

Sur la démonstration donnée par Schläfli de la formule de Schwarz-Christoffel

Autor(en): **Weinstein, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **17 (1935)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-741658>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le roentgénogramme que nous avons obtenu a été comparé et trouvé identique avec le diagramme de la chitine animale. Il en résulte que la structure, c'est-à-dire l'arrangement des atomes dans les cristallites, ainsi que la texture, c'est-à-dire l'orientation de ces cristallites, sont les mêmes dans les deux substances.

Ainsi on trouve le fait intéressant que les deux matériaux de construction de la nature, la chitine animale et végétale, malgré une constitution assez compliquée, sont identiques. On se rappelle qu'une pareille identité a été trouvée pour la cellulose végétale et la cellulose animale (tunicine).

A. Weinstein. — *Sur la démonstration donnée par Schläfli de la formule de Schwarz-Christoffel.*

Pendant les Conférences internationales de Mathématiques organisées par l'Université de Genève il a été souvent question de la *méthode de continuité*. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que cette méthode si féconde a été introduite dans l'Analyse par le mathématicien suisse Schläfli. En effet, Schläfli a appliqué ce procédé dès 1874¹ au problème suivant.

La formule de Schwarz-Christoffel

$$z = M \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{-\beta_2} \dots \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right)^{-\beta_n} d\zeta, \quad \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = M \quad (1)$$

$$\left(\text{où } M > 0, \quad \zeta_k = e^{i\sigma_k}, \quad |\beta_k| < 1, \quad \sum_1^n \beta_k = 2 \right)$$

donne la représentation conforme du cercle $|\zeta| < 1$ sur un polygone aux angles extérieurs $\beta_k \pi$. Le point $\zeta = 0$ correspond au point $z = 0$ à l'intérieur du polygone.

Problème. — Déterminer les paramètres $M, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ de manière à obtenir dans le plan z un polygone à sommets $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ donnés.

¹ Journal für Mathematik, 78 (1874), p. 63.

La méthode classique de continuité déduit la solution de ce problème des propositions suivantes.

1. *Le déterminant de Schläfli*

$$\frac{D(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{D(M, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})}$$

est différent de zéro. Ce résultat a été démontré par Schläfli au moyen de calculs très ingénieux. Une nouvelle démonstration a été donnée il y a quelques années¹.

2. *Existence de limitations a priori.* — On peut affirmer que les grandeurs $M, |\sigma_{k+1} - \sigma_k|$ ($k = 1, \dots, n - 1$) restent entre certaines limites positives lorsqu'on se donne des limites pour les valeurs (x_k, y_k) . Cette question a fait l'objet de plusieurs travaux (voir l. c.²). Nous nous proposons de donner une nouvelle variante de la démonstration de ce théorème en ce qui concerne le paramètre M . Nous allons mettre en évidence que *les bornes de M sont positives, si la plus petite et la plus grande distance du point $z = 0$ au contour du polygone restent comprises entre deux valeurs positives.* Cette démonstration permettra d'expliquer un fait paradoxal en apparence.

Faisons varier les (x_k, y_k) en admettant que le point $z = 0$ reste toujours à distance finie et positive de chaque point du contour. Le seul cas qui exige une démonstration de l'existence des bornes pour M est le suivant: Soit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ ($2 \leq p \leq n$) un groupe de paramètres tel que la borne inférieure de $|\sigma_p - \sigma_1|$ soit 0. Considérons un point variable $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ restant toujours à distance angulaire finie (non inférieure, par exemple, à π/n) des points ζ_k , ($k = 1, \dots, n$). La distance du point z_0 , image de ζ_0 au point $z = 0$ sera donnée, d'après (1), par $|z_0| = M \left| \int_0^{\zeta_0} \right|$.

Or il est évident que $\left| \int_0^{\zeta_0} \right|$ et $|z_0|$ possèdent des bornes positives. Par conséquent M restera aussi compris entre deux limites positives, q.e.d.

¹ A. WEINSTEIN, *Mathematische Zeitschrift*, 21 (1924), p. 72.

Cette démonstration tomberait en défaut pour la formule de Schwarz donnant la représentation conforme d'un *demi-plan* sur un polygone. Prenons comme exemple les rectangles donnés par la formule

$$z = M \int_0^v \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho - \varepsilon)(\varrho - 2\varepsilon)(\varrho - 3\varepsilon)}} \quad (2)$$

($\text{Im} \varrho \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$) .

Posons $\varrho = \varepsilon \omega$, $M = \varepsilon$. On obtient alors la formule

$$z = \int_0^{\varepsilon \omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)(\omega - 3)}} \quad (2')$$

qui donne la représentation conforme du demi-plan sur un rectangle non dégénéré pour des valeurs arbitrairement petites de $\varepsilon = M$. Nous pouvons facilement expliquer cette contradiction apparente avec notre résultat précédent: D'après (2) le point $z = 0$ se trouve sur le contour du polygone, tandis que d'après la formule (1) il se trouve à l'intérieur du domaine. Il est donc plus avantageux de se servir de la formule (1) pour achever la démonstration de Schläfli.
