Le problème du "décalage" des phases dans les variations périodiques des céphéides [suite et fin]

Le problème du "décalage" des phases dans les variations périodiques des céphéides

PAR

Georges TIERCY

(suite et fin)

III. — Pulsation homologue.

9. — *Généralités.* — L'hypothèse d'une pulsation dite homologue offre la seule possibilité d'envisager un décalage, tel que celui qu'on observe entre les phases des extrema de pulsation et les phases correspondantes des extrema lumineux, ou celles des extrema de P. On a:

$$\left\{\begin{array}{l} \tau = \dfrac{1}{r_0} = \text{fonction de } t \ ; \\[2ex] \varkappa = \dfrac{r}{r_0} = \text{fonction de } \xi \text{ et de } t \ ; \end{array}\right.$$

cela revient à dire qu'un rayon r quelconque est une fonction du temps différente de la fonction $r_0(t)$; $r(t)$ diffère de $r_0(t)$ d'une part en raison de l'amplitude A de la variation (laquelle amplitude dépend de r_i), et d'autre part, en raison de la phase. On aura d'ailleurs toujours, à la surface:

$$\varkappa_0 = 1 \ ;$$

autrement dit, si l'on pose:

$$\varkappa = \varkappa_i(1 + \varkappa_1) \ ,$$

on aura toujours:

$$\varkappa_{1,\,0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \varkappa_0 = \varkappa_{i,\,0} = 1 \;.$$

En écrivant comme précédemment:

$$r = r_i(1 + r_1) \;,$$

on pourrait écrire, dans le cas le plus simple, c'est-à-dire celui où la pulsation est harmonique:

$$r_1 = \mathrm{A}_i \cos(\mathrm{N}t + \mathrm{N}_i) \;,$$

les quantités A_i et N_i dépendant de r_i ou de ξ. A la surface limite même, on aurait:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}_{i,\,0} = \mathrm{A}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_{i,\,0} = 0 \;, \\ r_{1,\,0} = \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{N}t \quad \text{(limite de la couche renversante)} \;. \end{array} \right.$$

Il y aurait ainsi un décalage progressif, du centre à la périphérie.

Disons tout de suite, et nous préciserons le fait au n° 21, que, dans une couche dont les ξ comprennent la valeur ξ_0 de frontière photosphérique, la quantité N_i prendrait une valeur N_0 non nulle, pour tomber ensuite à zéro, par exemple à la limite de la couche renversante; la valeur de N_0 dépendrait du retard observé dans la variation de P_e.

Rappelons qu'on a toujours:

$$\mathrm{P} = \int_r^{r_0} \rho \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} - \frac{dw}{dt} \right] dr \;, \tag{32}$$

où $\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} = \mathrm{G}\dfrac{\mathrm{M}_r}{r^2}$; dans cette intégrale de P, il s'agit naturellement de passer de r à r_0 *à temps constant*, donc à τ constant, puisque:

$$\tau = \frac{1}{r_0} = \text{fonction de } t \text{ seul} \;.$$

On a d'autre part:

$$\varkappa = \frac{r}{r_0} = \varkappa(t,\, r) \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{\varkappa(t,\, r)}{\tau(t)} \;;$$

à temps constant, il vient:

$$dr = \frac{d\varkappa}{\tau} ;$$

c'est-à-dire que $d\varkappa$ est proportionnelle à dr à ce moment-là. On trouve ensuite:

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = G\frac{M_r}{\varkappa^2} \cdot \tau^2$$

comme pour la pulsation dite uniforme; puis:

$$w = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right) = -\frac{\varkappa}{\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\varkappa}{dt} ;$$

$$\frac{dw}{dt} = \varkappa\left[\frac{2}{\tau^3}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{d^2\tau}{dt^2}\right] - \frac{2}{\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{d\varkappa}{dt} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d^2\varkappa}{dt^2} ;$$

et comme on a encore, à temps constant:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{\partial M_r}{\partial r} \qquad \text{ou} \qquad \rho = \tau^3\cdot\frac{\partial M_r}{\partial \varkappa}\cdot\frac{1}{4\pi\varkappa^2} ,$$

l'expression (32) devient:

$$P = \int_{\varkappa}^{1} \tau^3\cdot\frac{\partial M_r}{\partial\varkappa}\cdot\frac{1}{4\pi\varkappa^2}\left\{\frac{GM_r}{\varkappa^2}\cdot\tau^2 - \varkappa\left[\frac{2}{\tau^3}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{d^2\tau}{dt^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right\}\frac{d\varkappa}{\tau} . \qquad (33)$$

Si les *vitesses de transformation* sont négligeables, on retrouve le type d'égalité:

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(\varkappa) ;$$

et la distribution de P est donnée par $\varphi(\varkappa)$; c'est le cas du théorème du *viriel*, où la durée du phénomène est extrêmement longue. Il faut préciser qu'ici, cette fonction $\varphi(\varkappa)$ varie d'une époque à l'autre, les deux époques considérées étant extrêmement lointaines l'une de l'autre.

Mais, dans le cas des Céphéides, on doit conserver l'expression (33) complète, en gardant les termes en $\frac{d\tau}{dt}$, $\frac{d^2\tau}{dt^2}$, $\frac{d\varkappa}{dt}$, $\frac{d^2\varkappa}{dt^2}$. Et la pression ne varie plus comme l'inverse de r^4. Répétons, pour bien fixer les idées, que l'intégrale (33) est prise à temps arrêté.

Si les vitesses de transformation étaient négligeables, la pression P serait donnée par la distribution polytropique de classe 3; et l'on sait qu'alors:

$$\varphi(\varkappa) = r_0^4 \mathrm{P}_c \psi^4 ,$$

comme on l'a vu au n° 3 (égalité 10); de même on aurait pour la température:

$$\mathrm{T} = \tau \cdot \varphi_1(\varkappa) , \qquad \varphi_1(\varkappa) = r_0 \mathrm{T}_c \psi .$$

Quant à la densité ρ (distribution à temps arrêté):

$$\rho = \tau^3 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa^2} ,$$

elle est proportionnelle à τ^3; mais, si le temps s'écoule, le facteur de τ^3 ne reste pas constant pour une couche donnée, puisqu'alors $\varkappa$ varie avec t.

Les égalités:

$$\begin{cases} \mathrm{P} = \tau^4 \cdot \varphi(\varkappa) , \\ \mathrm{T} = \tau \cdot \varphi_1(\varkappa) , \end{cases}$$

ne sont valables que si la modification est infiniment lente; on a alors les conditions de stabilité d'une étoile invariable, pour une valeur donnée de t. C'est encore la solution de M. Bialobrzeski ou de M. Eddington.

10. — *Cas des Céphéides.* — Les modifications sont alors rapides, et les égalités précédentes ne sont plus acceptables; il faut étudier l'expression:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} = {} & \tau^4 \int_\varkappa^1 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{\mathrm{GM}_r}{4\pi\varkappa^4}\, d\varkappa - \int_\varkappa^1 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa} \left[\frac{2}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] d\varkappa \; + \\ & + \frac{d\tau}{dt} \int_\varkappa^1 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{2\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\varkappa - \tau \int_\varkappa^1 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\varkappa \; ; \end{aligned} \right. \tag{35}$$

remarquons que les facteurs $\left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right)$ ne peuvent pas être sortis des signes intégraux, parce que le rapport $\varkappa$ est fonction, non seulement de t, mais aussi de ξ.

Posons maintenant:

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi(\varkappa) &= \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{GM_r}{4\pi\varkappa^4}\, d\varkappa = r_0^4 P_c \psi^4 ; \\
\Phi(\varkappa) &= \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{4\pi\varkappa} ; \\
\Gamma(\varkappa) &= \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{2\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\varkappa ; \\
Z(\varkappa) &= \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\varkappa ;
\end{aligned}\right. \tag{35}$$

ce qui permet d'écrire plus rapidement:

$$P = \tau^4 \varphi(\varkappa) + \left[\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\right] \cdot \Phi(\varkappa) + \frac{d\tau}{dt} \cdot \Gamma(\varkappa) - \tau \cdot Z(\varkappa) . \tag{36}$$

Pour une couche donnée, les fonctions $\varphi(\varkappa)$, $\Phi(\varkappa)$, $\Gamma(\varkappa)$ et $Z(\varkappa)$ ne sont pas constantes; elles varient avec le temps; de sorte que la pression P dépend à la fois de τ et des vitesses $\frac{d\tau}{dt}$ et $\frac{d\varkappa}{dt}$.

Si l'on considère la valeur moyenne $r_{0,i}$ de r_0, on aura pour les conditions *statiques*, autour desquelles oscillent les conditions réelles:

$$\left\{\begin{aligned}
\tau_i &= \frac{1}{r_{0,i}} ; \\
P_i &= \tau_i^4 \cdot \varphi(\varkappa_i) ; \\
\varphi(\varkappa_i) &= r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4 .
\end{aligned}\right.$$

On voit par (36) que la variation δP de la pression se compose des variations respectives de quatre termes. Par exemple, le premier terme de (36) donne la contribution suivante à δP:

$$\tau^4 \varphi(\varkappa) - \tau_i^4 \varphi(\varkappa_i) \ ;$$

et, à la différence de ce qui se passait pour une pulsation uniforme, $\varphi(\varkappa)$ n'est plus constamment égale à $\varphi(\varkappa_i)$, puisque $\varkappa$ varie avec le temps. On fera une remarque identique pour les fonctions Φ, Γ et Z.

On a, de plus:

$$\tau = \tau_i(1 + \tau_1) \qquad \text{et} \qquad \varkappa = \varkappa_i(1 + \varkappa_1) \ , \tag{37}$$

d'où:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \tau_i \frac{d\tau_1}{dt} \ ; \\ \frac{d^2\tau}{dt^2} &= \tau_i \frac{d^2\tau_1}{dt^2} \ ; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varkappa}{dt} &= \varkappa_i \frac{d\varkappa_1}{dt} \ ; \\ \frac{d^2\varkappa}{dt^2} &= \varkappa_i \frac{d^2\varkappa_1}{dt^2} \ ; \end{aligned}\right.$$

et, comme nous l'avons déjà relevé, on a toujours $\varkappa_0 = \varkappa_{i,\,0} = 1$ à la surface, c'est-à-dire $\varkappa_{1,\,0} = 0$. La quantité $\varkappa_1$ varie avec le temps pour une couche donnée; à temps constant, elle dépend encore de ξ.

11. — *La fonction* $\varphi(\varkappa)$. — La fonction $\varphi(\varkappa)$ oscille autour de la valeur $\varphi(\varkappa_i)$. La première formule (35) donne:

$$\varphi(\varkappa) = \varphi(\varkappa_i + \varkappa_i\varkappa_1) = \int_{\varkappa_i + \varkappa_i\varkappa_1}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{GM_r}{4\pi\varkappa^4} \cdot d\varkappa \ ,$$

où l'on a:

$$\varkappa_i\varkappa_1 = \varkappa - \varkappa_i \ .$$

Si l'on développe $\varphi(\varkappa)$ suivant les puissances croissantes de $\varkappa_1$, on obtient:

$$\varphi(\varkappa) = \varphi(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i\varkappa_1}{1} \cdot \varphi'(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i^2\varkappa_1^2}{1.2} \cdot \varphi''(\varkappa_i) + \dots \ . \tag{38}$$

Or, on peut calculer les valeurs respectives des dérivées successives $\varphi'(\varkappa_i)$, $\varphi''(\varkappa_i)$, ... , en utilisant les tables d'Emden pour la solution polytropique de stabilité. On a tout d'abord:

$$\varkappa = \frac{r}{r_0} \; ; \qquad \varkappa_i = \frac{r_i}{r_{0,i}} = \frac{\xi}{\xi_0} \; ;$$

$$r_i = \frac{\xi}{\omega u_c} \; ; \qquad r_{0,i} = \frac{\xi_0}{\omega u_c} \; ; \qquad dr_i = \frac{d\xi}{\omega u_c} \; ;$$

et la valeur de $d\varkappa_i$ (temps arrêté, solution de stabilité) est:

$$d\varkappa_i = \frac{dr_i}{r_{0,i}} = \frac{d\xi}{r_{i,0}\,\omega u_c} = \frac{d\xi}{\xi_0} = d\varkappa \; . \tag{39}$$

D'autre part, on sait que:

$$\varphi(\varkappa_i) = r_{0,i}^4 \, P_{c\,i} \, \psi^4 \; ;$$

d'où l'on déduit:

$$\varphi'(\varkappa_i) = \frac{d}{d\varkappa}\left[r_0^4 P_c \psi^4\right]_i = \xi_0 \cdot \frac{d}{d\xi}\left[r_{0,i}^4 P_{c,i} \psi^4\right] \; ;$$

$$\varphi'(\varkappa_i) = \xi_0 r_{0,i}^4 P_{c,i} \cdot \frac{d}{d\xi}[\psi^4] \; ; \tag{40}$$

or, on a encore:

$$r_{0,i}^4 = \frac{\xi_0^4}{\omega^4 u_c^4} \; ;$$

et l'on a déjà rappelé aux nos 3 et 5 que la théorie des sphères gazeuses en équilibre polytropique donne [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{c,i} = \dfrac{\pi G}{\omega^2} \cdot u_c^4 \; ; \qquad \omega^3 = \dfrac{4\pi \mathfrak{M}_0}{M} \; ; \qquad u_c = \dfrac{\xi_0}{r_{0,i}} \left(\dfrac{4\pi \mathfrak{M}_0}{M}\right)^{-\frac{1}{3}} \; ; \\ \xi_0 = 6{,}9 \; ; \qquad \mathfrak{M}_0 = 2{,}018 \; ; \end{array} \right.$$

de sorte que le coefficient de la dérivée de ψ^4 dans (40) vaut:

$$\xi_0 r_{0,i}^4 P_{c,i} = \frac{\xi_0^5 \pi G}{\omega^6} = \frac{\xi_0^5 G M^2}{16\pi \mathfrak{M}_0^2} = \xi_0 r_0^4 P_c \; ;$$

[1] G. Tiercy. L'équilibre radiatif dans les étoiles, *loc. cit.*

et l'on a pour la première dérivée $\varphi'(\varkappa_i)$:

$$\varphi'(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^5 \mathrm{GM}^2}{4\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \psi^3 \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\ ; \tag{41}$$

la table d'Emden en fournira la valeur numérique pour toute valeur de ξ; le résultat est négatif, car $\dfrac{d\psi}{d\xi} < 0$.

On a ensuite:

$$\varphi''(\varkappa_i) = \frac{d}{d\varkappa}[\varphi'(\varkappa)]_i = \xi_0 \frac{d}{d\xi}[\varphi'(\varkappa)]_i\ ;$$

$$\varphi''(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^6 \mathrm{GM}^2}{4\pi \mathfrak{M}_0^2}\left[\psi^3 \cdot \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 3\psi^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]\ ;$$

et l'équation (9) permet de se débarrasser de la seconde dérivée de ψ:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\frac{2}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} - \psi^3\ ;$$

d'où l'expression:

$$\varphi''(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^6 \mathrm{GM}^2}{4\pi \mathfrak{M}_0^2}\left[3\psi^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 - \frac{2\psi^3}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} - \psi^6\right], \tag{42}$$

calculable au moyen de la table d'Emden pour $n = 3$. Il est facile de trouver pour les dérivées suivantes de $\varphi(\varkappa_i)$, des expressions ne contenant que ξ, ψ et $\dfrac{d\psi}{d\xi}$; il suffit de faire appel, après chaque nouvelle dérivation, à l'équation (9); mais il est inutile de faire ce calcul, comme on le verra bien par la suite.

12. — *La fonction* $\Phi(\varkappa)$.

$$\Phi(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{4\pi\varkappa}\ .$$

Semblablement à ce qu'on a vu au n° 5, on peut écrire:

$$\Phi(\varkappa_i) = r_{0,i} \int_{r_i}^{r_{0,i}} \rho\, r\, dr = \frac{\xi_0}{\omega^3} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi\, d\xi \ ;$$

puis:

$$\Phi(\varkappa_i) = \frac{\xi_0}{\omega^3} \left[\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278 \right] ,$$

grâce à l'équation (9); ou encore:

$$\Phi(\varkappa_i) = \frac{\xi_0 \mathrm{M}}{4\pi \mathfrak{M}_0} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278 \right) . \tag{43}$$

La première dérivée est:

$$\Phi'(\varkappa_i) = \frac{d}{d\varkappa} \left[\Phi(\varkappa) \right]_i = \xi_0 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi_0}{\omega^3} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278 \right) \right] ;$$

$$\Phi'(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^2 \mathrm{M}}{4\pi \mathfrak{M}_0} \left[\xi \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2 \frac{d\psi}{d\xi} \right] ;$$

or, à cause de (9):

$$\xi \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = - 2 \frac{d\psi}{d\xi} - \xi \cdot \psi^3 \ ;$$

de sorte qu'il vient:

$$\Phi'(\varkappa_i) = - \frac{\xi_0^2 \mathrm{M}}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \xi \cdot \psi^3 \ ; \tag{44}$$

on trouve d'ailleurs directement cette valeur en partant de la définition de $\Phi(\varkappa)$; on en tire:

$$\Phi'(\varkappa) = - \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa} = - \frac{\varkappa\rho}{\tau^3} = - r_0^3 \rho \varkappa = - r_0^2 \rho r$$

$$= - \frac{\xi_0^2}{\omega^3} \psi^3 \cdot \xi = - \frac{\xi_0^2 \mathrm{M}}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \xi \cdot \psi^3 .$$

Maintenant, il vient:

$$\Phi''(\varkappa_i) = \frac{d}{d\varkappa}\left[\Phi'(\varkappa)\right]_i = \xi_0 \frac{d}{d\xi}[\Phi']$$

$$\Phi''(\varkappa_i) = -\frac{\xi_0^3 \mathrm{M}}{4\pi \mathfrak{M}_0}\left[\psi^3 + 3\xi \cdot \psi^2 \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\right]. \qquad (45)$$

Il est inutile de chercher les dérivées suivantes. Ainsi, les expressions (43), (44) et (45) permettent de calculer numériquement Φ, Φ' et Φ'' par les tables d'Emden. On a finalement:

$$\Phi(\varkappa) = \Phi(\varkappa_i + \varkappa_i \varkappa_1) = \Phi(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i \varkappa_1}{1}\Phi'(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i^2 \varkappa_1^2}{1 \cdot 2}\Phi''(\varkappa_i) + \dots \qquad (46)$$

13. — *La fonction* $\Gamma(\varkappa)$.

$$\Gamma(\varkappa) = \int_\varkappa^1 \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{2\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) \cdot d\varkappa \ ;$$

ici interviennent les vitesses de transformation $\frac{d\varkappa}{dt}$, du moins leurs valeurs à l'instant t, puisque l'intégrale Γ est prise à temps arrêté.

On a:

$$\varkappa = \varkappa_i(1 + \varkappa_1), \qquad \frac{d\varkappa}{dt} = \varkappa_i \frac{d\varkappa_1}{dt} \ ;$$

d'autre part, on sait que:

$$\frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{2\pi\varkappa} = \frac{2\varkappa \cdot \rho}{\tau^3}, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{2\pi\varkappa^2} = \frac{2\rho}{\tau^3} \ ;$$

de sorte qu'il vient:

$$\Gamma(\varkappa) = 2\int_\varkappa^1 \frac{\rho}{\tau^3} \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\varkappa = 2\int_\varkappa^1 \rho\, r_0^3 \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) \cdot d\varkappa \ ;$$

$$\Gamma(\varkappa_i) = 2 r_{0,i}^2 \int_{r_i}^{r_{0,i}} \rho \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) dr \ ;$$

et comme $\rho = u_c^3 \psi^3$, $ru_c = \frac{\xi}{\omega}$ et $\varkappa_i = \frac{\xi}{\xi_0}$:

$$\Gamma(\varkappa_i) = \frac{2\xi_0^2}{\omega^3} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\xi = \frac{2\xi_0^2 \cdot M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\xi ;$$

$$\Gamma(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^2 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right) d\xi = \frac{\xi_0 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) d\xi ; \tag{47}$$

le calcul ne pourra être terminé que lorsqu'on connaîtra la fonction $\varkappa_1(\xi)$.

Ensuite, on trouve:

$$\Gamma'(\varkappa_i) = \left(\frac{d\Gamma}{d\varkappa}\right)_i = \xi_0 \frac{d\Gamma}{d\xi} = - \frac{\xi_0^3 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \psi^3 \left(\frac{d\varkappa}{dt}\right)$$

$$\Gamma'(\varkappa_i) = - \frac{\xi_0^2 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) ; \tag{48}$$

puis:

$$\Gamma''(\varkappa_i) = \left(\frac{d\Gamma'}{d\varkappa}\right)_i = \xi_0 \frac{d\Gamma'}{d\xi} = - \frac{\xi_0^3 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \frac{d}{d\xi}\left[\psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right)\right] ;$$

$$\Gamma''(\varkappa_i) = - \frac{\xi_0^3 M}{2\pi \mathfrak{M}_0} \left[\psi^3 \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) + 3\xi \cdot \psi^2 \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)\left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) + \psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt \cdot d\xi}\right)\right] . \tag{49}$$

Connaissant la fonction $\varkappa_1(\xi)$, on aura le développement de $\Gamma(\varkappa)$:

$$\Gamma(\varkappa) = \Gamma(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i \varkappa_1}{1} \Gamma'(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i^2 \varkappa_1^2}{1 \cdot 2} \Gamma''(\varkappa_i) + \dots , \tag{50}$$

dont les formules (47) à (49) permettent de calculer les coefficients grâce aux tables d'Emden.

14. — *La fonction* $Z(\varkappa)$.

$$Z(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{1} \frac{\partial M_r}{\partial \varkappa} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa^2} \cdot \left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\varkappa \,.$$

On a:

$$Z(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{1} \frac{\rho}{\tau^2}\left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\varkappa = \int_{\varkappa}^{1} r_0^3 \cdot \rho \left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\varkappa \;;$$

$$Z(\varkappa_i) = \frac{\xi_0^2 M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^2 \cdot \left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2}\right) d\xi \;;$$

ou encore, puisque $\dfrac{d^2\varkappa}{dt^2} = \varkappa_i \dfrac{d^2\varkappa_1}{dt^2} = \dfrac{\xi}{\xi_0} \cdot \dfrac{d^2\varkappa_1}{dt^2}$:

$$Z(\varkappa_i) = \frac{\xi_0 M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right) \cdot d\xi \,, \tag{51}$$

expression dont on terminera le calcul dès qu'on connaîtra la fonction $\varkappa_1(\xi)$.

On trouve ensuite:

$$Z'(\varkappa_i) = \left(\frac{dZ}{d\varkappa}\right)_i = \xi_0 \frac{dZ}{d\xi} = -\frac{\xi_0^2 M}{4\pi \mathfrak{M}_0}\left[\psi^3 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right)\right], \tag{52}$$

et:

$$Z''(\varkappa_i) = \left(\frac{dZ'}{d\varkappa}\right)_i = \xi_0 \frac{dZ'}{d\xi} = -\frac{\xi_0^3 M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \frac{d}{d\xi}\left[\psi^3 \cdot \xi \cdot \frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right] ;$$

$$Z''(\varkappa_i) = -\frac{\xi_0^3 M}{4\pi \mathfrak{M}_0}\left[\psi^3 \cdot \left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right) + 3\xi \cdot \psi^2 \frac{d\psi}{d\xi}\left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right) + \psi^3 \cdot \xi \cdot \frac{d^3\varkappa_1}{dt^2 \cdot d\xi}\right]. \tag{53}$$

On aura donc:

$$Z(\varkappa) = Z(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i \varkappa_1}{1} Z'(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i^2 \varkappa_1^2}{1 \cdot 2} Z''(\varkappa_i) + \dots \,, \tag{54}$$

formule dont le détail numérique sera dès lors fourni par les tables d'Emden pour $n = 3$.

Tels sont les développements à porter dans la formule (36) fixant la distribution de P à un certain instant. On a d'ailleurs, comme on sait:

$$P_i = \tau_i^4 \varphi(\varkappa_i) = P_{c,\,i}\,\psi^4 = \frac{\pi G u_c^4}{\omega^2} \cdot \psi^4 = \pi G \left(\frac{\xi_0}{r_{0,i}}\right)^4 \left(\frac{M}{4\pi \mathfrak{M}_0}\right)^2 \cdot \psi^4 . \tag{55}$$

15. — *Relation entre* $\varkappa_1$, τ_1 *et* r_1. — on a posé:

$$\begin{cases} r = r_i(1 + r_1) \;; & \\ r_0 = r_{0,\,i}(1 + r_{1,0}) \;; & \tau = \dfrac{1}{r_0} \;; \\ \tau = \tau_i(1 + \tau_1) \;; & \tau_i = \dfrac{1}{r_{0,i}} \;; \\ \varkappa = \varkappa_i(1 + \varkappa_1) \;; & \varkappa = \dfrac{r}{r_0} \;; \end{cases}$$

remarquons tout d'abord que la lettre τ ne fait jamais allusion qu'à la surface de l'étoile; et comme $\tau_i\, r_{0,\,i} = 1$, il vient:

$$1 + \tau_1 = \frac{1}{1 + r_{1,0}} = 1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \dots \;;$$

$$\tau_1 = - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \dots \;; \tag{56}$$

d'où les dérivées:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau_1}{dt} = \dfrac{dr_{1,0}}{dt}(-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + 4r_{1,0}^3 - \dots) \;; \\ \dfrac{d^2\tau_1}{dt^2} = \dfrac{d^2 r_{1,0}}{dt^2}(-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + 4r_{1,0}^3 - \dots) \\ \qquad + \left(\dfrac{dr_{1,0}}{dt}\right)^2 \cdot (2 - 6r_{1,0} + 12r_{1,0}^2 - 20r_{1,0}^3 + \dots) . \end{cases}$$

Il faut constater ici que la variation de r_0 est connue par l'observation de la courbe des vitesses radiales; on connaît donc la variation de $r_{1,0}$ avec le temps; dans le cas le plus simple (celui d'une variation symétrique), on a:

$$r_{1,0} = A_0 \cos Nt ,$$

où A_0 et N sont des constantes connues.

Mettons maintenant en jeu un rayon quelconque, c'est-à-dire le rapport $\varkappa$, qui, répétons-le, est fonction de t et de ξ. On a:

$$\varkappa = \frac{r}{r_0} ; \qquad r\tau = \varkappa ; \qquad r_i \tau_i = \varkappa_i ;$$

$$r_i(1 + r_1) \cdot \tau_i(1 + \tau_1) = \varkappa_i(1 + \varkappa_1) ;$$

$$(1 + r_1)(1 + \tau_1) = 1 + \varkappa_1 ; \tag{57}$$

dans ce cas, et à la différence de ce qui se présentait pour une pulsation uniforme, la petite quantité r_1 n'est pas la même pour tous les rayons; elle diffère notamment de $r_{1,0}$ et dépend de ξ. On a dit déjà que $\varkappa_{1,0} = 0$.

Le facteur $(1 + \tau_1)$ de (57) est connu par (56), puisque $r_{1,0}$ est donné par l'observation; de sorte qu'il suffira dès lors de connaître la fonction $r_1(t)$ pour en déduire $\varkappa_1(t)$, ou vice-versa.

Par exemple, toujours dans le cas le plus simple, on posera:

$$r_1 = A_i \cos (Nt + N_i) ,$$

où A_i et N_i sont des fonctions de la variable statique r_i ou ξ. Le maximum du rayon r se produira donc lorsqu'on aura $Nt + N_i = 0$, et le minimum pour $Nt + N_i = \pi$; les dates de ces extrema, par rapport à celles des extrema de r_0, dépendent de la fonction $N_i(\xi)$. On a aussi:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= - NA_i \sin (Nt + N_i) ; \\ \frac{d^2 r_1}{dt^2} &= - N^2 A_i \cos (Nt + N_i) = - N^2 r_1 ; \end{aligned} \right.$$

on introduit ainsi dans le calcul deux fonctions de ξ, indéterminées pour l'instant, les fonctions A_i et N_i; on sait pourtant que:

$$A_{i,0} = A_0 \qquad \text{et} \qquad N_{i,0} = 0 ,$$

puisque, à la limite considérée, on a:

$$r_{1,0} = A_0 \cos Nt \ .$$

Nous aurons d'autre part besoin des valeurs de $\frac{d\varkappa_1}{dt}$ et $\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}$; l'égalité (57) donne:

$$\frac{d\varkappa_1}{dt} = (1+\tau_1)\frac{dr_1}{dt} + (1+r_1)\frac{d\tau_1}{dt} \ ;$$

ce qui devient, à cause de l'égalité (56) et de sa dérivée par rapport à t:

$$\frac{d\varkappa_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt}(1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + r_{1,0}^4 - \ldots)$$
$$+ \frac{dr_{1,0}}{dt}(-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + 4r_{1,0}^3 - \ldots)(1 + r_1) \ ; \qquad (58)$$

puis:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varkappa_1}{dt^2} = {} & \frac{d^2 r_1}{dt^2}\left(1 - r_{1.0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3\right) + \\ & + 2\frac{dr_1}{dt}\cdot\frac{dr_{1.0}}{dt}\left(-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + 4r_{1,0}^3\right) + \\ & + \frac{d^2 r_{1,0}}{dt^2}\left(-1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^2 + 4r_{1,0}^3\right)(1 + r_1) + \\ & + \left(\frac{dr_{1,0}}{dt}\right)^2\cdot\left(2 - 6r_{1,0} + 12r_{1,0}^2 - 20r_{1,0}^3\right)(1 + r_1) \ . \end{aligned}\right. \qquad (59)$$

16. — *Cas le plus simple.* — C'est celui d'une variation $r_{1,0}$ harmonique; les fonctions à considérer sont du type indiqué plus avant:

$$\left\{\begin{aligned} r_{1,0} &= A_0 \cos Nt \ ; \\ r_1 &= A_i \cos(Nt + N_i) \ . \end{aligned}\right. \qquad (60)$$

On a:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dr_{1,0}}{dt} &= -A_0 N \cdot \sin Nt \ ; & \frac{dr_1}{dt} &= -A_i N \sin(Nt + N_i) \ ; \\ \frac{d^2 r_{1,0}}{dt^2} &= -A_0 N^2 \cos Nt = -N^2 r_{1,0} & \frac{d^2 r_1}{dt} &= -N^2 r_1 \ ; \end{aligned}\right.$$

comme la constante d'amplitude de surface A_0 est au plus de l'ordre de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{12}$, nous ne conserverons, dans les développements, que les termes contenant A_0 ou A_i au premier degré; les termes en A_0^2, ou A_i^2 ou A_0A_i seront négligés. On écrira donc:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 - r_{1,0} + r_{1,0}^2 - r_{1,0}^3 + \ldots & = 1 - A_0 \cos Nt \ ; \\ -1 + 2r_{1,0} - 3r_{1,0}^3 + \ldots & = -1 + 2A_0 \cos Nt \ ; \\ 2 - 6r_{1,0} + 12r_{1,0}^2 - \ldots & = 2 - 6A_0 \cos Nt \ ; \end{array}\right.$$

portant ces expressions dans (58) et (59), et ne gardant, des produits, que les termes de l'ordre indiqué, on obtient:

$$\frac{d\varkappa_1}{dt} = -A_i N \sin(Nt + N_i) + A_0 N \sin Nt \ ; \qquad (61)$$

$$\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2} = -A_i N^2 \cos(Nt + N_i) + A_0 N^2 \cos Nt \ ; \qquad (62)$$

ce qui correspond bien à:

$$\varkappa_1 = A_i \cos(Nt + N_i) - A_0 \cos Nt \ , \qquad (63)$$

comme il fallait s'y attendre à cause de (57); cette dernière égalité donne en effet:

$$\varkappa_1 = r_1 + \tau_1 + r_1\tau_1 \ ,$$

dont on laisse tomber le dernier terme; et comme $\tau_1 = -r_{1,0}$, on trouve (63). A la frontière, avec $A_{i,0} = A_0$ et $N_{i,0} = 0$, on obtient bien $\varkappa_{1,0} = 0$.

17. — *Approximation suffisante pour les fonctions* φ, Φ, Γ *et* Z. — Reprenant les développements exposés dans les numéros

11 à 14, on y abandonnera les termes contenant $\varkappa_1^2$ en facteur; ils sont au plus de l'ordre de grandeur de A_0^2. Il reste:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\varkappa) &= \varphi(\varkappa_i) + \frac{\varkappa_i \varkappa_1}{1} \cdot \varphi'(\varkappa_i) \ ; \\ \varphi(\varkappa_i) &= r_{0,i}^4 \, P_{c,i} \, \psi^4 = \frac{\xi_0^4 \, GM^2}{16 \pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \psi^4 \ ; \\ \varphi'(\varkappa_i) &= \frac{\xi_0^5 \, GM^2}{4 \pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \psi^3 \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) \ ; \end{aligned}\right. \tag{64}$$

où $\varkappa_i = \frac{\xi}{\xi_0}$; puis:

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(\varkappa) &= \Phi(\varkappa_i) + \varkappa_i \varkappa_1 \cdot \Phi'(\varkappa_i) \ ; \\ \Phi(\varkappa_i) &= \frac{\xi_0 M}{4 \pi \mathfrak{M}_0} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278\right) \ ; \\ \Phi'(\varkappa_i) &= - \frac{\xi_0^2 M}{4 \pi \mathfrak{M}_0} \cdot \xi \cdot \psi^3 \ ; \end{aligned}\right. \tag{65}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma(\varkappa) &= \Gamma(\varkappa_i) + \varkappa_i \varkappa_1 \, \Gamma'(\varkappa_i) \ ; \\ \Gamma(\varkappa_i) &= \frac{\xi_0 M}{2 \pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \cdot \psi^3 \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) d\xi \ ; \\ \Gamma'(\varkappa_i) &= - \frac{\xi_0^2 M}{2 \pi \mathfrak{M}_0} \cdot \xi \cdot \psi^3 \cdot \left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right) \ ; \end{aligned}\right. \tag{66}$$

$$\left\{\begin{aligned} Z(\varkappa) &= Z(\varkappa_i) + \varkappa_i \varkappa_1 \, Z'(\varkappa_i) \ ; \\ Z(\varkappa_i) &= \frac{\xi_0 M}{4 \pi \mathfrak{M}_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \cdot \psi^3 \cdot \left(\frac{d^2 \varkappa_1}{dt^2}\right) d\xi \ ; \\ Z'(\varkappa_i) &= - \frac{\xi_0^2 M}{4 \pi \mathfrak{M}_0} \cdot \xi \cdot \psi^3 \cdot \left(\frac{d^2 \varkappa_1}{dt^2}\right) . \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Telles sont les approximations qu'on portera dans l'expression (36) de P, que nous reproduisons ici en (68):

$$\mathrm{P} = \tau^4 \cdot \varphi(\varkappa) + \left[\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau}\cdot\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\right]\cdot\Phi(\varkappa) + \frac{d\tau}{dt}\cdot\Gamma(\varkappa) - \tau\cdot \mathrm{Z}(\varkappa)\,. \tag{68}$$

Rappelons que, pour calculer la variation de cette expression P, il faut tenir compte du fait que, non seulement τ varie avec le temps, mais qu'il en est de même des fonctions φ, Φ, Γ et Z.

18. — *Calcul détaillé de* P. — On a:

$$\tau_i = \frac{1}{r_{0,i}} = \frac{\omega\cdot u_c}{\xi_0}\ ;$$

$$r_{1.0} = \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{N}t\ ; \qquad 1 + \tau_1 = 1 - r_{1,0} = 1 - \mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t\ ;$$

$$\tau = \tau_i(1 - \mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t) = \frac{\omega\cdot u_c}{\xi_0}(1 - \mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t)\ ;$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau_i \mathrm{A}_0\mathrm{N}\cdot\sin\mathrm{N}t = \frac{\omega\, u_c \mathrm{A}_0\mathrm{N}}{\xi_0}\cdot\sin\mathrm{N}t\ ;$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{\omega\, u_c\mathrm{A}_0\mathrm{N}^2}{\xi_0}\cos\mathrm{N}t\ ;$$

$$\frac{2}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{2\,\omega\, u_c \mathrm{A}_0^2\mathrm{N}^2}{\xi_0}\cdot\frac{\sin^2\mathrm{N}t}{1-\mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t} =$$

$$= \frac{2\,\omega\, u_c\mathrm{A}_0^2\mathrm{N}^2}{\xi_0}\sin^2\mathrm{N}t\cdot(1 + \mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t + \ldots)\ ;$$

$$\tau^4 = \tau_i^4(1+\tau_1)^4 = \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4}(1 + 4\tau_1 + 6\tau_1^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4}(1 - 4\mathrm{A}_0\cos\mathrm{N}t)\ .$$

En portant toutes ces expressions dans celle de P, on se trouve en présence de nouveaux termes négligeables de l'ordre de A_0^2; c'est le cas, par exemple, de la quantité $\frac{2}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$.

Il faut rappeler ici les égalités (61), (62) et (63), dont nous reproduisons ci-après la dernière:

$$\varkappa_1 = A_i \cos(Nt + N_i) - A_0 \cos Nt\,.$$

Il vient:

$$\begin{aligned}
P = {} & \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4}(1 - 4A_0 \cos Nt)\left[\frac{\xi_0^4 GM^2}{16\pi\mathfrak{M}_0^2}\psi^4 + \frac{\xi\xi_0^4 GM^2}{4\pi\mathfrak{M}_0^2}\psi^3 \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\cdot \varkappa_1\right] + \\
& + \frac{\omega u_c A_0 N^2}{\xi_0}\cos Nt\left[\frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\left(\xi\frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278\right) - \frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\cdot\xi^2\psi^3\cdot\varkappa_1\right] + \\
& + \frac{\omega u_c A_0 N}{\xi_0}\sin Nt\left[\frac{\xi_0 M}{2\pi\mathfrak{M}_0}\int_\xi^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\cdot\left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right)d\xi - \frac{\xi_0 M}{2\pi\mathfrak{M}_0}\cdot\xi^2\cdot\psi^3\cdot\left(\frac{d\varkappa_1}{dt}\right)\cdot\varkappa_1\right] - \qquad (69)\\
& - \frac{\omega u_c}{\xi_0}(1 - A_0\cos Nt)\left[\frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\int_\xi^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\cdot\left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right)d\xi - \frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\cdot\xi^2\psi^3\cdot\left(\frac{d^2\varkappa_1}{dt^2}\right)\varkappa_1\right].
\end{aligned}$$

Le dernier terme de chacun des trois derniers crochets de (69) ne donnant que des apports de l'ordre de A_0^2 ou de A_i^2, il reste:

$$\begin{aligned}
P = {} & \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4}(1 - 4A_0\cos Nt)\cdot\frac{\xi_0^4 GM^2}{16\pi\mathfrak{M}_0^2}\cdot\psi^4 + \\
& + \frac{\omega^4 u_c^4}{\xi_0^4}(1 - 4A_0\cos Nt)\cdot\frac{\xi_0^4 GM^2}{4\pi\mathfrak{M}_0^2}\xi\cdot\psi^3\cdot\frac{d\psi}{d\xi}\cdot\left[A_i\cos(Nt + N_i) - A_0\cos Nt\right] + \\
& + \frac{\omega u_c A_0 N^2}{\xi_0}\cos Nt\cdot\frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\left(\xi\frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278\right) + \qquad (70)\\
& + \frac{\omega u_c A_0 N}{\xi_0}\sin Nt\cdot\frac{\xi_0 M}{2\pi\mathfrak{M}_0}\int_\xi^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\left[-A_i N\sin(Nt + N_i) + A_0 N\sin Nt\right]d\xi \\
& - \frac{\omega u_c}{\xi_0}(1 - A_0\cos Nt)\frac{\xi_0 M}{4\pi\mathfrak{M}_0}\int_\xi^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\left[-A_i N^2\cos(Nt + N_i) + A_0 N^2\cos Nt\right]d\xi.
\end{aligned}$$

On voit ici que la détermination des fonctions A_i et N_i de ξ constitue un problème d'équation intégrale.

Nous simplifierons le calcul en admettant une approximation qui me paraît amplement suffisante pour notre problème: nous donnerons à A_i et N_i, dans les intégrales, leurs valeurs moyennes respectives dans le domaine d'intégration, soit $\frac{A_0 + A_i}{2}$ et $\frac{N_i}{2}$, et nous sortirons ces facteurs moyens des signes intégraux. Toute la participation de la première intégrale de (70) est de l'ordre de grandeur de A_0^2 ou de $A_0 A_i$; elle tombe donc complètement; en ce qui concerne la dernière intégrale, le facteur $(1 - A_0 \cos Nt)$ doit être réduit à l'unité, le second terme fournissant une participation négligeable. Il en est de même du facteur $(1 - 4A_0 \cos Nt)$ du second terme de l'expression totale de P. Il vient donc:

$$\left\{\begin{aligned} P = {} & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \psi^4 \cdot (1 - 4A_0 \cos Nt) + \\ & + \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{4\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \xi \cdot \psi^3 \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\left[A_i \cos (Nt + N_i) - A_0 \cos Nt\right] + \\ & + \frac{\omega u_c A_0 N^2 M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \cos Nt \cdot \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278\right) - \\ & - \frac{\omega u_c M N^2}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \left[A_0 \cdot \cos Nt - \frac{A_0 + A_i}{2} \cdot \cos\left(Nt + \frac{N_i}{2}\right)\right] \cdot \int_{\xi}^{\xi_0} \xi \cdot \psi^3 \cdot d\xi . \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Tous les coefficients fonctions de ξ et ψ seront calculés au moyen des tables d'Emden, y compris l'intégrale du dernier terme, pour laquelle on pourra préparer une table auxiliaire.

On peut grouper ce développement comme suit:

$$
\left\{
\begin{aligned}
P = {} & \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \psi^4 + \\
& + \cos Nt \cdot \left[-\frac{\omega^4 u_c^4 GM^2 A_0}{4\pi \mathfrak{M}_0^2} \psi^4 - \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2 A_0}{4\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \xi \cdot \psi^3 \frac{d\psi}{d\xi} + \right. \\
& \left. + \frac{\omega u_c A_0 N^2 M}{4\pi \mathfrak{M}_0} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278 \right) - \frac{\omega u_c MN^2 A_0}{4\pi \mathfrak{M}_0} \int_\xi^{\xi_0} \xi \cdot \psi^3 d\xi \right] + \\
& + \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{4\pi \mathfrak{M}_0^2} \cdot \xi \cdot \psi^3 \cdot \frac{d\psi}{d\xi} \cdot A_i \cos (Nt + N_i) + \\
& \qquad + \frac{\omega u_c MN^2}{4\pi \mathfrak{M}_0} \cdot \left[\frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left(Nt + \frac{N_i}{2} \right) \right] \cdot \int_\xi^{\xi_0} \xi \cdot \psi^3 \cdot d\xi \ ;
\end{aligned}
\right. \tag{72}
$$

le premier terme de (72) est indépendant du temps t; il n'est autre chose que $P_{c,i}\psi^4$; les deux lignes suivantes ne dépendent de t que par $\cos Nt$; les derniers termes contiennent les fonctions A_i et N_i de ξ.

Ainsi, en posant:

$$
\left\{
\begin{aligned}
a &= P_{c,i} = \frac{\omega^4 u_c^4 GM^2}{16\pi \mathfrak{M}_0^2}, \\
b &= \frac{\omega u_c N^2 M}{4\pi \mathfrak{M}_0}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{4 N^2 \mathfrak{M}_0}{\omega^3 u_c^3 GM},
\end{aligned}
\right.
$$

la pression P s'exprime par la forme:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{P} = a\psi^4 + \\
& + \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{N}t \left[-4a\left(\psi^4 + \xi\cdot\psi^3\cdot\frac{d\psi}{d\xi}\right) + \right. \\
& \qquad \left. + b\left(\xi\frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0{,}278\right) - b\int_{\xi}^{\xi_0} \xi\cdot\psi^3\cdot d\xi \right] + \\
& + \mathrm{A}_i \cos(\mathrm{N}t + \mathrm{N}_i)\cdot\left[4a\,\xi\,\psi^3\frac{d\psi}{d\xi}\right] + \\
& \qquad + \frac{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_i}{2}\cos\left(\mathrm{N}t + \frac{\mathrm{N}_i}{2}\right)\cdot b\int_{\xi}^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\,d\xi \ .
\end{aligned}
\right.
\tag{73}
$$

19. — *Calcul de* P_1. — On a:

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{P}_{c,i}\,\psi^4 = a\psi^4 \ ;$$

$$\mathrm{P}_1 = \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}_i}{\mathrm{P}_i} \ .$$

Il vient donc:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{P}_1 = \mathrm{A}_0 \cos \mathrm{N}t \left[-4\left(1 + \frac{\xi\cdot\psi'_\xi}{\psi}\right) + \right. \\
& \qquad \left. + \frac{b}{a}\cdot\frac{\xi\psi'_\xi + \psi + 0{,}278}{\psi^4} - \frac{b}{a}\cdot\frac{\int_{\xi}^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\,d\xi}{\psi^4} \right] + \\
& + \mathrm{A}_i \cos(\mathrm{N}t + \mathrm{N}_i)\cdot\left[\frac{4\xi\cdot\psi'_\xi}{\psi}\right] + \\
& \qquad + \frac{b}{a}\cdot\frac{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_i}{2}\cos\left(\mathrm{N}t + \frac{\mathrm{N}_i}{2}\right)\cdot\frac{\int_{\xi}^{\xi_0}\xi\cdot\psi^3\,d\xi}{\psi^4} \ ;
\end{aligned}
\right.
\tag{74}
$$

et il ne faut pas oublier que, dans cette expression, les quantités A_i et N_i sont des fonctions de ξ.

Si l'on donne à ξ une valeur quelconque inférieure à ξ_0 ou au plus égale à ξ_0, les coefficients de (74), fonctions de ξ et ψ, prennent des valeurs finies; on sait, en effet, qu'à la limite de la photosphère, ψ n'est pas nulle; par exemple, dans le cas de Y Sagittarii, on a $P_e = P_{c,i}\psi^4 = 8$ baryes environ pour la couche renversante. On a donc une expression P_1 de la forme:

$$P_1 = C_\xi \cdot A_0 \cos Nt + D_\xi A_i \cos(Nt + N_i) + \\ + E_\xi \cdot \frac{A_0 + A_i}{2} \cos\left(Nt + \frac{N_i}{2}\right),$$

où C_ξ, D_ξ et E_ξ sont des fonctions de ξ.

Nous utiliserons ci-après le cas de Y Sagittarii, pour lequel les résultats numériques suivants ont été établis précédemment[1]:

$$\left\{\begin{array}{lll} a & = P_{c,i} = (3,8)\,.\,10^{13} & \text{C.G.S.}; \\ N & = (1,25961)\,.\,10^{-5}; & \\ M & = (1,71)\,.\,10^{34}; & \\ r_{0,i} & = (1,576)\,.\,10^{12}; & \\ u_c & = 0,3892; & \end{array}\right.$$

en outre, on a:

$$\left\{\begin{array}{rl} \xi_0 & = 6,888\ ; \\ \mathfrak{M}_0 & = 2,018\ ; \\ \omega^3 & = \dfrac{4\pi\mathfrak{M}_0}{M}\ ; \\ G & = (6,66)\cdot 10^{-8}\ ; \end{array}\right.$$

on en déduit:

$$\frac{b}{a} = \frac{N^2}{\pi u_c^3 G} = 0,01287\ .$$

20. — *Valeur de* P_1 *pour* $\xi' = 5$. — Cette valeur de ξ est intéressante, puisqu'elle marque la limite du domaine d'appli-

[1] G. Tiercy. L'équilibre radiatif dans les étoiles, loc. cit.

cation de la solution polytropique dans une étoile invariable. D'après les tables d'Emden, on a pour $\xi = 5$:

$$\left\{\begin{array}{lll} \psi = 0{,}11110\ ; & \psi^3 = 0{,}0013713\ ; & \psi^4 = 0{,}00015235\ ; \\ \psi'_\xi = -0{,}08003\ ; & \xi \cdot \psi'_\xi = -0{,}40015\ ; & \dfrac{\xi \cdot \psi'_\xi}{\psi} = -3{,}602\ ; \end{array}\right.$$

on trouve alors:

Coefficient de $A_0 \cos Nt$:

$$+ 10{,}408 - 0{,}933 - 0{,}546 = + 8{,}929\,;$$

Coefficient de $A_i \cos (Nt + N_i)$:

$$\frac{4\xi \cdot \psi'_\xi}{\psi} = - 14{,}408\ ;$$

Coefficient de $\dfrac{A_0 + A_i}{2} \cos \left(Nt + \dfrac{N_i}{2}\right)$:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\int \xi \cdot \psi^3\, d\xi}{\psi^4} \longrightarrow 0{,}546\ .$$

On a donc, en résumé, pour ce point où $\xi' = 5$:

$$P_1 = 8{,}929\, A_0 \cos Nt - 14{,}408\, A_i \cos (Nt + N_i) + \\ + 0{,}546\, \frac{A_0 + A_i}{2} \cos \left(Nt + \frac{N_i}{2}\right)\ . \quad (75)$$

Remarquons que les grandeurs caractéristiques de l'étoile n'interviennent pas dans les coefficients principaux (10,408 et — 14,408); elles n'interviennent dans les autres que par le facteur $\dfrac{b}{a} = \dfrac{N^2}{\pi u_c^3 G}$, qui est petit. On peut donc considérer l'égalité (75) comme valable à très peu près pour *toute Céphéide* lorsqu'on y fait $\xi = 5$.

On sait que A_0 est de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{10}$ à $\dfrac{1}{12}$ au plus.

Par exemple, voici les valeurs de A_0 trouvées pour quelques étoiles:

S Sagittae	$\frac{1}{14}$	W Sagittarii	$\frac{1}{10}$
η Aquilae	$\frac{1}{10}$	X Sagittarii	$\frac{1}{13}$
SU Cygni	$\frac{1}{10}$	Y Sagittarii	$\frac{1}{10}$
U Aquilae	$\frac{1}{12}$		

Nous prendrons $A_0 = \frac{1}{12}$ comme valeur moyenne à mettre dans la formule (75).

Quant à A_i, c'est une fonction de ξ inconnue, de même que N_i; ces deux fonctions doivent être telles que, pour $\xi = 5$, la valeur absolue maxima de P_1 soit de l'ordre de $\frac{1}{2}$. On peut, en effet, admettre que l'amplitude de la pulsation ne subit plus de modification considérable entre $\xi = 5$ et ξ_0. D'autre part, le *décalage* cherché ne doit pas être très différent pour $\xi = 5$ de ce qu'il est pour la couche renversante. On sait, en outre, que, pour cette dernière, la valeur absolue de P_1 ne dépasse jamais $\frac{1}{2}$.

Cherchons les phases des extrema de P_1; pour cela, nous négligerons le dernier terme de (75); le coefficient de ce terme ne vaut que $\frac{1}{20}$ environ de chacun des coefficients des deux premiers termes; ceux-ci donnent donc l'allure de la fonction P_1. On a:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 &= a_1 \cos Nt - b_1 \cos (Nt + N_i) \,, \\ a_1 &= 8{,}929\, A_0 \,, \\ b_1 &= 14{,}408\, A_i \,. \end{aligned}\right. \tag{75'}$$

On peut écrire:

$$P_1 = (a_1 - b_1 \cos N_i) \cdot \cos Nt + b_1 \sin N_i \cdot \sin Nt \,, \tag{76}$$

expression qui peut se mettre sous la forme:

$$P_1 = \alpha \cos (Nt - \beta) \,. \tag{77}$$

Que pouvons-nous dire de α et β dans (77) ?

Lorsque $r_{1,0} = A_0 \cos Nt$ atteint son maximum A_0 (pour $t = 0$), il faut que P_1 approche de son minimum; c'est du moins ce que montre l'étude de la couche renversante, et nous avons admis qu'il n'y avait pas grande différence entre les phases relatives à celle-ci et les phases de la couche $\xi = 5$. Il s'ensuit que le coefficient α est négatif. Quant à la quantité β de (77), elle est positive, car le minimum de P_1 est atteint pour:

$$Nt - \beta = 0 \ , \qquad t = \frac{\beta}{N} \ ;$$

Or, cette valeur de t doit être positive.

De (76) et (77), on tire:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha \cos \beta &= a_1 - b_1 \cos N_i \ , \\ \alpha \sin \beta &= b_1 \sin N_i \ ; \end{aligned} \right. \tag{78}$$

puisque $\alpha < 0$, il faut bien que N_i soit négatif; et comme $\alpha \cos \beta < 0$, on a aussi:

$$a_1 - b_1 \cos N_i < 0 \ , \qquad \cos N_i > \frac{a_1}{b_1} \ ;$$

cela fournit le renseignement $\cos N_i > \frac{1}{2}$, car le quotient $\frac{a_1}{b_1}$ vaut environ $\frac{1}{2}$; ou bien

$$|N_i| < \frac{\pi}{3} \ ;$$

nous verrons en effet, plus loin, que $|N_i| = \frac{\pi}{7}$ à $\frac{\pi}{8}$.

On peut, d'ailleurs, apercevoir tout de suite la grandeur approchée de β; on sait, en effet, que le *retard* du minimum de P sur le maximum de pulsation vaut à peu près $\frac{\theta}{6} = \frac{2\pi}{6N} = \frac{\pi}{3N}$; on doit donc avoir pour la phase de ce minimum:

$$t_m = \frac{\beta}{N} = \frac{\pi}{3N} \ , \qquad \text{ou} \qquad \beta = \frac{\pi}{3} \ \textit{environ} \ ;$$

nous vérifierons plus loin l'exactitude de cette valeur. Précisons qu'en réalité, le *retard* en question est plus faible en ce qui concerne la phase du maximum de P_1 qu'en ce qui regarde le minimum de P_1; du moins en général; mais comme, pour simplifier, nous avons pris le cas où r_1 est simplement harmonique, le décalage est alors partout le même.

Des égalités (78), on tire maintenant:

$$\alpha^2 = a_1^2 - 2a_1 b_1 \cos N_i + b_1^2 \;;$$

or $|\alpha|$ est de l'ordre de $\frac{1}{2}$ au *maximum*, comme on sait, pour la couche renversante; admettons cette valeur $|\alpha| = \frac{1}{2}$; on a:

$$a_1^2 - 2a_1 b_1 \cos N_i + b_1^2 = \frac{1}{4}\,, \tag{79}$$

équation contenant les inconnues N_i et A_i. Ensuite:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b_1 \sin N_i}{a_1 - b_1 \cos N_i} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \quad \text{(environ)} \;;$$

$$b_1 \sin N_i = \sqrt{3}\,(a_1 - b_1 \cos N_i)\,, \tag{80}$$

seconde équation en A_i et N_i.

Avec $A_0 = \frac{1}{12}$, et en écrivant $a_1 = 9A_0$ et $b_1 = 15A_i$ pour simplifier le calcul, les équations (79) et (80) deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{81}{144} - \frac{45}{2}A_i \cos N_i + 225\,A_i^2 = \frac{1}{4}\,,\\ &15\,A_i \sin N_i = \sqrt{3}\left(\frac{3}{4} - 15\,A_i \cos N_i\right). \end{aligned}\right. \tag{81}$$

En éliminant les termes constants, on trouve, avec ces approximations et en tenant compte de ce que $\sqrt{3}$ vaut presque $\frac{7}{4}$:

$$75\,A_i \sin N_i + 4725\,A_i^2 = \frac{1365}{4} A_i \cos N_i \;;$$

et comme $A_i \neq 0$:

$$15 \sin N_i + 945\, A_i = \frac{273}{4} \cos N_i \ ;$$

$$\left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{273}{3780} \cos N_i - \frac{60}{3780} \sin N_i \ , \\ A_i &= \frac{91}{1260} \cos N_i - \frac{1}{63} \sin N_i \ , \\ A_i &= 0{,}07222 \cos N_i - 0{,}01587 \sin N_i \ . \end{aligned}\right. \tag{82}$$

En portant cette valeur de A_i dans la seconde équation (81), on obtient:

$$\frac{2}{3} \sin N_i \cos N_i - \frac{5}{21} \sin^2 N_i = \frac{21}{16} - \frac{91}{48} \cos^2 N_i \ ;$$

ce qui s'exprime comme suit en fonction de $(2\,N_i)$:

$$224 \sin 2\,N_i + 717 \cos 2\,N_i - 325 = 0 \ . \tag{83}$$

La résolution de (83) donne:

$$564265 \sin^2 (2\,N_i) - 145600 \sin (2\,N_i) - 408464 = 0 \ ,$$

équation présentant deux racines réelles et de signes contraires; or, c'est la solution négative qu'il faut retenir, puisque $N_i < 0$; d'où:

$$\sin 2\,N_i = \frac{72800 - 485573{,}6}{564265} = -\,0{,}731524 \ ;$$

$$N_i = -\,23^\circ\, 30'\, 25'' \qquad \text{ou} \qquad -\,0{,}4103 \text{ radian} \ ;$$

$$N_i = -\,0{,}1306\,\pi \ ,$$

soit environ:

$$N_i = -\,\frac{13\,\pi}{100} \qquad \text{ou} \qquad -\,\frac{\pi}{8} \ .$$

Ayant la valeur approchée de N_i, l'expression (82) donne A_i:

$$A_i = 0{,}0724 \ , \qquad \text{soit à peu près} \qquad A_i = \frac{1}{14} \ .$$

On obtient ainsi pour P_1:

$$P_1 = \frac{8,929}{12} \cos Nt - \frac{14,408}{14} \cos\left(Nt - \frac{13\pi}{100}\right),$$

$$P_1 = 0,744 \cos Nt - 1,029 \cos\left(Nt - \frac{13\pi}{100}\right). \qquad (84)$$

Vérification du minimum de P_1: Annulons la dérivée de P_1 par rapport au temps t; il vient:

$$0,744 \sin Nt = 1,029 \sin\left(Nt - \frac{13\pi}{100}\right),$$

équation dont la solution est:

$$\operatorname{tg} Nt = 2,055 ,$$

$$(Nt)_{\text{extr.}} = 64^\circ \quad \text{ou} \quad \frac{32}{90}\pi ;$$

c'est un peu plus de $\frac{\pi}{3}$; c'est la valeur de β, que nous avons dès le début posée comme étant à $\frac{\pi}{3}$ à peu près. Quant à la valeur correspondante de P_1, elle est:

$$(P_1)_{\text{min.}} = 0,33 - 0,68 = -0,35 ,$$

$$\text{soit} \quad (P_1)_{\text{min.}} = -\frac{1}{3} \quad \text{environ} .$$

Nous avons fait le calcul en posant $|\alpha| = \frac{1}{2}$ au début, c'est-à-dire en donnant à $|\alpha|$ sa valeur maxima observée dans la couche renversante.

En refaisant tout le calcul précédent en admettant au départ $\alpha| = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire en donnant au second membre de la première équation (81) la valeur $\frac{1}{9}$, on trouve (toujours pour $\xi = 5$):

$$\left\{\begin{array}{l}
A_i = (0{,}06111) \cos N_i - (0{,}02222) \sin N_i = \frac{1}{15}\,; \\
N_i = -0{,}15\,\pi, \text{ soit à peu prés } -\frac{\pi}{7}\,; \\
P_1 = 0{,}744 \cos Nt - (0{,}960) \cos\left(Nt - \frac{15\,\pi}{100}\right); \\
\text{Phase du min. de } P_1 : (Nt)_{\text{extr.}} = 75^\circ \quad \text{ou} \quad \frac{5}{12}\pi = \beta\,, \\
\qquad\qquad \text{(un peu plus de } \frac{\pi}{3}\text{, comme précédemment)}\,; \\
(P_1)_{\text{min.}} = 0{,}19 - 0{,}64 = -0{,}45\,, \\
\text{valeur plus proche de } -\frac{1}{2} \text{ que de } -\frac{1}{3}.
\end{array}\right.$$

En prenant comme valeur de départ $|\alpha|$ une valeur comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, par exemple $\frac{5}{12}$, on retrouve à la fin $(P'_1)_{\min} = -\frac{5}{12}$. Ce serait là la valeur de l'amplitude pour $\xi = 5$.

Rappelons ici les valeurs trouvées pour le $(P_1)_{\text{extr.}}$ de la couche renversante de quelques Céphéides:

S Sagittae	$\frac{5}{13}$	W Sagittarii	$\frac{4}{9}$
η Aquilae	$\frac{1}{2}$	X Sagittarii	$\frac{4}{9}$
SU Cygni	$\frac{1}{3}$	Y Sagittarii	$\frac{5}{8}$;

On voit qu'elles sont toutes comprises dans le domaine allant de $\frac{1}{3}$ à $\frac{5}{8}$.

Les résultats de notre analyse pour la couche $\xi = 5$ paraissent donc parfaitement admissibles.

On remarquera que $A_i = \frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{14}$ est un peu plus petit que $A_0 = \frac{1}{12}$; ce qui est en complet accord avec les résultats de la méthode de M. Eddington pour le calcul des amplitudes.

Il ne paraît pas possible d'appliquer la solution précédente, basée sur les formules de la solution polytropique de stabilité, à des couches dont le ξ est compris entre $\xi = 5$ et ξ_0. On sait, en effet, que la solution polytropique est valable excellemment jusqu'à $\xi = 5$; mais que, de $\xi = 5$ à ξ_0, il faut considérer une distribution modifiée, en raison du voisinage immédiat de la frontière, d'où l'énergie rayonne vers l'extérieur [1].

Il faut d'ailleurs remarquer que, pour la couche renversante *moyenne* observée, on ne peut pas poser $N_{i,0} = 0$; cette valeur n'est applicable qu'à la limite, où l'on a $r_{1,0} = A_0 \cos Nt$.

21. — *Couche périphérique.* — On sait que la distribution de la température n'y est pas la distribution pure et simple de la solution polytropique [2]; à partir de $\xi' = 5$ ou $r' = \frac{3}{4} r_0$ environ, la distribution convenable donne des températures supérieures à celles de la distribution polytropique, et cela jusqu'à $\xi = 6{,}886$; puis, brusquement, il y a chute de température T, et la température de frontière ($\xi_0 = 6{,}888$ donnant la limite pratique de la photosphère) coïncide avec la température T_0 de la solution polytropique pour $\xi_0 = 6{,}888$.

Autrement dit, le gradient de température, après s'être maintenu à peu près constant de $\xi = 5$ à $\xi = 6{,}886$ (500° à 550° par 0,001 d'unité de ξ), passe brusquement à une valeur de 2500° par 0,001 d'unité de ξ entre 6,886 et 6,888; comme 2500° est une moyenne, cela indique que le gradient prend une valeur beaucoup plus grande encore dans la dernière pellicule infiniment mince.

Cela revient à constater que, à travers cette dernière pellicule, la fonction $B(\tau)$ [3] de la théorie de l'équilibre radiatif [4] ne saurait

[1] G. Tiercy, Sur la distribution des températures à l'intérieur des étoiles, *C. R. Soc. de Phys.*, II, 1934 *(Supplément aux Archives)*; le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 26.

[2] G. Tiercy, *C. R.* 1934, II, *loc. cit.*

[3] La lettre τ avait alors une autre signification que dans le présent calcul où $\tau = \dfrac{1}{r_0}$.

[4] G. Tiercy. L'équilibre radiatif dans les étoiles, loc. cit.

avoir une forme linéaire en τ, puisque $B'(\tau)$ augmente énormément pour $\tau = 0$; la fonction $B(\tau)$ semble présenter une singularité pour $\tau = 0$.

Il va sans dire que cette distribution périphérique et cette chute brusque de température vers la frontière du corps ne vont pas sans entraîner un comportement spécial de la pression dans cette région périphérique.

Les températures distribuées entre $\xi' = 5$ et ξ_0 sont données par la formule [2]:

$$T = f \cdot T_c \psi$$

ce sont les températures $(T_c \psi)$ de la distribution polytropique, multipliées par un facteur $f(\xi)$; ce facteur part de la valeur 1 pour $\xi = 5$, passe progressivement à 1,9 environ pour $\xi = 6{,}886$, pour retomber brusquement à l'unité, pour $\xi_0 = 6{,}888$ à la frontière de la photosphère. Cela revient à dire que, en ce qui concerne la distribution des températures dans la couche périphérique, il faut utiliser des valeurs $(f \,.\, \psi)$ au lieu des ψ polytropiques.

Faisons de même pour le calcul des pressions. En transportant ces valeurs $(f \,.\, \psi)$ à la place de ψ dans les formules relatives à la variation de P_1, on remarque tout d'abord que cela revient à doubler presque les valeurs anciennes de ψ vers la couche $\xi = 6{,}886$; il en résulte une diminution considérable de la valeur absolue de $\left|\frac{d\psi}{d\xi}\right|$; de sorte que le coefficient $\left[\frac{4\xi \cdot \psi'_\xi}{\psi}\right]$ de la relation (74) conserve une valeur de l'ordre de grandeur de 14 à 15 unités. Et l'on a, presque comme pour $\xi = 5$:

$$P_1 = 9A_0 \cos Nt - 14A_i \cos(Nt + N_i) + \\ + \frac{0{,}5}{f} \cdot \frac{A_0 + A_i}{2} \cos\left(Nt + \frac{N_i}{2}\right). \quad (85)$$

Avec $A_0 = \frac{1}{12}$ et $A_i = \frac{1}{14}$, on a:

$$P_1 = 0{,}75 \cos Nt - \cos(Nt + N_i) + \frac{13}{336 f} \cdot \cos\left(Nt + \frac{N_i}{2}\right); \quad (86)$$

à la limite de la photosphère, $f = 1$.

[2] G. Tiercy, *C. R.*, 1934, II, *loc. cit.*

Si l'on peut admettre que $A_{i,0}$ soit égal à A_0, que dire de la fonction N_i ?

On ne peut pas poser que N_i tend vers zéro lorsque ξ tend vers ξ_0; car alors on obtiendrait pour la couche périphérique extrême:

$$P_{1,0} = -0{,}2 \cos Nt \ ,$$

fonction dont les extrema se produisent en même temps que ceux de $r_{1,0}$; or, nous savons que cela ne concorde pas avec l'observation.

Mais il faut tenir compte du fait que la sphère stellaire proprement dite se prolonge par une atmosphère, dont la partie basse est justement la couche renversante observée; on peut d'ailleurs comprendre dans celle-ci la pellicule extrême de la photosphère, de $\xi = 6{,}886$ à ξ_0, où se produit la chute brusque de température, comme on a vu.

On est alors amené à poser, pour une couche moyenne à cheval sur la limite photosphérique ξ_0 et comprenant la partie inférieure de la couche renversante:

$$(N_i)_0 = N_0 \ , \qquad \text{par exemple} \qquad N_0 = -\frac{\pi}{8} \ ,$$

N_0 résultant du calcul de la pression moyenne P_e dans la couche renversante [1].

Quant à $r_{1,0}$, cette fonction concerne essentiellement la couche renversante, et on peut la rapporter à la limite de celle-ci; on trouve en effet la courbe de pulsation par l'étude des vitesses radiales; et l'on sait que les raies spectrales sont dues à l'action de la couche renversante, adjacente à la dernière pellicule photosphérique. N_i passe de N_0 à zéro lorsqu'on approche de la limite de la couche renversante. On a donc pour ξ_0:

$$P_{1,e} = 0{,}75 \cos Nt - \cos (Nt + N_0) + \frac{1}{50} \cos\left(Nt + \frac{N_0}{2}\right) \ ; \quad (87)$$

[1] Cette pression moyenne P_e est donnée par le jeu combiné de la courbe des vitesses radiales (couche renversante) et de la courbe de lumière (émission de la photosphère).

le coefficient du dernier terme est $\frac{13}{336\,(1,9)} = \frac{1}{49,1}$ ou $\frac{1}{50}$ environ. Ainsi N_0 étant négatif, comme les N_i des couches sous-jacentes, on a un *décalage* des phases des extrema de $P_{1,e}$ de la couche renversante par rapport aux phases des extrema de pulsation.

Il semble donc bien que l'analyse précédente approche la solution de plus près que ce n'était le cas jusqu'ici, puisque le problème du *décalage* en question était resté sans explication. La représentation analytique de la variation de P en fonction de t entraîne celle de la variation de T, et par conséquent celle de la variation d'ionisation dans la couche renversante et celle de la variation de magnitude, par rapport à la pulsation.

Ajoutons encore que si l'on fait $\varkappa =$ const. dans cette analyse, on retrouve le cas ancien de la « pulsation uniforme », avec :

$$\left\{\begin{aligned} P &= a\psi^4 + A_0 \cos Nt \cdot [-4a\psi^4] \ , \\ P &= P_i(1 - 4A_0 \cos Nt) \ , \\ P_{1,e} &= -4A_0 \cos Nt = -\frac{1}{3}\cos Nt \, . \end{aligned}\right.$$

22. — *Remarque.* — Nous n'avons traité que le cas le plus simple, celui où $r_{1,0} = A_0 \cos Nt$; on sait que le cas le plus fréquent est celui où $r_{1,0}$ est de la forme à deux termes suivante :

$$A_0 \cos Nt + A_0' \cos (2Nt + N') \ ;$$

mais le but que nous poursuivions était de montrer qu'avec une analyse plus complète de la formule de la pression, on pouvait rendre compte du décalage caractéristique des courbes P_e, T_e et de lumière par rapport à celle de pulsation. Ce but paraît atteint.

(Février 1935.)