

Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante. II.

Autor(en): **Rossier, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **18 (1936)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-743071>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SENSIBILITÉ SPECTRALE

DES

RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

II

PAR

P. ROSSIER

I. INTRODUCTION.

1. — Dans un mémoire précédent, nous avons étudié diverses applications astronomiques d'une hypothèse sur la sensibilité de l'œil et de la plaque photographique ¹.

Cette hypothèse consiste à poser pour la sensibilité

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a \quad (1)$$

λ_s est la longueur d'onde du maximum de sensibilité et a mesure l'acuité de celui-ci.

Dans ce mémoire, le cas des cellules photo-électriques est à peine effleuré (I, 5); les résultats connus de recherches sur la sensibilité des photomètres électriques appliqués à l'astronomie

¹ P. ROSSIER, Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante, applications astronomiques et industrielles. *Archives* (5), 17 p. 34 (1935); *Publ. Obs. Genève*, fasc. 27-29, 1935.

Dans la suite, les renvois aux paragraphes de ce mémoire seront notés, (I, ...) et ceux de la présente étude (II, ...).



sont très fragmentaires. Récemment, M. Becker a publié une étude approfondie de la sensibilité de photomètre électrique de l'Observatoire de Berlin ¹.

Nous montrerons que cette sensibilité peut être représentée de façon assez satisfaisante par la formule 1, éventuellement complétée par un terme supplémentaire, pour tenir compte d'un maximum secondaire de sensibilité (II, 22-25).

La précision des mesures photo-électriques est plus grande que celle des méthodes visuelles ou photographiques. Une théorie dont les résidus sont de l'ordre de quelques centièmes ou du dixième de magnitude est satisfaisante dans ces deux derniers cas. Elle peut être insuffisante dans celui du récepteur électrique.

Dans notre première étude, nous nous sommes contentés de l'équation spectrale de Wien. Cette hypothèse a permis de constituer une théorie satisfaisante de plusieurs phénomènes: index de couleur ², longueur d'onde effective visuelle ou photographique, magnitude absolue ou apparente, réfraction atmosphérique. Mais, pour un appareil de précision, il est opportun de perfectionner la théorie, en tenant compte de la loi de Planck, plus exacte que celle de Wien; c'est là l'objet de la première partie du présent travail. Elle constitue un complément aux chapitres III et IV du mémoire précédent, consacré au « Calcul des magnitudes » et à l'« Index de couleur ».

Dans nos recherches antérieures, l'hypothèse constituée par la formule 1 était suffisante. Mais l'emploi de filtres colorés complique le phénomène: il faut tenir compte de la transparence du filtre et de la sensibilité du récepteur. Si les maxima de ces deux grandeurs ont lieu pour des longueurs d'onde voisines, seule la sélectivité du récepteur ou l'acuité a est accrue. Nous verrons ce cas se produire avec un certain filtre. Mais si ces deux longueurs d'onde diffèrent notablement, la sensibilité

¹ W. BECKER, *Lichtelektrische Farbenindizes von 738 Sternen, Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg*, X.6.1935.

² Voir G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, ch. XV, p. 366-371. Paris, 1935.

totale peut présenter deux maxima, plus ou moins accusés. Il faut alors poser

$$\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^2 c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_i}{\lambda}} \right)^{a_i}.$$

L'adjonction d'un filtre jaune au récepteur considéré plus bas conduit à ce cas.

Nous sommes donc dans l'obligation de compléter la théorie pour tenir compte de cette éventualité. Cette deuxième partie de l'étude actuelle constitue un second complément aux chapitres III et IV du premier mémoire.

Nous passerons enfin à l'étude détaillée du récepteur de Berlin. Notre précédent chapitre VI, « Valeurs numériques des constantes de sensibilité », subira ainsi une extension importante.

II. PASSAGE DE L'ÉQUATION SPECTRALE DE WIEN À CELLE DE PLANCK.

2. — Correction au calcul de la magnitude.

Nous avons vu (I, 11)¹ que, dans le cas de la validité de la loi de Planck, la magnitude est

$$m_p = 2,5 \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2,5 \log \sum_{i=1}^{\infty} v_i,$$

où

$$v_i = \left(1 + i \frac{b}{a \lambda_s T_e} \right)^{-a-4}.$$

L'approximation de Wien conduit à limiter la sommation à son premier terme. On a donc, avec des indices évidents,

$$m_p = m_w - \Delta m,$$

où

$$\Delta m = 2,5 \log \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} u_i \right) \quad \text{et} \quad u_i = \left(\frac{1 + \frac{b}{a \lambda_s T_e}}{1 + i \frac{b}{a \lambda_s T_e}} \right)^{a+4} = \frac{v_i}{v_1}.$$

¹ Dans la formule générale en m_r lire $(a+3)!$ au lieu de $(a-3)!$.

Les u_i sont positifs. La correction Δm est donc elle-même toujours positive. On peut s'attendre à une convergence relativement rapide, car l'exposant $a + 4$ est grand, au moins de l'ordre de 50 dans les cas qui nous occupent; la convergence exige seulement $a > -2$ (I, 10).

3. — Cas particulier de la sensibilité concentrée.

On sait (I, 7) qu'en posant $a = \infty$, $\sigma(\lambda) = 0$, sauf pour $\lambda = \lambda_s$, où $\sigma = 1$. On a ainsi une première approximation, toujours utile, mais souvent insuffisante (I, 28, 29, 35, 37)¹.

Faisons le calcul de la magnitude dans cette hypothèse. On a

$$v_i = \left(1 + i \frac{b}{a \lambda_s T_e}\right)^{-4} \left(1 + i \frac{b}{a \lambda_s T_e}\right)^{-a}.$$

Faisons croître a indéfiniment. Le premier facteur tend vers 1. A la limite, on a

$$v_i = e^{-i \frac{b}{\lambda_s T_e}}.$$

La série est la somme d'une progression géométrique décroissante. On a donc

$$V = \sum v_i = \frac{e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}{1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}.$$

et, prenant les logarithmes naturels, pour les termes dépendant de T_e ,

$$(m_p) = 1.08574 \frac{b}{\lambda_s T_e} + 2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}\right).$$

L'équation spectrale de Wien donne le premier terme seulement (I, 12). On a donc

$$\Delta m = -2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}\right),$$

¹ Voir aussi G. TIERCY, Le calcul de l'index de couleur. *Archives* (5), 10; *Publ. Obs. Genève*, fasc. 6, 1928.

P. ROSSIER, Le problème de l'index de couleur en astronomie physique. Ch. III, § 14-18. *Archives* (5), 12; *Publ. Obs. Genève*, fasc. 11, 1930.

expression qui nous sera souvent utile comme valeur de première approximation.

4. — *Variation de Δm avec la température.*

Introduisons les logarithmes naturels. Il vient

$$\Delta m = 1.08574 \text{ Log } (1 + U) ,$$

où

$$U = \sum_2^{\infty} u_i \quad \text{et} \quad u_i = \left(\frac{1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e}}{1 + i \frac{b}{a\lambda_s T_e}} \right)^{a+4} .$$

Pour $T_e = 0$, on a

$$\Delta m_0 = 1.08574 \text{ Log } \left(1 + \sum_2^{\infty} \frac{1}{i^{a+4}} \right) .$$

La série converge très rapidement. Pour de basses températures, on pourra se contenter du seul terme $i = 2$.

Cette valeur de Δm_0 est moindre que celle correspondant au cas du récepteur bolométrique, $a = 0$ (I, 7), où l'on a

$$\Delta m_0 = 1,08574 \text{ Log } \left(1 + \sum_2^{\infty} i^{-4} \right) = 0,08587 .$$

Pour des étoiles froides, la correction Δm n'est pas nulle, mais d'autant plus petite que l'acuité est plus élevée; elle tend vers 0 lorsque l'acuité croît indéfiniment.

Lorsque T_e croît, u_i tend vers 1, la correction croît indéfiniment.

Calculons la dérivée de Δm . On a

$$\frac{d(\Delta m)}{dT_e} = \frac{1,08574}{1 + U} \left(\frac{dU}{dT_e} \right) = \frac{1,08574}{1 + U} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{du_i}{dT_e} .$$

$$\frac{du_i}{dT_e} = u_i \frac{b(a+4)(i-1)}{a\lambda_s \left(T_e + \frac{b}{a\lambda_s} \right) \left(T_e + i \frac{b}{a\lambda_s} \right)} .$$

Ces expressions sont toujours positives. La correction Δm

croît donc avec la température. Pour $T_e = 0$, Δm et sa dérivée sont positifs.

Déterminons encore la deuxième dérivée de Δm . Il vient

$$\frac{d^2(\Delta m)}{dT_e^2} = \frac{1,08574}{1+U} \left[\frac{d^2 U}{dT_e^2} - \frac{1}{1+U} \left(\frac{dU}{dT_e} \right)^2 \right],$$

avec

$$\frac{d^2 u_i}{dT_e^2} = \frac{du_i}{dT_e} \cdot \frac{\frac{b}{a\lambda_s}(a+3)(i-1) - 2T_e}{\left(T_e + \frac{b}{a\lambda_s}\right) \left(T_e + i\frac{b}{a\lambda_s}\right)}.$$

Le signe de la dérivée de Δm est celui du crochet. Examinons ce qui se passe pour $T_e = 0$. Nous savons que la série converge alors si rapidement qu'on peut la réduire à son premier terme, $i = 2$. Il vient

$$\frac{d^2 U}{dT_e^2} - \frac{1}{1+U} \left(\frac{dU}{dT_e} \right)^2 = \frac{du^2}{dT_e} \cdot \frac{\lambda_s}{2b} [a+3-u_2].$$

Mais u_2 est inférieur à 1. Le crochet est positif. La courbe représentant la variation de Δm en fonction de la température tourne à l'origine sa concavité vers les Δm positifs.

Pour des températures très élevées, la dérivée de Δm se comporte comme T_e^{-2} . Elle tend vers 0 lorsque T_e croît indéfiniment. L'allure de la courbe représentant la correction Δm en fonction de la température a l'allure d'un signe f' . Elle présente une inflexion pour une certaine température T_i .

Le calcul de cette température ne présente pas de difficulté dans le cas de l'acuité infinie. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta m &= -1,08574 \operatorname{Log} \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} \right), \\ \frac{d(\Delta m)}{dT_e} &= +1,08574 \frac{b}{\lambda_s} \cdot \frac{1}{T_e^2} \cdot \frac{e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}{1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}, \\ \frac{d^2(\Delta m)}{dT_e^2} &= -1,08574 \frac{b}{\lambda_s} \frac{e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}{T_e^4 \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} \right)} \left(2T_e - \frac{b}{\lambda_s} \left[1 + \frac{e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}{1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}} \right] \right). \end{aligned}$$

Rappelons que $\frac{b}{\lambda_s} = 4 T_m$ où T_m est la température du minimum de l'index absolu relatif au récepteur considéré (I, 19). Elle est au moins de l'ordre de celle du soleil. Cherchons à annuler la deuxième dérivée. Il faut

$$T_i = 2 T_m \left[1 + \frac{e^{-\frac{4 T_m}{T_i}}}{1 - e^{-\frac{4 T_m}{T_i}}} \right]$$

Pour résoudre cette équation transcendante, négligeons tout d'abord la fraction du crochet. Il vient $T_i = 2 T_m$, valeur approchée par défaut. Introduisant ce rapport 2 dans le crochet, on trouve $T_i \cong 2,32 T_m$, d'où, en répétant le procédé un nombre suffisant de fois,

$$T_i = 2,510 T_m = 0,6275 \frac{b}{\lambda_s} = \frac{0,8988}{\lambda_s}. \quad (\lambda_s \text{ en cm})$$

C'est pour des températures de l'ordre de 2,5 fois celle du soleil que la correction varie le plus rapidement.

5. — *Variation de la correction en fonction de la longueur d'onde du maximum de sensibilité.*

La correction Δm est une fonction symétrique de la température T_e et de la longueur d'onde λ_s du maximum de sensibilité. Il est donc inutile de répéter ici les calculs précédents. Explicitons quelques conclusions.

La correction est une fonction croissante de λ_s . Sauf exception, l'œil est le récepteur utilisé en astrophysique pour lequel la longueur d'onde du maximum de sensibilité est la plus grande. La correction Δm_v , relative aux observations visuelles est donc la plus considérable.

La courbe représentant la variation de Δm en fonction de λ_s a l'allure d'un signe f .

L'inflexion appartient-elle au domaine intéressant ?

Examinons le cas de l'acuité infinie. L'inflexion se produit alors pour

$$\lambda_i = \frac{b}{2 T_e} \left[1 + \frac{e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}}{1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}}} \right]$$

Introduisons la température T_m . Il vient

$$T_e = 2T_m \left[1 + \frac{e^{-4\frac{T_m}{T_e}}}{1 - e^{-4\frac{T_m}{T_e}}} \right].$$

Nous venons de voir que cette équation conduit à

$$T_e = 2,51 T_m = 0,6275 \frac{b}{\lambda_s}.$$

Comme T_m est de l'ordre de la température du soleil, c'est pour des étoiles chaudes, dont la température est de l'ordre de 15000 à 20000°, que Δm varie le plus rapidement en fonction de λ_s . C'est pour ces températures élevées qu'une erreur sur la longueur d'onde du maximum de sensibilité aura le plus d'influence.

6. — *Ordre de grandeur des termes de la série U.*

Étudions tout d'abord le quotient de deux termes consécutifs et sa variation en fonction de la température.

On a

$$\sqrt[a+4]{\frac{u_{i+1}}{u_i}} = \frac{1 + i \frac{b}{a\lambda_s T_e}}{1 + (i+1) \frac{b}{a\lambda_s T_e}} = z.$$

Le numérateur de la dérivée de z prise par rapport à la température est $\frac{b}{a\lambda_s T_e^2}$. Il est positif.

Le nombre de termes à prendre dans la série U croît avec la température. Nous verrons qu'il est très réduit pour des étoiles froides.

La fonction Δm est symétrique en T_e et λ_s . Le nombre de termes nécessaires dans le développement croît donc avec la longueur d'onde du maximum de sensibilité. Il est moindre pour la plaque photographique que pour l'œil.

Comparons les deux valeurs Δm_1 et Δm_2 obtenues en limitant la sommation à un et deux termes. Il vient

$$\Delta m_2 - \Delta m_1 = 2,5 \log \left(1 + \frac{u_3}{1 + u_2} \right) < 2,5 \log (1 + u_3) .$$

La limitation de U à son premier terme sera possible si cette différence est inférieure à une certaine limite ε , donc si

$$\log (1 + u_3) < \frac{\varepsilon}{2,5} .$$

Nous traiterons plus tard le cas des acuités élevées. Examinons ici celui des récepteurs non munis de filtres sélectifs. a est alors de l'ordre de la centaine. On a ainsi, en posant

$$x = \frac{T_m}{T_e} = \frac{b}{4 \lambda_s T_e} , \quad \text{et} \quad a = 100 ,$$

$$\log \left(1 + \left[\frac{1 + 0,04 x}{1 + 0,12 x} \right]^{104} \right) = \frac{\varepsilon}{2,5} .$$

Avec $\varepsilon = 0,01$ magnitude, il vient $T_e < 1,8 T_m$. Cette limite est de l'ordre de 10000° au moins. Le premier terme est donc toujours suffisant jusqu'à cette température.

Répétant le calcul avec $\varepsilon = 0,1$ magnitude on trouve $T_e < 3,5 T_m$. Ce n'est que pour des températures très élevées que le premier terme sera insuffisant, si l'on se contente du dixième de magnitude.

Pour préciser, effectuons le calcul de Δm dans le cas suivant qui, dans les conditions de l'observation astronomique, correspond assez bien à l'œil:

$$\lambda_s = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad \text{et} \quad a = 50 .$$

Le tableau donne le résultat du calcul effectué avec un et deux termes.

T_e	Δm_1	Δm_2
5000	0,008	0,008
10000	0,077	0,083
15000	0,169	0,196
20000	0,250	0,308
30000	0,366	0,486

Les conclusions précédentes sont confirmées.

Prenons maintenant un cas défavorable: posons $a = 100$ et $\frac{T_m}{T_e} = 0,2$, ce qui correspond à des températures de 30000 à 40000°, au moins. Il vient

$$u_i = \left(\frac{1,008}{1 + i \cdot 0,008} \right)^{104}.$$

Calculant Δm avec un nombre croissant de termes, on trouve:

i	2	3	4	5	6
Δm	0,409	0,530	0,586	0,610	0,621

Trois termes assurent le dixième de magnitude, mais il en faut six pour obtenir le centième.

Dans les cas d'acuité élevée et d'étoiles très chaudes, il pourra être nécessaire de pousser le calcul encore plus loin. Mais alors on peut souvent obtenir une première approximation en considérant l'acuité comme infinie.

7. — Variation de la correction avec l'acuité.

Pour faciliter l'écriture, posons

$$x = \frac{b}{\lambda_s T_e}.$$

On a ainsi

$$u_i = \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 + i \frac{x}{a}}.$$

Pour $T_e = T_m = \frac{b}{4\lambda_s}$, $x = 4$.

On a donc en général

$$x = 4 \frac{T_m}{T_e}.$$

T_m est de l'ordre de la température du soleil. T_e varie pratiquement entre $\frac{T_m}{4}$ et $5T_m$. Nous savons d'autre part que la

correction Δm est négligeable pour des températures inférieures à celle du soleil. Le domaine de variation de x est donc pratiquement borné par les deux valeurs $x = 0,8$ et $x = 4$.

Rappelons que a est relativement grand et atteint des dizaines. $\frac{x}{a}$ est donc toujours très inférieur à l'unité.

Considérons un terme u_i , prenons le logarithme et dérivons. Il vient

$$\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{da} = \frac{(a+4)(i-1)x}{(a+x)(a+ix)} + \text{Log} \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 + i\frac{x}{a}}.$$

Ces deux termes sont de signes opposés. Le logarithme, qui est négatif, ne risque d'être prépondérant que pour des x relativement grands, donc pour des températures basses. Nous savons qu'alors seuls les termes pour lesquels i est petit jouent pratiquement un rôle. Le logarithme sera donc toujours petit et d'autant plus que a sera plus grand.

Pour fixer les idées, posons $T_e = T_m$, donc $x = 4$, et calculons une limite inférieure pour a , au delà de laquelle la dérivée $\frac{du_i}{da}$ est certainement positive. Cela revient à résoudre l'équation transcendante

$$\frac{4(i-1)}{a+4i} + \text{Log} \frac{1 + \frac{4}{a}}{1 + \frac{4i}{a}} = 0.$$

Dérivons le premier membre de l'équation. On trouve

$$x(i-1) \{ a^2 - 8a + 2ix^2 + [a-4]x[i+1] \} (a+x)^{-2} (a+ix)^{-2}.$$

Tous les facteurs sont positifs, sauf peut-être l'accolade. Celle-ci l'est certainement pour $a > 8$.

Pour une acuité supérieure à 8, le premier membre de l'équation croît avec a .

Pour résoudre approximativement l'équation, développons le logarithme en considérant les deux premiers termes. Il vient

$$a(1 + i^2 - 2i) = 4i(i-1),$$

d'où les valeurs

i	a	I	II
2	8	0,250	—0,288
3	24	0,222	—0,251
4	80	0,125	—0,133

Les colonnes I et II indiquent respectivement les valeurs des deux termes de l'équation complète. Les résidus sont négatifs, les valeurs de a approchées par défaut. Elles appartiennent au domaine où le premier membre croît avec a .

Pour les deux premiers termes u_i , dès que l'acuité atteint les dizaines, la dérivée $\frac{du_i}{da}$ est positive. La correction croît donc avec l'acuité, du moins pour des températures qui sont au moins de l'ordre de celle du soleil. Pour des températures inférieures, la correction est négligeable.

8. — Cas particulier de l'acuité nulle.

Elle correspond au récepteur bolométrique. Le terme de la magnitude qui dépend de la température est

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + i \frac{b}{a \lambda_s T_e} \right)^{-a-4} = a^{a+4} \Sigma \left(a + i \frac{b}{\lambda_s T_e} \right)^{-a-4}$$

Pour a décroissant indéfiniment, la nouvelle sommation tend vers

$$\left(\frac{\lambda_s T_e}{b} \right)^4 \Sigma i^{-4} = 1,0823 \left(\frac{\lambda_s T_e}{b} \right)^4$$

On a donc

$$m_p = \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2,5 \log 1,0823 + 10 \log \frac{b}{\lambda_s T_e}$$

La loi de Wién donne la même expression, la sommation étant remplacée par son premier terme. Autrement dit, le passage de la loi de Wien à celle de Planck conduit à modifier la constante d'étalonnage de la quantité $2,5 \log 1,0823 = 0,086$.

Il n'y a rien d'étonnant au fait que les deux équations spec-

trales conduisant à la même fonction en T_e , puisqu'elles donnent toutes deux, par intégration, la loi de Stéfán. Nous savons qu'à partir de $a = 0$, si l'acuité augmente, la correction diminue peut-être, pour augmenter ensuite. Pour de faibles acuités, la correction est donc moindre que le dixième de magnitude.

9. — *Limite supérieure de la correction.*

Nous savons que la correction prend sa plus grande valeur pour l'acuité infinie. Calculons-la, dans ce cas particulier, pour l'œil et la plaque photographique, en posant $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$ cm et $\lambda_p = 4,2 \times 10^{-5}$ cm. Rappelons que l'on a

$$m_p = m_w - \Delta m .$$

T_e	Δm_v	$\frac{d m_v}{dT_e}$ pour 1000°	Δm_p	$\frac{d \Delta m_p}{dT_e}$ pour 1000°	Diff.
5000	+ 0,006		+ 0,001		0,005
		+ 0,008		+ 0,003	
6000	014		004		010
		014		006	
8000	043		015		028
		021		011	
10000	084		037		047
		025		014	
12000	133		065		068
		026		017	
14000	185		099		086
		027		019	
16000	239		137		102
		027		020	
18000	293		177		116
		027		020	
20000	346		218		128
		026		021	
25000	475		321		154
		024		020	
30000	593		420		173
		022		019	
35000	702		514		188
		+ 0,020		0,018	
40000	0,803		+ 0,603		0,200

Nous savons que, pour de basses températures, Δm est une fonction croissante de celle-ci. Nous constatons de nouveau que pour des températures inférieures à celle du soleil, la correction n'atteint qu'à peine 0,01 magnitude. Vers 10000° elle est inférieure à 0,1 magnitude, mais elle peut dépasser la demi-magnitude pour des étoiles très chaudes.

10. — *Approximation constituée par le cas de l'acuité infinie.*

Dans ce cas, nous savons que

$$\Delta m_{\infty} = 2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} \right).$$

Avec certaines plaques photographiques munies de filtres on est conduit à admettre des acuités de l'ordre des milliers ¹.

Dans de telles conditions, on peut considérer la formule ci-dessus comme constituant une assez bonne approximation. Faisons quelques comparaisons avec les nombres déjà calculés.

Avec $a = 100$ et $T_e = 5T_m$ pour l'œil, au § 6, nous avons trouvé $\Delta m = 0,621$, tandis que la table pour $a = \infty$ donne 0,648. La différence porte sur les centièmes de magnitude.

Rapprochons encore les valeurs trouvées au § 6 et celles relatives à l'acuité infinie, pour l'œil.

T_e	Δm	Δm_{∞}	Diff.
5000	0,008	0,006	— 0,002
10000	083	084	+ 0,001
15000	196	212	016
20000	308	346	038
30000	0,486	0,593	+ 0,107

Les valeurs de Δm ont été obtenues en limitant à deux le nombre des termes de la sommation. Elles sont donc erronées par défaut. Il faut dépasser 20000° pour que la différence atteigne 0,05 magnitude et 30000° pour 0,1 magnitude. Avec

¹ P. ROSSIER, Sur la représentation analytique de la sensibilité spectrale des plaques orthochromatiques. *Compte rendu de la Soc. de Phys.* 52, 3; *Publ. Obs. Genève*, fasc. 31.

des valeurs plus élevées de l'acuité, la différence est encore moindre.

Dès que l'acuité atteint la centaine, ce n'est que pour des températures très élevées que l'expression où l'on admet son infinité est insuffisante.

11. — *Développement du logarithme dans le cas de l'acuité infinie.*

La correction peut être mise sous la forme

$$\Delta m = 1,08574 \operatorname{Log} (1 + U) = 1,08574 \left(U - \frac{U^2}{2} + \dots \right).$$

Ce développement n'est intéressant que pour des valeurs suffisamment petites de U . Dans le cas de l'acuité infinie on a

$$\begin{aligned} \Delta m &= -1,08574 \operatorname{Log} \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} \right) = \\ &= 1,08574 \left(e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2b}{\lambda_s T_e}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Imposons une limite d'erreur ε à Δm . On pourra se contenter du premier terme lorsque

$$e^{-\frac{2b}{\lambda_s T_e}} < \frac{2\varepsilon}{1,08574} = 1,84\varepsilon.$$

Numériquement, on trouve, avec

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0,01 \text{ magnitude}, & \quad T_e < 2 T_m \cong 13000^\circ \\ 0,1 & \quad , \quad T_e < 4,7 T_m \cong 30000^\circ. \end{aligned}$$

Le développement donne donc toujours satisfaction sauf pour des étoiles très chaudes. Ce n'est que pour des températures extrêmement élevées que l'erreur pourra dépasser le dixième de magnitude.

12. — *Cas de l'acuité finie.*

Le problème est plus complexe que le précédent, car U est alors lui-même la somme d'une série. Le remplacement du

logarithme par son développement n'a d'intérêt que si la série U peut elle-même être limitée à son premier terme. Cette série est à termes positifs. L'approximation faite en la limitant est toujours par défaut. Au contraire, le développement du logarithme est une série alternée, où le premier terme négligé, le deuxième, est négatif. L'approximation faite est par excès. Les erreurs tendent à se détruire.

Nous avons vu au § 6 les conditions auxquelles U peut être remplacé par son premier terme. Examinons maintenant quand il sera loisible de substituer son développement au logarithme.

On a alors

$$\Delta m = 1,08574 \text{ Log } (1 + u_2) .$$

La condition est

$$\frac{1,08574}{2} u_2 < \varepsilon ,$$

où, comme précédemment, ε est la limite admissible d'erreur sur la magnitude. Or

$$u_2 = \frac{1 + \frac{4}{a} \cdot x}{1 + \frac{8}{a} \cdot x} , \quad \text{avec } x = \frac{T_m}{T_e} .$$

Pour fixer les idées, faisons comme précédemment $a = 100$, ce qui est un maximum. Il vient

$$\frac{1 + 0,04x}{1 + 0,08x} < \sqrt[208]{1,84 \varepsilon} ,$$

ce qui donne, avec $\varepsilon = 0,01$ magnitude, $T_e < 2,1 T_m$

$$0,1 \quad T_e < 4,9 T_m .$$

Les conditions auxquelles U peut être remplacé par son premier terme sont plus rigoureuses. La correction peut donc être mise sous la forme simple

$$\Delta m = 1,08574 \left(\frac{1 + \frac{b}{a \lambda_s T_e}}{1 + 2 \frac{b}{a \lambda_s T_e}} \right)^{a+4}$$

lorsque: 1° l'acuité est inférieure à 100,

2° la température est inférieure à $1,8 T_m$, soit à 11000° au moins; si l'on se contente d'une précision de 0,1 magnitude, cette limite est repoussée à $3,5 T_m$ soit à plus de 20000° .

13. — Application à l'index absolu relatif à un récepteur.

L'index absolu est défini (I, 18) par l'équation

$$I = m - m_b .$$

où m_b est la magnitude bolométrique.

Comme m_b n'est affecté que d'une correction constante (II, 8) lorsqu'on passe de la loi de Wien à celle de Planck, seule la correction relative à m intervient ici. On a donc

$$I_p = m_p - m_b = m_w - \Delta m - m_b = I_w - \Delta m .$$

La correction Δm s'applique à l'index absolu comme à la magnitude relative au récepteur correspondant.

Avec les moyens ordinaires, un index absolu n'est déterminé qu'à 0,1 magnitude près. Cette correction peut donc être négligée au-dessous de 10000° .

Pour des températures plus élevées, elle est sensible, sans pour cela affecter l'allure de la variation de l'index absolu en fonction de la température.

En effet (I, 19), cette fonction présente une inflexion pour la température

$$T_i = T_m \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right) \cong 2 T_m .$$

Or, au moins dans le cas de l'acuité infinie, et de façon approximative pour a fini, Δm présente aussi une inflexion et cela pour la température $T' = 2,51 T_m$. La correction déplace quelque peu cette inflexion vers les températures élevées, mais le caractère linéaire de la fonction $I(T_e)$ pour ces températures n'est pas affecté.

La pente de la courbe sera modifiée dans cette région. Voyons

de combien, du moins dans le cas de l'acuité infinie. L'index absolu est alors (I, 22)

$$I_w = 10 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*} \right) + 1,08574 \frac{b}{\lambda_s} \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_e^*} \right).$$

Or $T_i \cong 2T_m = \frac{b}{2\lambda_s}$, et

$$\frac{dI_w}{dT_e} = 1,08574 \frac{4\lambda_s T_e - b}{\lambda_s T_e^2}, \quad (\text{I, 19}).$$

Pour $T_e = \frac{b}{2\lambda_s}$, cette dérivée devient

$$\frac{dI}{dT_e} = \frac{1,08574}{T_m}.$$

Pour cette même température, la dérivée de Δm est

$$\frac{d(\Delta m)}{dT_e} = 1,08574 \cdot \frac{1}{T_m} \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} = 1,08574 \cdot 0,1565 \cdot \frac{1}{T_m}.$$

On a donc

$$\frac{dI_p}{dT_e} = \frac{dI_w}{dT_e} - \frac{d(\Delta m)}{dT_e} = \frac{1,08574}{T_m} (1 - 0,1565).$$

La pente de la courbe est diminuée de moins de 16%.

Examinons encore l'influence de la correction sur le minimum de l'index absolu. Avec l'approximation de Wien, celui-ci se produit pour $T_e = \frac{b}{4\lambda_s}$. La dérivée $\frac{d(\Delta m)}{dT_e}$ est toujours positive. L'index $I_p = I_w - \Delta m$ décroît lorsque I_w est minimum. Le minimum est donc déplacé vers les températures élevées.

Cherchons un ordre de grandeur de ce déplacement, en nous bornant au cas de l'acuité infinie. Au minimum de I_p , on a

$$\frac{dI_w}{dT_e} - \frac{d(\Delta m)}{dT_e} = 0,$$

ou, dans le cas considéré,

$$\frac{4\lambda_s T_e - b}{\lambda_s T_e^2} - \frac{4}{T_e} \frac{e^{-4\frac{T_m}{T_e}}}{1 - e^{-4\frac{T_m}{T_e}}} = 0 .$$

Le premier terme est nul pour $T_e = T_m$. Introduisons cette valeur dans le second. On trouve l'équation

$$\frac{t}{T_m} = \frac{e^{-4}}{1 - e^{-4}} = 0,0186$$

où t représente la correction à apporter à T_m . Il vient $t = 0,0186 T_m$. Cette correction est donc moindre de 2%. Elle est négligeable.

14. — Application au calcul de l'index photo-visuel.

Nous nous bornerons à l'étude de la formule à simple exposant (I, 15, 24-26, 37), dont nous savons qu'elle représente très bien les observations.

On a

$$I_{pv} = m_p - m_v = I' - \Delta m_p + \Delta m_v ,$$

où I' représente l'index calculé par la formule de Wien.

Il suffira, dans la suite, de limiter le développement U à son premier terme. Nous savons en effet que ce terme suffit lorsqu'on ne cherche pas la précision du centième de magnitude dans le cas de l'œil, et, à plus forte raison dans celui de la plaque photographique, où la correction Δm est moindre. Le cas des températures très élevées est réservé. D'ailleurs, c'est la différence $\Delta m_v - \Delta m_p$ qui nous importe ici. Le signe des erreurs systématiques provenant des termes négligés est le même dans les deux expressions, l'erreur systématique sur la différence sera très faible.

Faisons le calcul avec $a = 50$, $\lambda_v = 5,5 \cdot 10^{-5}$ cm, $\lambda_p = 3,93 \cdot 10^{-5}$ cm, valeurs très voisines de celles données par une certaine échelle d'index de couleur (I, 37).

Il vient

T_e	Δm_v	Δm_p	Diff.
5000	+ 0.008	+ 0,002	+ 0,006
10000	077	031	046
15000	169	090	079
20000	250	156	094
30000	+ 0,366	+ 0,280	0,086

En première approximation, la correction à l'index de couleur n'atteint pas le dixième de magnitude. La théorie de l'index photo-visuel basée sur la loi de Wien peut donc être considérée comme satisfaisante, à quelques centièmes de magnitude près pour les étoiles dont la température n'atteint pas 15000° et à 0,1 magnitude pour celles qui sont extrêmement chaudes. Autrement dit, l'erreur systématique ne peut affecter le chiffre des dixièmes de magnitude que pour les étoiles à index négatif. Sauf dans des cas exceptionnels, la précision de la théorie de première approximation basée sur la loi de Wien est comparable à celle des observations. Cela est d'autant plus exact que les constantes d'étalonnage sont choisies de façon à annuler l'index des étoiles A_0 .

Les différences du tableau du § II, 8 donnent une valeur exagérée de ΔI . Elles confirment les conclusions ci-dessus.

(à suivre)