Sur l'équation différentielle générale du second ordre caractérisant l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses

Georges Tiercy. — *Sur l'équation différentielle générale du second ordre caractérisant l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses.*

Il s'agit ici de l'équation donnant la densité en fonction du rayon; elle est issue, comme on sait, de l'équation de l'équilibre mécanique:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho \ , \qquad \text{où} \qquad g = \frac{GM_r}{r^2} \ ,$$

et où P représente la pression totale $P = p + p'$; on a:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \rho r^2 \, dr \ . \tag{1}$$

D'ailleurs, si l'équilibre est de caractère polytropique, on a aussi:

$$P = C \cdot \rho^{\chi} \ , \tag{2}$$

où C est une constante.

On a encore les égalités connues:

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \frac{R}{\mu} \rho T \ , \\ p' &= \frac{1}{3} a T^4 \ ; \end{aligned} \right. \tag{3}$$

et l'on pose:

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \beta P \ , \\ p' &= (1 - \beta) P \ . \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Nous écrirons ensuite:

$$T = \Theta \cdot \rho^{\chi - 1} \ , \tag{5}$$

comme dans la théorie d'Emden (où l'on néglige p') ou dans celle de Bialobrzeski $\left(\text{où } \mathcal{K} = \frac{4}{3}\right)$; mais nous supposerons ici Θ variable avec r.

Il vient:

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T + \frac{a}{3}T^4 ;$$

$$P = \frac{R}{\mu}\Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}} + \frac{a}{3}\Theta^4 \cdot \rho^{4(\mathcal{K}-1)} ; \tag{6}$$

et en utlisant la substitution d'Emden $\rho = u^n$, $n = \dfrac{1}{\mathcal{K} - 1}$:

$$P = \frac{R}{\mu}\Theta \cdot u^{n+1} + \frac{a}{3}\Theta^4 \cdot u^4 . \tag{7}$$

L'équation (1) de l'équilibre mécanique devient:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{R}{\mu}\Theta \cdot (n+1) + \frac{4a}{3} \cdot \Theta^4 \cdot u^{3-n}\right]\frac{du}{dr} + \frac{d\Theta}{dr} \cdot \left[\frac{R}{\mu} \cdot u + \frac{4a}{3}\Theta^3 \cdot u^{4-n}\right] = \\ & = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r u^n r^2 \, dr . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

En dérivant à nouveau cette égalité (8) par rapport à r, et en tenant compte de (8) elle-même, on obtiendra l'équation différentielle de second ordre qui lie la fonction u à la variable r. On voit bien qu'en général cette équation sera compliquée.

Le calcul deviendrait beaucoup plus simple si l'on supposait d'emblée, comme l'avait fait M. Bialobrzeski, que $\Theta = \text{const.}$; une note antérieure [1] a montré que cette hypothèse donne un équilibre polytropique et entraîne l'obligation de faire $n = 3$; de sorte que, avec l'hypothèse d'entrée $\Theta = \text{const.}$, on n'a pas à poursuivre le calcul à partir de (8) avec n quelconque.

Abandonnons donc l'hypothèse initiale de Bialobrzeski, et considérons que Θ est fonction de r; il en sera de même de β. Ainsi, la température T ne sera plus proportionnelle à u, comme c'est le cas dans la théorie de M. Bialobrzeski.

[1] Note précédente.

En dérivant l'égalité (8) par rapport à r, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{R}{\mu}\Theta\cdot(n+1)+\frac{4a}{3}\Theta^4\cdot u^{3-n}\right]\frac{d^2u}{dr^2}+\\
&\left[\frac{R}{\mu}(n+1)+\frac{R}{\mu}+\frac{4a}{3}(8-n)\Theta^3\cdot u^{3-n}\right]\frac{du}{dr}\cdot\frac{d\Theta}{dr}+\\
&\frac{4a}{3}(3-n)\cdot\Theta^4\cdot u^{2-n}\left(\frac{du}{dr}\right)^2+4a\cdot\Theta^2\cdot u^{4-n}\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)^2+\\
&\left[\frac{R}{\mu}\cdot u+\frac{4a}{3}\Theta^3\cdot u^{4-n}\right]\frac{d^2\Theta}{dr^2}=-4\pi G u^n+\frac{2(4\pi G)}{r^3}\int_0^r u^n r^2 dr\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

En prenant tous les termes dans le premier membre, on remplacera l'intégrale par l'expression suivante tirée de (8):

$$\begin{aligned}
-\frac{2(4\pi G)}{r^3}\int u^n r^2 dr &= \frac{2}{r}\left[\frac{R}{\mu}\Theta\cdot(n+1)+\frac{4a}{3}\Theta^4\cdot u^{3-n}\right]\frac{du}{dr}+\\
&+\frac{2}{r}\left[\frac{R}{\mu}u+\frac{4a}{3}\Theta^3\cdot u^{4-n}\right]\frac{d\Theta}{dr}\,. \qquad (10)
\end{aligned}$$

L'égalité (9) est l'équation différentielle générale du problème. Elle se simplifie toujours jusqu'au type de l'équation d'Emden lorsqu'on considère un cas polytropique (2). Il suffit pour cela de choisir la variation de Θ de telle sorte qu'on ait:

$$\frac{R}{\mu}\Theta+\frac{a}{3}\Theta^4\cdot\rho^{3\mathcal{K}-4}=C \qquad \text{(const.)}\ ; \qquad (11)$$

alors l'expression (6) de P se réduit à $P=C\rho^{\mathcal{K}}$. La condition (11) montre que, lorsqu'on va de la périphérie au centre, Θ diminue puisque ρ augmente.

Dans ces conditions, on portera directement l'expression (2) dans (1); et l'on trouve tout de suite l'équation réduite:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{du}{dr}+\frac{4\pi G}{(n+1)C}\cdot u^n=0\,, \qquad (12)$$

quel que soit $\mathcal{K}$.

Cela revient à dire que, dans les cas polytropiques, l'équation différentielle n'est jamais d'un type compliqué tel que (9).

Remarquons encore que, lorsque la condition (11) est satisfaite et que P se réduit à (2), le facteur Θ est proportionnel à β. On a en effet:

$$P = \frac{p}{\beta} = \frac{R}{\beta\mu} \cdot \rho T \ ;$$

$$T = \frac{\beta\mu}{R} \cdot \frac{P}{\rho} = \frac{C\beta\mu}{R} \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} \ ; \qquad (13)$$

de sorte qu'on peut écrire:

$$\Theta = \frac{C\mu\beta}{R} \ ; \qquad (14)$$

cela montre bien encore que Θ sera constant si β l'est; et l'on a vu que le cas se présente pour la classe polytropique $n = 3$, c'est-à-dire pour $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$.

Séance du 16 mai 1935.

M. Gysin. — *Les minerais de cuivre de Kinsenda (Congo belge)*. Note n° 2. *Sur la présence de deux variétés de chalcosine.*

Nous avons indiqué précédemment [1] que le minerai primaire de Kinsenda était essentiellement constitué par des mouches de bornite criblées de fines lamelles de chalcopyrite et associées à des grains de chalcopyrite compacte. En outre, dans un grand nombre d'échantillons, la bornite est envahie périphériquement par une chalcosine bleue, formant un liseré plus ou moins large. Cette chalcosine n'est pas polychroïque; entre les nicols croisés, en lumière réfléchie, elle paraît sensiblement isotrope. On l'observe, non seulement à la périphérie des plages de bornite, mais encore autour des fissures de ce dernier minéral. Les contacts bornite-chalcosine sont flous. Les fines lamelles de chalcopyrite incluses dans la bornite sont elles-mêmes aussi transformées en chalcosine, mais ce remplacement est plus

[1] M. Gysin, *Les minerais de cuivre de Kinsenda (Congo belge)*. Note n° 1. *Les associations bornite-chalcopyrite.* C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, vol. 52, n° 1, janvier-mars 1935.