \Theta(T_e) \ ,$$

où

$$\Theta(T) = 2{,}5 \log \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=k \\ i=\infty}} \frac{C_j e^{a_j} \lambda_j^{a_j} (a_j + 3)\,!}{\left(a_j \lambda_j + i \frac{b}{T}\right)^{a_j+4}}$$

Dans ces conditions, l'index de couleur prend la forme

$$I_{12} = \mathcal{D} + \Theta_2(T_e) - \Theta_1(T_e)$$

où Θ_1 et Θ_2 sont les fonctions Θ pour chacun des deux récepteurs considérés.

La constante $\mathcal{D}$ est déterminée par la température effective T_e^* d'une étoile d'index nul.

$$\mathcal{D} = \Theta_1(T_e^*) - \Theta_2(T_e^*) \ .$$

Cette expression de l'index est embarrassée de sommations relativement compliquées. Elle est obtenue dans le cas de la loi de Planck. Si l'on admet l'approximation constituée par la loi de Wien, ce que nous ferons dans la suite, la sommation infinie en i se réduit à son premier terme. Seules subsistent des sommations finies qui comportent autant de termes que les courbes de sensibilité de maxima. Dans l'état actuel de l'astrophotométrie, la considération d'un seul maximum de sensibilité est généralement suffisante. On a alors

$$I_{12} = 2{,}5 \log \mathcal{R} \frac{e^{a''} \lambda''^{a''} (a'' + 3)\,!}{\left(a'' \lambda'' + \frac{b}{T_e}\right)^{a''+4}} \frac{\left(a' \lambda' + \frac{b}{T_e}\right)^{a'+4}}{e^{a'} \lambda'^{a'} (a' + 3)\,!}$$

$$= 2{,}5 \log \left(\frac{a'' \lambda'' + \frac{b}{T_e^*}}{a'' \lambda'' + \frac{b}{T_e}}\right)^{a''+4} \left(\frac{a' \lambda' + \frac{b}{T_e}}{a' \lambda' + \frac{b}{T_e^*}}\right)^{a'+4},$$

formule dite à double exposant.

Il arrive enfin que les deux exposants d'acuité soient assez peu différents l'un de l'autre pour qu'on puisse pratiquement les identifier et poser

$$a' = a'' = a\,.$$

On obtient ainsi la formule dite à simple exposant

$$I_{12} = 2{,}5 \log \mathcal{R} \left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^{a} \left(\frac{a\lambda' T_e + b}{a\lambda'' T_e + b}\right)^{a+4}$$

$$= 2{,}5\,(a + 4) \log \left(\frac{a\lambda'' T_e^* + b}{a\lambda' T_e^* + b}\right) \left(\frac{a\lambda' T_e + b}{a\lambda'' T_e + b}\right)$$

16. — *Discussion de la formule à double exposant, considérée comme une fonction de la température.*

Nous supposons finis, non nuls et différents les exposants d'acuité a' et a''.

A une constante près, on peut écrire

$$I_{12} = 1.08574 \text{ Log } \frac{(a' \lambda' T_e + b)^{a'+4}}{(a'' \lambda'' T_e + b)^{a''+4}}\, T_e^{a''-a'}\,.$$

Pour $T_e = 0$, on a

$$I_{12}(0) = 1.08574 \text{ Log } (b^{a'-a''} . 0^{a''-a'}) .$$

L'index vaut alors $+ \infty$ ou $- \infty$, suivant que $a' - a''$ est positif ou négatif.

Soit $T_e = \infty$. Il vient

$$I_{12}(\infty) = 1.08574 \text{ Log } \frac{(a'\lambda')^{a'+4}}{(a''\lambda'')^{a''+4}} ,$$

quantité qui est finie.

Pour T_e variant de 0 à l'infini, l'index varie de l'infini à une quantité finie. Les cas de l'index absolu (où l'un des exposants est nul), de la sensibilité concentrée (où ils peuvent être infinis) et de la formule à simple exposant restent réservés.

Pour étudier le sens de cette variation, calculons la dérivée

$$\frac{dI_{12}}{dT_e} = \frac{1{,}08574 \, b \left\{ 4(a'\lambda' - a''\lambda'') + \frac{b}{T_e}(a'' - a') + a'a''(\lambda' - \lambda'') \right\}}{(a'\lambda' T_e + b)(a''\lambda'' T_e + b)} .$$

Elle s'annule pour $T_e = \infty$ et pour

$$T_m = \frac{b(a' - a'')}{4(a'\lambda' - a''\lambda'') + a'a''(\lambda' - \lambda'')} .$$

Supposons a'' petit par rapport à a'. T_m est alors voisin de $\frac{b}{4\lambda'}$. Cette température appartient au domaine des températures stellaires. Si les exposants d'acuité sont suffisamment différents, l'index peut présenter un extremum unique, correspondant à une température accessible aux étoiles.

Supposons maintenant que les deux exposants a' et a'' soient peu différents, et pour fixer les idées, soit $\lambda' > \lambda''$. Le seul terme de la dérivée qui puisse être négatif est celui en $b(a'' - a') T_e^{-1}$, mais il est petit. Si les exposants d'acuité sont peu différents, l'index varie toujours dans le même sens.

17. — *Discussion de la formule à double exposant, considérée comme fonction de la longueur d'onde et de l'acuité du maximum de sensibilité.*

Mettons l'expression de l'index sous la forme

$$I_{12} = 1{,}08574 \operatorname{Log} \left(\frac{a''\lambda'' + \frac{b}{T_e^*}}{a''\lambda'' + \frac{b}{T_e}}\right)^{a''+4} \left(\frac{a'\lambda' + \frac{b}{T_e}}{a'\lambda' + \frac{b}{T_e^*}}\right)^{a'+4} .$$

Seules de faibles variations de λ' et λ'' ont un sens physique. Dérivons donc. Pour calculer $\frac{\partial I_{12}}{\partial \lambda'}$, remarquons que l'on a, à une constante près,

$$I_{12} = 1{,}08574\, (a' + 4) \operatorname{Log} \frac{a'\lambda' + \frac{b}{T_e}}{a'\lambda' + \frac{b}{T_e^*}} .$$

Il vient donc

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \lambda'} = 1{,}08574 \frac{(a' + 4)\, a' b \left(\frac{1}{T_e^*} - \frac{1}{T_e}\right)}{\left(a'\lambda' + \frac{b}{T_e}\right)\left(a'\lambda' + \frac{b}{T_e^*}\right)}$$

et de même

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \lambda''} = 1{,}08574 \frac{(a'' + 4)\, a'' b \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_e^*}\right)}{\left(a''\lambda'' + \frac{b}{T_e}\right)\left(a''\lambda'' + \frac{b}{T_e^*}\right)} .$$

Ces deux dérivées sont nulles pour $T_e = T_e^*$, ce qui est évident, puisqu'alors $I_{12} = 0$ par définition. Elles sont de signes opposés, la première ayant le signe de $T_e - T_e^*$. Elles croissent en valeur absolue avec cette différence de température. Les valeurs calculées de l'index avec des valeurs approximatives des longueurs d'onde λ' et λ'' des maxima de sensibilité, sont d'autant moins sûres elles-mêmes, qu'il s'agit de températures plus différentes de T_e^*. Cette insécurité est surtout marquée pour les basses températures, car alors, le terme T_e^{-1} est relativement grand.

Formons encore la dérivée

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial a'} = 1{,}08574 \left\{ (a' + 4)\, b\lambda' \left(\frac{1}{T_e^*} - \frac{1}{T_e}\right) + \text{Log}\, \frac{a'\lambda' + \dfrac{b}{T_e}}{a'\lambda' + \dfrac{b}{T_e^*}} \right\}.$$

Elle conduit aux mêmes conclusions que ci-dessus.

18. — *Cas particulier de l'index absolu.*

C'est le cas où le récepteur r_2 est bolométrique. On l'obtient à partir de la formule générale en posant $a'' = 0$. L'index absolu ainsi obtenu est relatif au récepteur r_1. Laissant tomber les accents, son expression est

$$I_1 = m_1 - m_b = 2{,}5 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*}\right)^4 \left(\frac{a\lambda_s + \dfrac{b}{T_e}}{a\lambda_s + \dfrac{b}{T_e^*}}\right)^{a+4}$$

où m_b est la magnitude bolométrique.

19. — *Discussion de l'index absolu, la température étant la variable indépendante.*

Faisons dans la formule ci-dessus $T_e = \infty$. Il vient

$$I_1(\infty) = +\infty .$$

Pour $T_e = 0$, I_1 se présente sous la forme indéterminée $\log(0 \times \infty)$. Le degré d'infinité du facteur d'exposant $a + 4$ dépasse celui du quotient des températures. Donc

$$I_1(0) = 2{,}5 \log(\infty) = +\infty .$$

La fonction $I_1(T_e)$, continue dans le domaine où T_e est positif (qui seul a un sens physique), est infinie aux extrémités de cet intervalle. Elle présente donc au moins un minimum.

La dérivée est

$$\frac{dI_1}{dT_e} = 1{,}08574 \frac{a(4\lambda_s T_e - b)}{(a\lambda_s T_e + b)T_e} .$$

Infinie pour $T_e = 0$, cette dérivée est nulle à l'infini.

I possède un minimum unique, pour la température

$$T_m = \frac{b}{4\lambda_s} .$$

Rapprochons cette formule de celle qui exprime la loi du déplacement

$$T' = \frac{b}{5\lambda_s} .$$

On a donc

$$5T' = 4T_m .$$

La température effective d'une étoile d'index absolu minimum, par rapport à un récepteur donné, est les $^5/_4$ de celle d'un radiateur intégral ayant son maximum d'émission pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité du récepteur; cette température est indépendante de l'acuité du maximum de sensibilité.

Calculons encore la deuxième dérivée

$$\frac{d^2 I_1}{dT_e^2} = \frac{1{,}08574\, a(-4a\lambda_s^2 T_e^2 + 2ba\lambda_s T_e + b^2)}{(a\lambda_s T_e + b)^2 T_e^2} .$$

La fonction I_1 possède deux points d'inflexion déterminés par l'équation

$$4a\lambda_s^2 T_e^2 - 2ba\lambda_s T_e - b^2 = 0 .$$

Les racines de cette équation sont des signes contraires, car

$$T'T'' = -\frac{b^2}{4a\lambda_s^2} < 0 .$$

Le seul point d'inflexion intéressant a lieu pour la température

$$T_i = \frac{b}{4\lambda_s}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}}\right) = T_m\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\right).$$

La parenthèse dépasse légèrement 2. Pour des étoiles chaudes (de températures de l'ordre du double de celle correspondant à l'index minimum), l'index absolu est une fonction sensiblement linéaire de la température.

Nous allons montrer que ce caractère linéaire de I_1 augmente avec l'acuité du maximum de sensibilité ou lorsque la longueur d'onde de ce maximum de sensibilité diminue (et que par conséquent le minimum de I_1 et l'inflexion se produisent pour des températures plus élevées). Au voisinage de l'inflexion, la fonction diffère d'autant moins d'une droite que la troisième dérivée est moindre. Or, on a

$$\frac{d^3 I_1}{dT_e^3} = \frac{2 \cdot 1{,}08574\, a\,(4a^2\lambda_s^3 T_e^3 - 3a^2 b\lambda_s^2 T_e^2 - 3ab^2\lambda_s T_e - b^3)}{(a\lambda_s T_e + b)^3 T_e^3}.$$

L'inflexion est sensiblement atteinte pour la température

$$T_i = \frac{b}{2\lambda_s},$$

pour laquelle la troisième dérivée prend la valeur

$$-\frac{1{,}08574\, a(a^2 + 6a + 4)}{2\left(\frac{a}{2} + 1\right)^3} \cdot \frac{1}{T_i^3}.$$

Cette expression diminue lorsque a et T_i augmentent, ou que la longueur d'onde λ_s diminue.

Examinons encore la courbure de la fonction I_1 en son minimum. Il suffit de calculer $\frac{d^2 I_1}{dT_e^2}$ pour $T_e = \frac{b}{4\lambda_s}$. Il vient

$$\frac{d^2 I_1}{dT_m^2} = \frac{4 \cdot 1{,}08574\, a}{a + 4}\left(\frac{4\lambda_s}{b}\right)^2 = \frac{4 \cdot 1{,}08574\, a}{a + 4} \cdot \frac{1}{T_m^2}.$$

Cette courbure varie peu avec l'exposant d'acuité, dès qu'il est un peu grand. Elle augmente avec la longueur d'onde du maximum de sensibilité ou lorsque la température de l'étoile d'index minimum diminue.

20. — *Effet sur l'index absolu d'une variation de la longueur d'onde du maximum de sensibilité.*

Seules de faibles variations de λ_s ont un sens physique. Pour λ_s très petit, on aurait

$$\mathrm{I}_1 = 2{,}5 \log \left(\frac{\mathrm{T}_e}{\mathrm{T}_e^*}\right)^4 \left(\frac{\dfrac{b}{\mathrm{T}_e}}{\dfrac{b}{\mathrm{T}_e^*}}\right)^{a+4} = 2{,}5\,a \log \frac{\mathrm{T}_e^*}{\mathrm{T}_e} .$$

Si, au contraire, λ_s était grand, on obtiendrait

$$\mathrm{I}_1 = 2{,}5 \log \left(\frac{\mathrm{T}_e}{\mathrm{T}_e^*}\right)^4 (1)^{a+4} = 10 \log \frac{\mathrm{T}_e}{\mathrm{T}_e^*} .$$

L'index varierait alors comme la magnitude bolométrique, puisque

$$m_b = \log \mathcal{B} - 5 \log r_0 - 10 \log \mathrm{T}_e .$$

Formons la dérivée $\dfrac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial \lambda_s}$, en posant, à une constante additive près,

$$\mathrm{I}_1 = 1{,}08574\,(a + 4)\ \mathrm{Log} \frac{a\lambda_s + \dfrac{b}{\mathrm{T}_e}}{a\lambda_s + \dfrac{b}{\mathrm{T}_e^*}} .$$

Nous avons déjà rencontré cette expression dans la discussion de la formule générale. Ici comme alors, il s'agit d'une modification apportée à un seul récepteur, les calculs sont évidemment les mêmes. On a donc

$$\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial \lambda_s} = \frac{1{,}08574\,(a + 4)\,ab \left(\dfrac{1}{\mathrm{T}_e^*} - \dfrac{1}{\mathrm{T}_e}\right)}{\left(a\lambda_s + \dfrac{b}{\mathrm{T}_e}\right)\left(a\lambda_s + \dfrac{b}{\mathrm{T}_e^*}\right)} .$$

Cette dérivée ne s'annule jamais, sauf pour $T_e = T^*_e$, où elle est évidemment nulle, puisque I_1 est alors lui-même nul par définition. Elle a le signe de $T_e - T^*_e$. Une augmentation de la longueur d'onde du maximum de sensibilité entraîne une augmentation de l'index pour les étoiles plus chaudes que celles d'index nul et une diminution (algébrique) pour les autres.

Si T_e est voisin de T^*_e, ou grand, cette dérivée est relativement petite. Les valeurs de l'index sont peu influencées par une erreur sur λ_s, pour autant qu'il s'agit d'étoiles chaudes.

21. — *Rôle de l'exposant d'acuité.*

Une discussion analogue à celle du cas général conduit à la même conclusion sur la sécurité des valeurs calculées de l'index des étoiles chaudes.

Nous aurons à résoudre le problème suivant: déterminer l'exposant d'acuité a, connaissant l'index absolu I pour une température T_e et la température d'une étoile d'index nul.

Cela revient à résoudre l'équation transcendante

$$10^{\frac{I}{2,5} - 4 \log \frac{T_e}{T^*_e}} = \left(\frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a\lambda_s + \frac{b}{T^*_e}} \right)^{a+4},$$

où le premier membre est connu.

Considérons l'expression

$$y(a) = \frac{a + \frac{b}{\lambda_s T_e}}{a + \frac{b}{\lambda_s T^*_e}} = 1 + \frac{\alpha}{a + \beta},$$

où

$$\beta = \frac{b}{\lambda_s T^*_e} > 0 \qquad \alpha = \frac{b}{\lambda_s}\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T^*_e}\right) = \frac{b}{\lambda_s T_e} - \beta .$$

Soit $T_e < T^*_e$; α est positif.

Dans ces conditions, $y > 1$, sauf pour $a = \infty$, où $y = 1$. y décroît constamment, lorsque a augmente.

Examinons la fonction

$$z(a) = y(a)^{a+4} = \left(1 + \frac{\alpha}{a+\beta}\right)^{a+\beta}\left(1 + \frac{\alpha}{a+\beta}\right)^{4-\beta}.$$

On a

$$\lim_{a \to \infty} z(a) = e^{\alpha} .$$

Si $z(a)$ varie constamment dans le même sens, l'équation transcendante peut n'avoir aucune solution; ce sera le cas, si $z(a)$ augmente avec a et si e^{α} est inférieur au premier membre de l'équation.

Mettons la fonction $z(a)$ sous la forme

$$\operatorname{Log} z(a) = (a + 4) \operatorname{Log} y(a)$$

et calculons sa dérivée

$$\frac{dz}{da} = z\left(\operatorname{Log} y(a) - \frac{\alpha(a+4)}{y(a+\beta)^2}\right) .$$

Le logarithme a le signe de α; le terme algébrique, le signe opposé. On ne peut donc rien dire *a priori* du signe de la parenthèse. Pour de grandes valeurs de a, le signe de la dérivée est constant. Cherchons à quelle condition elle sera positive. Pour cela, développons en série et faisons $a = \infty$. Il vient

$$\lim_{a \to \infty} \frac{dz}{da} = e^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha + \beta - 4)}{(\alpha + \beta + a)(a + \beta)} .$$

La dérivée de z tend vers 0 comme a^{-2}, quand a tend vers l'infini. La condition pour que z tende vers e^{α} par des valeurs croissantes est

$$\alpha + \beta > 4 .$$

22. — *Expression de l'index absolu dans le cas de l'acuité infinie.*

Pour traiter ce cas particulier, posons

$$I_1 = 10 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*}\right) + 1{,}08574 \left\{ 4 \operatorname{Log} \frac{1 + \dfrac{b}{a\lambda_s T_e}}{1 + \dfrac{b}{a\lambda_s T_e^*}} + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e}\right)^a - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e^*}\right)^a \right\}$$

A la limite, pour a infini, on a

$$I_1 = 10 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*}\right) + 1{,}08574 \frac{b}{\lambda_s}\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_e^*}\right),$$

avec $1.08574\, b = 1.560$ cm degré.

On aurait pu obtenir directement cette formule en formant la différence de l'expression de la magnitude bolométrique et de celle de la magnitude au maximum de sensibilité, dont les termes variables sont $-10 \log T_e$ pour la première et $1.560\, T_e^{-1}$ pour la seconde.

Le minimum de I_1, obtenu pour $T_e = \frac{b}{4\lambda_s}$, quel que soit a, subsiste ici. L'inflexion a maintenant lieu pour une température égale au double de celle du minimum; nous savons que cette inflexion est particulièrement longue.

On peut se demander jusqu'à quel point la formule de I_1, relative à la sensibilité concentrée, est capable de rendre des services et de représenter suffisamment bien l'index absolu. Pour le voir, formons la différence des expressions de I pour a fini et pour a infini. Ce problème est évidemment le même que celui qui consiste à comparer la magnitude globale à la magnitude au maximum de sensibilité. Or nous avons vu que c'est pour la température $T_e = \frac{b}{4\lambda_s}$ égale à celle du minimum de I_1, que ces deux expressions varient identiquement en fonction de la température; cela est d'ailleurs évident, puisque l'abscisse de ce minimum est indépendant de l'acuité. Ailleurs, la pente des deux courbes diffère systématiquement. L'hypothèse de la sensibilité concentrée pourra donc être satisfaisante si l'on a à considérer de faibles variations de température autour de la température pour laquelle l'index absolu est minimum. Cela sera, par exemple, le cas pour l'index absolu visuel et le Soleil, mais l'application de l'hypothèse simple à des observations photographiques d'étoiles de type solaire est un peu hasardeuse.

23. — *Cas où la température de l'étoile d'index nul coïncide avec celle du minimum de l'index absolu.*

Dans certains cas, on trouve avantage à n'avoir affaire qu'à des valeurs positives de l'index absolu et à poser $I_{min} = O$. Cela revient à faire

$$T_e^* = T_m = \frac{b}{4\lambda_s} .$$

Nous savons qu'un changement de la température de l'étoile d'index nul ne modifie pas la forme de la courbe de I_1 en fonction de la température, mais n'entraîne qu'une translation parallèle à l'axe des I_1. La formule donnant l'index absolu devient, dans l'hypothèse ci-dessus,

$$I_1 = 2{,}5 \log \left(\frac{4\lambda_s T_e}{b}\right)^4 \left(\frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{(a+4)\lambda_s}\right)^{a+4} .$$

Rien n'est changé aux dérivées prises par rapport à la température, mais une variation de la longueur d'onde du maximum de sensibilité λ_s a une double influence sur la formule, directement, puisque λ_s y figure explicitement et par l'intermédiaire de T_e^*.

Le calcul donne

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_s} = \frac{1.08574\, a \left(4\lambda_s - \frac{b}{T_e}\right)}{\left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e}\right)\lambda_s} .$$

Une augmentation de λ_s entraîne une diminution de T_e^*, une augmentation de l'index absolu des étoiles chaudes et une diminution de celui des étoiles froides. La chose est évidente pour les étoiles de températures voisines de celle d'étoiles d'index absolu nul.

Nous savons par l'étude du cas général que la courbure au minimum de I_1, de la courbe de I_1 en fonction de la température, augmente avec λ_s.

24. — *Discussion de la formule à simple exposant, considérée comme une fonction de la température et de la longueur d'onde du maximum de sensibilité.*

Nous supposons fini et non nul l'exposant d'acuité. Le cas où $a = 0$ est sans intérêt: il correspond à la différence, évidemment constante, de deux magnitudes bolométriques. Nous examinerons à part le cas de l'acuité infinie.

L'expression de l'index est

$$I_{12} = 2{,}5\,(a + 4)\log \mathcal{O}\,\frac{a\lambda' T_e + b}{a\lambda'' T_e + b}$$

où $\mathcal{O}$ est la constante

$$\mathcal{O} = \frac{a\lambda'' T_e^* + b}{a\lambda' T_e^* + b}\,.$$

Pour $T_e = 0$, on a

$$I_{12} = 2{,}5\,(a + 4)\log \mathcal{O}$$

et pour $T_e = \infty$,

$$I_{12} = 2{,}5\,(a + 4)\log \mathcal{O}\,\frac{\lambda'}{\lambda''}\,.$$

Formons la dérivée

$$\frac{dI_{12}}{dT_e} = \frac{1{,}08574\,a\,.\,b\,(a + 4)\,(\lambda' - \lambda'')}{(a\lambda' T_e + b)(a\lambda'' T_e + b)}\,.$$

Elle est de signe constant. Elle augmente quand T_e diminue. L'index varie toujours dans le même sens, entre deux limites finies, et cela d'autant plus rapidement que la température est moindre.

Les valeurs extrêmes de l'index ne peuvent différer de plus de

$$I_{12}(\infty) - I_{12}(0) = 2{,}5\,(a+4)\log\left(\frac{\lambda'}{\lambda''}\right).$$

Pour étudier le rôle de λ' ou λ'', il suffit de reprendre la discussion faite à propos de la formule à double exposant. On est conduit aux mêmes conclusions sur l'insécurité des indices calculés pour les étoiles froides.

25. — *Rôle de l'exposant d'acuité dans la formule à simple exposant.*

La confrontation d'une échelle d'indices avec la formule conduit au problème suivant: On donne les longueurs d'onde λ' et λ'' des maxima de sensibilité des deux récepteurs, l'index I et la température d'une étoile, et celle de l'étoile d'index nul. Calculer l'exposant a.

On obtient l'équation transcendante

$$10^{\frac{I}{2{,}5}} = \left(\frac{a+\dfrac{b}{\lambda''T_e^*}}{a+\dfrac{b}{\lambda'T_e^*}}\cdot\frac{a+\dfrac{b}{\lambda'T_e}}{a+\dfrac{b}{\lambda''T_e}}\right)^{a+4}.$$

Appelons $y\,(a)$ la parenthèse du second membre, et posons

$$y(a) = \frac{a^2+\alpha a+p}{a^2+\beta a+p} = 1 + \frac{\gamma a}{a^2+\beta a+p},$$

avec

$$\alpha = b\left(\frac{1}{\lambda''T_e^*}+\frac{1}{\lambda'T_e}\right); \qquad \beta = b\left(\frac{1}{\lambda'T_e^*}+\frac{1}{\lambda''T_e}\right),$$

$$\gamma = \alpha - \beta, \qquad p = \frac{b^2}{\lambda'\lambda''T_eT_e^*}.$$

Supposons $\alpha > \beta$, donc $\gamma > 0$. Si cela n'était pas réalisé, les considérations suivantes s'appliqueraient à $I_{21} = - I_{12}$. $y(a)$ est toujours supérieur à 1, sauf pour $a = 0$ et $a = \infty$, où $y = 1$. Pour a positif, $y(a)$ est une fonction continue de a, car β et p sont positifs. Pour a positif, y passe donc par un maximum et peut-être par un minimum. Le nombre des extrema ne peut dépasser deux, puisque la relation entre y et a est du troisième degré. Calculons la dérivée

$$\frac{dy}{da} = \frac{(\alpha - \beta)(p - a^2)}{(a^2 + \beta a + p)^2} .$$

Cette dérivée s'annule pour

$$a = \sqrt{p} \cdot$$

L'extremum de y est unique, pour a positif, seul cas qui nous intéresse ici.

Considérons le second membre de l'équation et posons

$$z(a) = y(a)^{a+4} = \left(1 + \frac{\gamma a}{a^2 + \beta a + p}\right)^{a+4} .$$

On a $z(0) = 1$.

Pour examiner le cas où a tend vers l'infini, mettons z sous la forme

$$z(a) = \left(1 + \frac{\gamma}{a + \beta + \dfrac{p}{a}}\right)^4 \left(1 + \frac{\gamma}{a\left(1 + \dfrac{\beta}{a} + \dfrac{p}{a^2}\right)}\right)^a .$$

Il vient

$$\lim_{a \to \infty} z(a) = e^{\gamma} = e^{\alpha - \beta} .$$

Cette limite est finie.

Nous avons vu que y décroît pour de grandes valeurs de a. Qu'en est-il de $z(a)$? Calculons sa dérivée en posant

$$\text{Log}\, z(a) = (a + 4) \,\text{Log}\, y(a) ,$$

$$\frac{dz}{da} = z\left(\frac{a+4}{y} \cdot \frac{dy}{da} + \text{Log}\, y\right) .$$

Le logarithme est toujours positif ou nul, puisque $y \geqq 1$. Mais le premier terme de la parenthèse a le signe de $\dfrac{dy}{da}$, dérivée qui est négative pour de grandes valeurs de a. Voyons à quelle condition $\frac{dz}{da}$ est positif pour ces grandes valeurs de a. Pour cela, développons en série. Il vient

$$\frac{1}{y^{a+3}}\frac{dz}{da} = \frac{\left\{\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\right\}}{a^2\left(1 + \frac{\beta}{a} + \frac{p}{a^2}\right)} \, .$$

Pour a très grand, la dérivée est positive si l'accolade l'est, c'est-à-dire si

$$\alpha + \beta > 8 \, .$$

26. — *Expression de la formule à simple exposant dans le cas de l'acuité infinie.*

Voyons ce que devient la formule à simple exposant lorsque l'exposant d'acuité augmente indéfiniment. Nous avons vu que la magnitude tend vers la magnitude au maximum de sensibilité

$$m_r = \mathcal{E} - 5 \log r_0 + \frac{1{,}08574\, b}{\lambda_s \mathrm{T}_e} \, .$$

Formons la différence de deux expressions de cette espèce, tenons en outre compte du fait que l'index doit être nul pour la température T_e^* ; il vient

$$\mathrm{I}_{12} = 1{,}08574 \cdot b\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{T}_e} - \frac{1}{\mathrm{T}_e^*}\right) \, .$$

C'est la formule de M. Russel pour le calcul de l'index de couleur[1]. Elle est un cas particulier de la formule à simple exposant. Nous verrons qu'elle est insuffisante pour représenter correctement les valeurs observées de l'index de couleur photo-visuel.

La formule de M. Russel peut encore être obtenue à partir

[1] Russel, Dugan, Stewart. *Astronomy* II, p. 733.

de l'expression pour l'acuité infinie de deux indices absolus. Rappelons que l'on a

$$I_{12} - I_{32} = I_{13} \,, \qquad \text{ou} \qquad I_1 - I_3 = I_{13} \,,$$

si le récepteur r_2 est bolométrique.

Dans le cas particulier, les termes en $10 \log \frac{T_e}{T_e^*}$ de la formule de l'index absolu, termes qui correspondent à la magnitude bolométrique, disparaissent et il ne reste que la différence de deux termes en

$$\frac{1{,}08574\, b}{\lambda_s} \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_e^*}\right) .$$

La formule de M. Russel a une propriété assez curieuse qui en restreint l'application au problème inverse du calcul de l'index de couleur. Supposons qu'il s'agisse de déterminer les constantes de sensibilité (ici les longueurs d'onde des maxima de sensibilité des deux récepteurs considérés) à partir d'une échelle d'indices donnés en fonction de la température. Les valeurs données doivent être représentées géométriquement, en fonction de l'inverse de la température, par une droite, dont le coefficient angulaire est proportionnel à la différence des nombres d'ondes $\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}$, correspondant aux maxima de sensibilité des récepteurs. Mais il est impossible de déterminer séparément les deux longueurs d'onde λ' et λ''.

Observatoire de Genève.

(A suivre)