

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 18 (1936)

Artikel: Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante. II. [suite et fin]
Autor: Rossier, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-743073>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SENSIBILITÉ SPECTRALE

DES

RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

II

PAR

P. ROSSIER

(suite et fin)

III. CAS D'UN RÉCEPTEUR À DEUX MAXIMA DE SENSIBILITÉ

15. — *Calcul de la magnitude, cas de l'équation spectrale de Wien.*

L'expression de la magnitude est alors (I, 11)

$$m = 2,5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2,5 \log \varphi(T_e),$$

où

$$\varphi(T_e) = \sum_{j=1}^2 \frac{C_j e^{a_j} \lambda_j^{a_j} (a_j + 3)!}{\left(a_j \lambda_j + \frac{b}{T_e}\right)^{a_j + 4}}.$$

Supposons que, dans l'expression analytique de la sensibilité,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{et} \quad \sigma_j = c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_j}{\lambda}}\right)^{a_j},$$

l'un des termes, celui d'indice 1 est prépondérant. Calculons tout d'abord la magnitude relative à un récepteur r_1 dont la



sensibilité serait σ_1 . Puis apportons une correction pour tenir compte du récepteur fictif r_2 , de sensibilité de σ_2 . On a

$$m_1 = 2,5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5 (a_1 + 4) \log \left(a_1 \lambda_1 + \frac{b}{T_e} \right)$$

$$\text{et } m = m_1 + \delta m, \quad \text{avec } \delta m = 2,5 \log \psi(T_e).$$

La fonction $\psi(T_e)$ peut être mise sous la forme

$$\psi(T_e) = A \left\{ 1 + B \frac{\left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right)^{a_1+4}}{\left(1 + \frac{b}{a_2 \lambda_2 T_e} \right)^{a_2+4}} \right\}$$

en posant

$$A = C_1 e^{a_1} \frac{(a_1 + 3)!}{a_1^{a_1+4}}$$

$$B = \frac{C_2 e^{a_2 - a_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 (a_2 + 3)!}{C_1 a_2^{a_2+4}} \cdot \frac{a_1^{a_1+4}}{(a_1 + 3)!}.$$

A et B sont indépendants de la température. A ne dépend que du récepteur r_1 ; il peut être adjoint à la constante d'étalonnage \mathcal{E} et éliminé ainsi. B, au contraire, va jouer un rôle important dans la suite.

On a donc finalement

$$\delta m = 2,5 \log (1 + BQ)$$

en appelant Q le quotient de l'accolade.

La correction δm est toujours positive, sauf pour $B = 0$, auquel cas on retombe sur le récepteur à maximum unique; cela ne se produit que pour $C_2 = 0$.

La correction δm contient le rapport de deux fonctions en $\left(1 + \frac{b}{a \lambda_s T_e} \right)^{a+4}$, expression qui apparaît dans celle de l'index de couleur (I, 15), relatif à deux récepteurs dont les sensibilités seraient σ_1 et σ_2 .

Cette propriété est générale. Soient L' et L'' les éclats de l'étoile considérée, relatifs aux deux récepteurs. L'éclat total est

$$L = L' + L'' = L' \left(1 + \frac{L''}{L'} \right),$$

et, dans l'échelle des magnitudes

$$m = 2,5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2,5 L' - 2,5 \log \left(1 + \frac{L''}{L'} \right)$$

16. — *Variation de la correction avec la température.*

Examinons le cas où la température est basse. Il vient

$$Q = T_e^{a_2 - a_1} b^{a_1 - a_2} \frac{(a_2 \lambda_2)^{a_2 + 4}}{(a_1 \lambda_1)^{a_1 + 4}}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ll} \delta m = 0 & \text{si } a_2 > a_1 \\ 2,5 \log (1 + B) & a_2 = a_1 \\ \infty & a_2 < a_1 . \end{array}$$

Lorsque l'acuité du maximum secondaire dépasse celle du maximum principal, l'influence de ce maximum secondaire est faible, pour les basses températures. Elle est considérable dans le cas contraire.

Pour des températures très élevées, Q tend vers l'unité et δm vers $2,5 \log (1 + B)$.

Formons la dérivée

$$\frac{dQ}{dT_e} = Q \cdot \frac{b}{T_e^2} \cdot \frac{a_1 \lambda_1 (a_2 + 4) \left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right) - a_2 \lambda_2 (a_1 + 4) \left(1 + \frac{b}{a_2 \lambda_2 T_e} \right)}{a_1 a_2 \lambda_1 \lambda_2 \left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right) \left(1 + \frac{b}{a_2 \lambda_2 T_e} \right)}$$

Le signe est celui du numérateur. Pour des températures élevées, c'est celui de

$$a_1 \lambda_1 (a_2 + 4) - a_2 \lambda_2 (a_1 + 4) .$$

Si les acuités sont elles-mêmes grandes, 4 peut être négligé devant les a ; l'expression ci-dessus diffère peu de

$$a_1 a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) .$$

Si les acuités sont élevées et si le maximum secondaire a lieu pour une longueur d'onde supérieure à celle du maximum principal, le terme correctif décroît lorsque la température

augmente, du moins pour des températures suffisamment élevées, et inversement.

Pour de basses températures, le signe de la dérivée est celui de $(a_2 - a_1)$.

Pour des températures suffisamment basses, le sens de la variation de la correction ne dépend que des acuités. Il est indépendant des longueurs d'onde des maxima de sensibilité. Si l'acuité du maximum secondaire est supérieure à celle du maximum principal, la correction croît avec la température, du moins pour des températures suffisamment basses, et inversement.

La dérivée s'annule pour

$$T' = \frac{b(a_1 - a_2)}{a_1 \lambda_1 (a_2 + 4) - a_2 \lambda_2 (a_1 + 4)},$$

ce qui n'a de sens que pour $T' > 0$.

La correction présente donc un extremum unique. Voyons l'ordre de grandeur de T' . Si les acuités sont notables par rapport à 4, le dénominateur est peu différent de $a_1 a_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$. On a alors

$$T' \cong \frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2};$$

il faut

$$\frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0.$$

Dans le cas des acuités suffisamment élevées, le domaine où δm varie toujours dans le même sens est d'autant plus étendu que les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont plus écartées et les acuités plus voisines.

Admettons, pour fixer les idées, que les deux longueurs d'onde diffèrent de 10 %, ce qui est peu. $\frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2}$ est alors égal à $40T_m$ où $T_m = \frac{b}{4\lambda_s}$. On a donc

$$T' \cong 40T_m \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}.$$

Supposons encore $a_1 = 2a_2$, ce qui est plutôt élevé. Il vient

$$T' \cong \frac{20}{a_2} T_m .$$

Pour des acuités notables, la température T' est si basse qu'elle sort du domaine intéressant l'astrophysique.

17. — *Variation de la correction avec la longueur d'onde du maximum secondaire.*

Étudions la variation du produit BQ. On a

$$\frac{d(BQ)}{d\lambda_2} = BQ \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{(a_2 + 4)b}{a_2 \lambda_2 T_e + b} - 4 \right) .$$

Cette dérivée s'annule pour

$$T'' = \frac{b}{4\lambda_2} .$$

δm est stationnaire par rapport à la longueur d'onde du maximum secondaire de sensibilité pour la température qui rendrait minimum l'index absolu relatif au récepteur r_2 . Cette température est indépendante de l'acuité.

La dérivée précédente est positive pour de basses températures et négative pour les étoiles chaudes. La correction δm croît avec la longueur d'onde du maximum secondaire de sensibilité pour les étoiles froides et décroît pour celles de températures élevées.

18. — *Cas d'égalité des acuités.*

Il arrive que a_1 et a_2 soient relativement grands et peu différents. Il peut y avoir avantage à poser, au moins approximativement, $a_1 = a_2 = a$.

Il vient alors

$$B = \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 \quad \text{et} \quad Q = \left(\frac{1 + \frac{b}{a\lambda_1 T_e}}{1 + \frac{b}{a\lambda_2 T_e}} \right)^{a+4}$$

Le calcul de B est très allégé.

Pour $T_e = 0$, on a alors

$$\delta m = 2,5 \log \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right).$$

Pour de basses températures, la correction est peu dépendante de l'acuité commune des deux maxima.

La dérivée $\frac{dQ}{dT_e}$ devient

$$\frac{dQ}{dT_e} = Qb \frac{a+4}{a} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \left(T_e + \frac{b}{a\lambda_1} \right) \left(T_e + \frac{b}{a\lambda_2} \right)}.$$

Son signe est celui de $\lambda_1 - \lambda_2$. Elle ne s'annule que pour T_e infini.

La correction δm croît ou décroît avec la température suivant que le maximum secondaire a lieu pour une longueur d'onde inférieure ou supérieure à celle du maximum principal. Elle varie toujours dans le même sens.

19. — Cas où les acuités sont très grandes.

Nous allons voir ce que devient la correction δm dans le cas où les acuités sont infinies. Elles ne peuvent être l'une finie et l'autre infinie car (I, 11 et 30), la magnitude calculée dans le cas de l'acuité infinie est l'expression, dans une échelle logarithmique, de la densité de puissance dans le spectre ($\text{erg} \times \text{sec}^{-1} \times \text{cm}^{-1}$), tandis qu'à la magnitude correspond une puissance ($\text{erg} \times \text{sec}^{-1}$).

Additionner sans précaution une magnitude globale à une magnitude au maximum de sensibilité conduit à un résultat absurde, puisque les deux addendes sont de natures différentes.

Lorsque l'acuité est élevée, la magnitude au maximum de sensibilité se confond avec la magnitude globale (I, 30), à une constante d'étalonnage près. Si l'on peut admettre l'infinité de a_1 et de a_2 , on a (I, 11)

$$m = S - 5 \log r_0 + \frac{1,08574 b}{\lambda_s T_e} \quad \text{et} \quad B = \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4.$$

Le quotient Q devient

$$e^{\frac{b}{T_e} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}$$

et

$$\delta m = 2,5 \log \left\{ 1 + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 e^{\frac{b}{T_e} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)} \right\}.$$

20. — *Expression de la magnitude dans le cas de la loi de Planck.*

Nous avons alors

$$m = 2,5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 - 2,5 \log \Phi(T_e).$$

Une valeur approximative de la magnitude est celle relative au récepteur r_1 et à la loi de Wien.

$$m_1 = 2,5 \log \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5 (a_1 + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right).$$

Cette magnitude doit subir une correction μ qui groupe les deux améliorations Δm du chapitre précédent et δm de celui-ci: On a

$$m_p = m_1 - \mu$$

$$\mu = 2,5 \log \left\{ \Phi(T_e) \left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right)^{a_1+4} \right\}.$$

Le terme sous le signe log est égal à

$$\frac{C_1 e^{a_1} (a_1 + 3)!}{\lambda_1^4 a_1^{a_1+4}} \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e}}{1 + i \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e}} \right)^{a_1+4} + B \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{b}{a_1 \lambda_1 T_e} \right)^{a_1+4}}{\left(1 + i \frac{b}{a_2 \lambda_2 T_e} \right)^{a_2+4}} \right\}.$$

Le facteur de l'accolade ne dépend que du récepteur r_1 . Il peut être éliminé par adjonction à la constante d'étalonnage \mathcal{E} . On peut donc poser

$$\mu = 2,5 \log \psi(T_e)$$

où $\psi(T_e)$ représente l'expression entre accolades.

Discutons sommairement cette fonction :

$$\psi(0) = 1 + \sigma + B' T_e^{a_1 - a_2}$$

σ et B' sont des constantes. Si $a_2 > a_1$,

$$\mu = 2,5 \log(1 + \sigma).$$

Si l'acuité du maximum secondaire est supérieure à celle du maximum principal, l'influence de ce maximum secondaire est faible pour des températures suffisamment basses ; pour $T_e = 0$ la correction totale μ a la même valeur que le Δm défini au chapitre précédent relatif au maximum principal.

Si l'acuité du maximum secondaire est inférieure à celle du maximum principal, μ est infini pour $T_e = 0$.

Autrement dit, pour de basses températures, est prépondérante l'influence de celui des deux maxima dont l'acuité est la moindre.

Pour des températures élevées, les sommes sont infinies. La correction l'est aussi. Le passage de la loi de Wien à celle de Planck conduit à diminuer la magnitude d'une quantité qui croît indéfiniment avec la température.

Admettons qu'on puisse poser $a_1 = a_2 = a$. Il vient

$$\psi(T_e) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{b}{a \lambda_1 T_e}}{1 + i \frac{b}{a \lambda_1 T_e}} \right)^{a+4} + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{b}{a \lambda_1 T_e}}{1 + i \frac{b}{a \lambda_2 T_e}} \right)^{a+4}$$

Pour $T_e = 0$, on a

$$\psi(0) = \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{a+4}}$$

La correction est positive, non nulle.

Si les acuités sont infinies, les sommations de quotients sont remplacées par des exponentielles :

$$\mu = 1,08574 \text{ Log} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_1 T_e}} \right)^{-1} + \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^4 e^{\frac{b}{T_e} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)} \frac{1}{1 - e^{-\frac{b}{\lambda_2 T_e}}} \right\}$$

La correction Wien-Planck se manifeste par la présence du facteur $\left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_1 T_e}}\right)^{-1}$.

21. — *Application aux indices de couleur.*

Examinons tout d'abord le cas d'un index absolu. Rappelons qu'il est défini comme l'excès d'une magnitude sur une magnitude bolométrique. Celle-ci est évidemment indépendante de toutes les complications de la courbe de sensibilité du récepteur non bolométrique considéré. Seules subsistent donc les corrections relatives à la magnitude non bolométrique. Les corrections δm ou μ s'appliquent donc à I, comme à la magnitude, au fait près que la constante d'étalonnage peut être modifiée, car la magnitude bolométrique subit une correction constante, égale à $-0,086$ lorsqu'on remplace la loi de Wien par celle de Planck (II, 8).

L'étude des propriétés d'un index de couleur se ramène à celle de la différence de deux indices absolus (I, 14) :

$$I_{12} = I_1 - I_{22} .$$

La correction constante éventuellement apportée aux indices absolus est éliminée. L'amélioration ΔI à apporter aux indices I_{12} est donc la différence des améliorations apportées aux magnitudes

$$\Delta I_{12} = \mu_1 - \mu_2 , \quad I = I' - \Delta I .$$

La discussion a été faite en détail (II, 14) dans le cas où seule la correction Δm est considérée. Le cas général n'est guère intéressant, eu égard au fait de la complication notable des expressions; d'ailleurs le rapport C_1/C_2 , qui peut beaucoup varier, joue un rôle essentiel. Nous verrons plus bas un cas particulier (II, 27).

IV. CAS PARTICULIER D'UN RÉCEPTEUR PHOTO-ÉLECTRIQUE.

22. — *Représentation analytique de la sensibilité de la cellule.*

Nous nous proposons d'appliquer la théorie générale de la sensibilité chromatique des récepteurs au cas du photomètre

photo-électrique de l'Observatoire de Berlin-Babelsberg, sur lequel des renseignements précis ont été récemment publiés ¹.

Est-il possible de représenter la sensibilité propre du récepteur par une fonction

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a ?$$

La constante λ_s , abscisse du maximum, est lue directement sur la courbe. Chaque donnée de la sensibilité pour une longueur d'onde fournit une équation exponentielle en a :

$$\log \sigma = a \log \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right).$$

Cet ensemble, résolu par un artifice approprié, fournit a .

Il y a lieu d'appliquer avec discernement les méthodes classiques. Aux extrémités du domaine de sensibilité, les résultats des mesures sont relativement peu exacts. Les équations correspondantes doivent donc être affectées de poids réduits. La méthode des moindres carrés conduit précisément à en exagérer l'importance. Nous nous efforcerons donc de déterminer a et λ_s de façon à diminuer plus le caractère systématique des résidus que leurs valeurs numériques, surtout aux extrémités du domaine de sensibilité.

Sans insister ici sur le détail, on peut admettre les résultats suivants:

$$\lambda_s = 4,38 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad \text{et} \quad a = 160 .$$

Le tableau (page suivante) permet la comparaison des valeurs observées et calculées. Sans être remarquable, la représentation analytique donne bien l'allure de la courbe observée. Une discussion plus complète exigerait une estimation de la précision des observations.

Les constantes de sensibilité de la cellule sont voisines de

¹ W. BECKER, *loc. cit.*

celles des plaques photographiques, pour lesquelles λ_s est de l'ordre de $4,2 \times 10^{-5}$ cm et a de la centaine. Des magnitudes observées au moyen de la cellule, sans aucun filtre, seraient donc très voisines des magnitudes photographiques.

Sensibilité propre de la cellule.

$\lambda \cdot 10^5$ cm	σ observé	σ calculé	Résidus
3.5	0,08	0,01	+ 0.07
3.7	0,12	0.09	+ 0.03
3.9	0.25	0.33	— 0.08
4.0	0.42	0.51	— 0.09
4.1	0.68	0.70	— 0.02
4.2	0.84	0.87	— 0.03
4.3	0.94	0.97	— 0.03
4.4	1.00	1.00	0.00
4.5	0.88	0.94	— 0.06
4.6	0.77	0.83	— 0.06
4.7	0.64	0.68	— 0.04
4.9	0.46	0.38	+ 0.08
5.1	0.30	0.17	+ 0.13
5.3	0.18	0.07	+ 0.11
5.5	0.02	0.02	0.00

23. — *Représentation analytique de la sensibilité du photomètre muni d'un filtre bleu.*

Les observations photométriques qui nous intéressent ici ont été faites sur l'appareil précédent muni de filtres. Les observateurs ont calculé la sensibilité d'ensemble de l'appareil pour diverses longueurs d'onde, compte tenu de la transparence du filtre, de l'optique et de l'atmosphère. Les résultats sont donnés avec trois chiffres exacts. Il ne faut pas se faire d'illusion sur cette précision, puisqu'ils sont obtenus en faisant le produit de quatre nombres: sensibilité de la cellule, transparences de l'atmosphère, de l'objectif et du filtre, quantités données avec deux chiffres.

La table de sensibilité donnée par le mémoire original est reproduite ci-dessous. Ni la longueur d'onde du maximum ni la valeur de celui-ci dans l'échelle choisie ne sont données.

Nous déterminerons graphiquement λ_s en traçant la courbe de sensibilité. Par chaque point donné par la table, traçons un diamètre horizontal et cherchons-en le milieu. Ces centres se placent approximativement sur une droite, qui, prolongée, coupe la courbe au voisinage de $4,27 \times 10^{-5}$ cm. Admettons cette première valeur de λ_s . Pour déterminer la valeur de la sensibilité au maximum à l'échelle originale, assimilons la courbe, au voisinage du maximum, à une parabole. On trouve ainsi une valeur voisine de 315 pour le maximum de sensibilité. Pour nous rapprocher des notations habituelles, rapportons la sensibilité à une échelle telle que le maximum de sensibilité soit égal à l'unité.

Un calcul analogue à celui du paragraphe précédent donne une valeur approximative de l'acuité. On trouve $a = 260,8$. Les valeurs correspondantes de la sensibilité calculées figurent sur le tableau, colonne 4. A partir de la longueur d'onde $4,5 \times 10^{-5}$ cm, les valeurs calculées sont trop grandes. Sans être négligeables, les autres résidus sont acceptables. Pour remédier à ce caractère systématique des résidus, différencions σ par rapport à λ_s . Il vient

$$d\sigma = \frac{a}{\lambda_s} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) \sigma d\lambda_s.$$

Appliquons cette équation aux résidus; on en tire une amélioration $d\lambda_s$ de l'ordre de $-0,02 \times 10^{-5}$ cm; donc $\lambda_s = 4,25 \times 10^{-5}$ cm. Re commençons le calcul avec cette valeur de λ_s . On retrouve encore une valeur de l'ordre de 315 pour le maximum de σ exprimé dans l'échelle originale. Rien n'est donc modifié aux σ de la colonne 3. Calculons les sensibilités correspondantes. L'examen des résidus (non reproduits ici) montre que ceux-ci sont bons près du maximum, se gâtent au voisinage des inflexions pour s'améliorer aux extrémités du domaine de sensibilité. Le premier fait est naturel, puisqu'au maximum, les valeurs observées et calculées sont égales. La diminution des résidus pour les longueurs d'onde extrêmes provient du poids exagéré des équations correspondantes.

Sensibilité du récepteur photo-électrique muni du filtre bleu.

λ en $m\mu$	σ observé	σ calculé, 1 ^{re} ap- proxi- mation	Résidus	σ calculé, 2 ^{me} ap- proxi- mation	Résidus	
350	7	0.022	0.004	+ 0,018	0,002	+ 0,020
360	14	044	018	+ 0,026	011	+ 0,033
370	25	079	060	+ 0,019	045	+ 0,034
380	50	159	158	+ 0,001	135	— 0,024
390	90	286	331	— 0,045	311	— 0,025
400	155	492	569	— 0,077	492	— 0,072
410	255	810	801	+ 0,009	820	— 0,010
420	308	978	965	+ 0,013	979	— 0,001
430	311	987	994	— 0,007	979	+ 0,008
440	284	902	887	+ 0,015	857	+ 0,045
450	191	606	706	— 0,100	609	— 0,003
460	114	362	495	— 0,133	393	— 0,031
470	57	181	312	— 0,131	206	— 0,025
480	25	079	179	— 0,100	112	— 0,033
490	12	0,038	0,094	— 0,056	0,051	— 0,013

Contentons-nous donc de prendre 12 équations sur les 15 qui sont données, 6 de part et d'autre du maximum. On trouve ainsi $a = 307,3$.

On voit ici combien l'exposant d'acuité est délicat à déterminer. Inversement, les grandeurs que nous calculons de la magnitude sont relativement indépendantes de l'acuité.

Les valeurs de la sensibilité correspondant à $\lambda_s = 4,25 \cdot 10^{-5}$ cm et $a = 307,3$ sont données dans le tableau, colonne 6. Il est illusoire de vouloir chercher mieux.

Comme pour la cellule nue, remarquons que le domaine de sensibilité que nous venons d'étudier se confond pratiquement avec celui des plaques photographiques ordinaires. L'acuité est cependant notablement plus élevée.

24. — *Index absolu relatif au récepteur photo-électrique muni du filtre bleu.*

Rappelons que l'index absolu est la différence entre la magnitude bolométrique d'une étoile et celle mesurée au moyen d'un autre récepteur. Pour les applications astronomiques,

il constitue un moyen commode de représenter la sensibilité chromatique du récepteur.

Si l'on admet la validité de l'équation spectrale de Wien et celle d'une fonction σ pour la sensibilité, l'index absolu est donné par la formule (I, 18)

$$I' = 2,5 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*} \right)^4 \left(\frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a\lambda_s + \frac{b}{T_e^*}} \right)^{a+4},$$

où T_e^* est la température effective d'une étoile d'index absolu nul. L'index absolu est minimum (I, 19) pour la température

$$T_m = \frac{b}{4\lambda_s} = 8420^\circ.$$

Il varie sensiblement linéairement en fonction de la température au voisinage de l'inflexion, qui a lieu pour

$$T_i = T_m \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right) = 16900^\circ.$$

Index absolu relatif au récepteur photo-électrique muni du filtre bleu.

T_e	I'	I
2000	7,42	7,43
2500	4,85	4,87
3000	3,27	3,28
4000	1,53	1,54
5000	0,69	0,71
6000	0,27	0,28
8000	0,00	0,00
10000	0,05	0,03
15000	0,59	0,49
20000	1,23	1,02
25000	1,83	1,52
30000	2,37	1,97
40000	3,31	2,74

Le tableau précédent donne la valeur de cet index dans la colonne intitulée I' .

Nous allons maintenant tenir compte de la loi de Planck.

Nous avons vu qu'il est nécessaire d'apporter aux valeurs I' une correction ΔI égale à celle Δm de la magnitude.

En première approximation, calculons cette correction en supposant l'acuité infinie, colonne ΔI_∞ du tableau ci-dessous. Nous avons ici

$$\Delta I = -2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T_e}} \right) = -2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{33694}{T_e}} \right).$$

Cette formule donne une approximation par excès de ΔI sauf pour les températures basses. D'autre part, nous savons que ΔI est une fonction croissante de la température. Au-dessous de 6000° la correction est négligeable.

L'expression exacte de ΔI est

$$\Delta I = 2,5 \log \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{109,6}{T_e}}{1 + i \frac{109,6}{T_e}} \right)^{313,3} \right].$$

La colonne ΔI du tableau en donne la valeur. En effectuant le calcul, on constate que le premier terme est suffisant jusqu'un peu au delà de 10000° ; à 15000° , deux suffisent; trois à 20000° et quatre au delà, si l'on cherche à assurer le centième de magnitude. En limitant la précision au dixième de magnitude, on trouve qu'il faut trois termes à 40000° , deux jusqu'à 30000° et qu'un seul suffit au-dessous de 20000° . Les valeurs données par les deux formules sont pratiquement identiques, puisque la différence ne dépasse pas 0,01 magnitude.

Connection à l'index de couleur I'

T_e	ΔI_∞	ΔI
6000	0,00	0,00
8000	0,02	0,02
10000	0,04	0,04
15000	0,12	0,12
20000	0,22	0,21
25000	0,33	0,32
30000	0,43	0,42
40000	0,61	0,60

Toutes ces valeurs ont été ramenées à $I = 0$ pour $T_e = 8000^\circ$, valeur voisine du minimum de I (colonne 3 du tableau de l'index).

25. — *Représentation analytique de la sensibilité du récepteur muni du filtre jaune.*

Exprimons tout d'abord la sensibilité dans une échelle ayant l'unité pour maximum, sans répéter ici les considérations développées plus haut. Si l'on essaie, sans autre précaution, de confronter ces valeurs avec une fonction σ , on trouve un exposant d'environ 200, de l'ordre de celui relatif à la cellule nue, et des résidus considérables, présentant un caractère systématique accusé. Le motif en saute aux yeux si l'on représente graphiquement la courbe de sensibilité: du côté des grandes longueurs d'onde, elle présente une double inflexion, sans maximum secondaire; la sensibilité présente, par rapport à la courbe habituelle, un accroissement sensible vers 5×10^{-5} cm. Cela s'explique facilement par un examen des tables de sensibilité de la cellule et de transparence du filtre ¹. Celle-là a son maximum vers $4,4 \times 10^{-5}$ cm et celui-ci un maximum de transparence vers $5,1 \times 10^{-5}$ cm. Comme dans le cas des plaques orthochromatiques, il est nécessaire de considérer ici une fonction σ à deux addendes ².

$$\sigma(\lambda) = \Sigma C_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}} \right)^{a_i}$$

Le calcul des six constantes λ_i , a_i et C_i est compliqué si on l'entreprend d'un bloc. Opérons au contraire par étapes. Examinons en premier lieu le maximum principal de sensibilité. Il a lieu vers $4,54 \times 10^{-5}$ cm. Toute la portion ascendante de la courbe, correspondant à des longueurs d'onde inférieures à ce maximum, est pratiquement très peu dépendante du second addende; C_1 est voisin de l'unité. Posons $C_1 = 1$, en première

¹ W. BECKER, *loc. cit.*, p. 4.

² P. ROSSIER, Sur la représentation analytique de la sensibilité spectrale des plaques orthochromatiques. *C. R. Soc. de Phys. Genève*, 1935, III; *Publ. Obs. Genève*, fasc. 31.

approximation et calculons une première valeur de a_1 en ne tenant compte que des valeurs relatives aux longueurs d'onde inférieures à celle du maximum. Les calculs sont semblables à ceux exposés plus haut. Il vient ainsi une valeur de première approximation pour l'acuité du maximum principal: $a_1 = 692$.

Calculons maintenant les valeurs du premier terme pour toutes les longueurs d'onde de la table. Les résidus constituent une première approximation du terme

$$\sigma_2 = C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}} \right)^{a_2}.$$

Le maximum se présente pour $\lambda_2 = 4,97 \times 10^{-5}$ cm. Admettons cette valeur pour λ_2 , calculons le maximum de $\sigma_2 = C_2$, par l'artifice de la parabole. Reste une dernière inconnue a_2 que l'on détermine par l'ensemble des équations relatives aux diverses valeurs données de σ_2 . En fait, $a_2 = 454$ donne satisfaction en première approximation.

Pour déterminer mieux le coefficient C_2 , calculons pour chaque longueur d'onde la valeur de la parenthèse

$$\sigma' = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}} \right)^{a_2}.$$

En formant les expressions $\sigma' C_2 = \sigma_2$, on constitue un système d'équations en C_2 qui détermine cette constante: $C_2 = 0,547$. Les résidus présentent encore un caractère systématique qui montre que $\lambda_2 = 4,97 \times 10^{-5}$ cm est trop petit. Différentiant l'expression de σ_2 , on calcule comme précédemment une amélioration $d\lambda_2$ à λ_2 . On trouve un $d\lambda_2$ de l'ordre de $+ 0,04 \times 10^{-5}$ cm et $\lambda_2 = 5,01 \times 10^{-5}$ cm.

Recommençons le calcul de a_2 et C_2 . Il vient $a_2 = 524$ et $C_2 = 0,585$.

σ_2 est désormais bien déterminé. Calculons en une table, soustrayons ces valeurs de la sensibilité donnée. Les différences donnent les σ_1 , aux résidus près. Le maximum est voisin de $4,53 \times 10^{-5}$ cm. Le calcul donne $a_1 = 694$ et $C_1 = 0,986$. Un calcul d'amélioration sur λ_1 conduit à poser $\lambda_1 = 4,54 \times 10^{-5}$ cm

et $C_1 = 0,963$. Le premier addende est alors relativement bien déterminé. Reprenons le calcul du second. Il vient

$$\lambda_2 = 5,01 \times 10^{-5} \text{ cm} ; \quad a_2 = 474 ; \quad C_2 = 0,555 .$$

Le tableau donne la comparaison des valeurs observées et calculées avec la formule

$$\sigma = 0,963 \left(\frac{454}{\lambda} e^{1 - \frac{454}{\lambda}} \right)^{694} + 0,555 \left(\frac{501}{\lambda} e^{1 - \frac{501}{\lambda}} \right)^{474} ,$$

où les λ sont exprimés en $m\mu$. Le caractère de la courbe expérimentale est bien conservé; il y a évidemment des résidus, pas entièrement répartis au hasard; la représentation est certainement satisfaisante.

Sensibilités calculées et observées avec le filtre jaune.

λ $m\mu$	σ_1	σ_2	σ_{calc}	σ_{obs}	Résidus O - C
410	0,023		0,023	0,028	+ 0,005
420	0,112		0,112	0,131	+ 19
430	0,340	0,002	0,342	0,277	— 65
440	0,683	0,009	0,692	0,704	+ 12
450	0,937	0,032	0,969	0,981	+ 12
460	0,908	0,094	1,002	0,963	— 35
470	0,638	0,205	0,843	0,829	— 14
480	0,335	0,359	0,694	0,713	+ 19
490	0,133	0,492	0,625	0,670	+ 45
500	0,042	0,555	0,597	0,601	+ 4
510	0,011	0,519	0,530	0,526	— 4
520	0,002	0,400	0,402	0,411	+ 9
530		0,264	0,264	0,299	+ 35
540		0,152	0,152	0,156	+ 4

26. — *Index absolu relatif au récepteur muni du filtre jaune.*

Il s'agit ici d'une application numérique de la théorie exposée plus haut, chapitre III.

Calculons d'abord l'index I_1 relatif à une récepteur r_1 , dont la sensibilité serait caractérisée par $\lambda_1 = 4,54 \times 10^{-5}$ cm et

$a_1 = 694$. Admettant la validité de l'équation spectrale de Wien, il vient

$$I_1 = 10 \log T_e + 1745 \log \left(0,0315076 + \frac{1,432}{T_e} \right) - A ,$$

où A est une constante.

Cet index est minimum pour $T_m = 7890^\circ$.

Le tableau donne le résultat de ce calcul.

Déterminons maintenant la correction due au maximum secondaire. On a

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 4,54 \times 10^{-5} \text{ cm} & \lambda_2 = 5,01 \times 10^{-5} \text{ cm} \\ a_1 = 694 & a_2 = 474 \\ C_1 = 0,963 & C_2 = 0,555 \end{array}$$

L'acuité du maximum secondaire est moindre que celle du maximum principal; la correction δI est grande pour de basses températures.

Des acuités de plusieurs centaines peuvent être considérées comme élevées. Le maximum secondaire a lieu pour une longueur d'onde supérieure à celle du maximum principal. Pour des températures élevées, la correction décroît lorsque la température augmente (II, 15).

Pour s'assurer que 4 est bien négligeable par rapport aux acuités et que le signe de la dérivée est bien celui donné par la règle ci-dessus, il faut former l'expression

$$a_1 \lambda_1 (a_2 + 4) - a_2 \lambda_2 (a_1 + 4) = - 3,30 \text{ cm} .$$

La température pour laquelle la correction serait extremum est négative. La correction décroît donc constamment. Elle est donnée par la formule

$$\delta m = 2,5 \log (1 + BQ),$$

où

$$B = \frac{0,555}{0,963} e^{694-474} \left(\frac{4,54}{5,01} \right)^4 \frac{477!}{474^{478}} \cdot \frac{694^{698}}{697!}$$

$$Q = \frac{\left(1 + \frac{45,45}{T_e} \right)^{698}}{\left(1 + \frac{60,30}{T_e} \right)^{478}} .$$

Il est intéressant de donner le détail du calcul de B, ne serait-ce que pour montrer l'ordre de grandeur des divers termes qui le composent. Chacun des logarithmes suivants est exact à moins d'un quart d'unité du septième ordre décimal, ce qui a nécessité un plus grand nombre de décimales dans le calcul des puissances. Ces logarithmes ont été extraits des tables de M. Duarte ¹. Les nombres munis d'un * sont forcés.

$\log \frac{0,555}{0,963}$	0,7606667* — 1
$\log e^{-220}$	0,4552140* — 96
$4 \log \frac{4,54}{5,01}$	0,8288725 — 1
$\log 477!$	0,2332239 + 1072
$\log 474^{478}$	0,9779527* — 1280
$-\log 697!$	0,1492493 — 1681
$\log 694^{698}$	0,2689104* + 1983
$\log B =$	0,6740993 — 1
$B =$	0,4721712

Comparons à la valeur de B que donnerait l'hypothèse $a_1 = a_2$. Il vient

$$B' = 0,3886 .$$

Cette hypothèse de l'égalité des acuités ne serait satisfaisante que comme ordre de grandeur.

La forme donnée aux diverses expressions qui interviennent ici a une grande importance pour les applications numériques. Parfois, il y a intérêt à remplacer les fractions en $1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e}$ par des binômes de la forme $a\lambda_s + \frac{b}{T_e}$. Ici, cela conduirait à modifier considérablement B, puisque les facteurs en a^{a+4} disparaîtraient. La caractéristique du logarithme de B serait modifiée de $1983 - 1280 = 703$. Les termes Q seraient eux-mêmes

¹ F. J. DUARTE, *Nouvelles tables de log n!* Genève et Paris, 1927; *Nouvelles tables logarithmiques*, Paris, 1933.

modifiés d'autant; cela obligerait à prendre trois décimales de plus dans tous les logarithmes et à opérer avec des caractéristiques de plusieurs centaines.

On voit ici, sur un cas particulier, combien, en pratique, un groupement approprié des facteurs numériques constants permet d'alléger certaines opérations.

L'expression numérique de δm est donc

$$\delta m = 2,5 \log \left\{ 1 + 0,4721712 \frac{\left(1 + \frac{45,45}{T_e}\right)^{698}}{\left(1 + \frac{60,30}{T_e}\right)^{478}} \right\}.$$

Le tableau donne cette correction δm et l'index absolu lui-même, ramené à $I = 0$ pour la température de 8000° , voisine de celle correspondant au minimum. On constate l'importance de la correction sur les étoiles froides: la différence est de l'ordre d'une demi-magnitude. Elle est faible pour des étoiles chaudes, soit pour celles dont la température dépasse celle du minimum de l'index. A partir de l'inflexion de I , qui se produit vers 16000° , la différence est à peu près constante et vaut sensiblement 0,1 magnitude.

Ces valeurs sont basées sur l'hypothèse de la validité de la loi de Wien. Effectuons maintenant le calcul complet de I , basé sur la loi de Planck. On a (II, 20)

$$\mu = 2,5 \log \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{45,45}{T_e}}{1 + i \frac{45,45}{T_e}} \right)^{698} + 0,4721712 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{45,45}{T_e}\right)^{698}}{\left(1 + i \frac{60,30}{T_e}\right)^{478}} \right\}.$$

Ce calcul ne présente aucune difficulté particulière; il est relativement long, car il y a parfois nécessité, pour les températures élevées, de prendre un nombre assez considérable de termes; nous l'indiquons sur le tableau des résultats, dans les deux dernières colonnes, relatives chacune à l'une des sommes.

Index absolu relatif au photomètre muni du filtre jaune.

T_e	I_1	δI	I'	I	Nombre de termes	
2000	6,71	1,22	6,05	6,08	1	1
2500	4,31	1,01	3,86	3,88	1	1
3000	2,85	0,89	2,52	2,55	1	2
4000	1,26	0,74	1,08	1,10	1	2
5000	0,52	0,67	0,42	0,44	1	2
6000	0,18	0,62	0,12	0,14	2	3
8000	0,00	0,56	0,00	0,00	2	4
10000	0,11	0,53	0,14	0,12	3	4
15000	0,73	0,49	0,80	0,67	3	5
20000	1,41	0,47	1,50	1,26	4	7
25000	2,03	0,46	2,13	1,78	5	8
30000	2,59	0,45	2,70	2,25	6	9
40000	3,56	0,45	3,67	3,02	7	12

On constate que jusqu'à 10000°, les indices absolus calculés avec la formule de Planck ne diffèrent que de deux ou trois centièmes de magnitude de ceux donnés par l'équation spectrale de Wien. La différence croît passablement avec la température pour atteindre le dixième de magnitude vers 15000° et dépasser une demi-magnitude à 40000°.

27. — *Index de couleur relatif à l'ensemble des deux récepteurs.*

Rappelons que l'index de couleur peut être considéré comme la différence de deux indices absolus, éventuellement corrigée d'une constante additive pour tenir compte d'une condition d'étalonnage. Nous égalons à 0 l'index pour la température de 10000°.

Faisons le calcul dans deux cas, en admettant tout d'abord la validité de l'équation de Wien (I_w) puis celle de la loi de Planck (I_p). Ces valeurs figurent sur le tableau ainsi que les indices calculés par M. Becker (I_B).

Les valeurs I_w et I_p ne diffèrent que de moins de 0,03 magnitude pour toutes les étoiles dont la température est inférieure à 25000°. Au delà, la différence ne dépasse 0,05 magnitude que pour des températures supérieures à 30000°. C'est dire que la

Index de couleur photo-électrique.

T_e	I_W	I_P	I_B
2000	+ 1,46	+ 1,44	—
2500	1,08	1,07	—
3000	0,84	0,82	+ 1,02
4000	0,54	0,52	0,65
5000	0,36	0,34	0,43
6000	0,24	0,22	0,28
8000	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,10
10000	0,00	0,00	0,00
15000	— 0,12	— 0,10	— 0,11
20000	0,18	0,16	0,16
25000	0,21	0,18	0,18
30000	0,24	0,20	0,20
40000	— 0,27	— 0,20	— 0,22

théorie de l'index de couleur basée sur la loi de Wien est généralement satisfaisante et que ce n'est que pour des mesures de haute précision que le modeste gain de précision apporté par celle de Planck peut avoir un sens. Les corrections Wien-Planck sont beaucoup moindres pour les indices de couleur que pour les indices absolus.

La comparaison de nos valeurs et de celles de M. Becker montre une divergence notable pour les étoiles froides, différence qui atteint 0,2 magnitude vers 3000°. Par contre, les écarts ne dépassent pas 0,02 magnitude pour les températures supérieures à 8000°. Quelle peut être la cause de ces différences pour les astres froids ?

Les fonctions σ que nous avons introduites ne représentent pas rigoureusement les sensibilités observées. Qualitativement, l'accord sur les I est excellent. Mais quantitativement, il n'est bon que pour les étoiles chaudes. Si les divergences entre les sensibilités observées et celles admises ici étaient la cause de ce désaccord, il semble que cela serait sensible tant pour les températures élevées que pour celles inférieures à une certaine limite.

Mais il y a une différence notable entre la méthode de calcul de M. Becker et la nôtre: les fonctions σ tendent rapidement vers 0, dès que les longueurs d'onde s'écartent de celles corres-

pondant aux maxima de sensibilité. On peut donc, dans le calcul des magnitudes, intégrer de $\lambda = 0$ à $\lambda = \infty$, sans introduire d'absurdité et sans perdre notablement en précision, semble-t-il.

M. Becker a opéré par intégrations graphiques, procédé qui a dû être assez pénible puisqu'il n'a effectué le calcul que pour un petit nombre de températures (2000°, 5000°, 7000°, 10000°, 100000° et 100000000°); il a complété sa table par interpolation. Il a dû avoir quelques difficultés à choisir ses limites d'intégration; en effet, dit-il, « l'étude des limites du domaine de sensibilité des appareils n'a pas pu être effectuée, pour ce travail, avec tout le soin désirable... La limite d'intégration a été choisie, pour les grandes longueurs d'onde, à 550 $m\mu$. La sensibilité de la cellule décroît si rapidement, du côté des courtes longueurs d'onde, qu'il est inutile d'introduire une limite d'intégration bien définie ».

La théorie des quanta permet de montrer que la sensibilité des cellules est nulle au-dessous d'une certaine limite de longueur d'onde. Notre théorie l'étend indéfiniment et ne pose $\sigma = 0$ que pour $\lambda = 0$. Qualitativement, l'erreur ainsi faite tend à diminuer la magnitude relative au filtre bleu, probablement plus que celle correspondant au filtre jaune, donc à diminuer les indices. Cette explication semble insuffisante, car c'est surtout pour les étoiles dont le rayonnement est riche en ultraviolet que cette erreur devrait être sensible. C'est donc plutôt du côté des grandes longueurs d'onde que doit être cherchée la cause du désaccord; mais il est difficile de pousser la discussion plus loin, M. Becker ne donnant pas de détails sur ses calculs.

Du point de vue des applications, la divergence constatée pour les étoiles froides est de peu d'importance, car c'est précisément pour elles que la présence de nombreuses bandes d'absorption rend très discutable l'assimilation du rayonnement stellaire à celui du corps noir.

On peut encore se demander de combien l'échelle de température de M. Becker serait modifiée en adoptant nos valeurs d'index. Construisons un tableau en prenant cet index comme variable indépendante et en ajoutant l'indication approximative du type spectral tel qu'il résulte des indications de M. Becker.

Température en fonction de l'index photo-électrique.

I	Type spectral	T _B	T _R
— 0,20	B ₅	29800	35000
— 0,10	A ₂	(14700)	16000
0,00	F ₀	9945	10000
+ 0,10	F ₅	(7490)	7700
0,20	F ₉	6787	6200
0,30	G ₄	5868	5500
0,50	K ₁	4649	4200
0,70	K ₄	3839	3400
+ 1,00	M	3047	2600

Les températures de M. Becker varient plus lentement que les nôtres, et pourtant on peut les considérer comme occupant un domaine étendu. Cependant les ordres de grandeur sont tout à fait comparables. Nous avons donc ici un exemple complet de détermination de températures stellaires par l'application systématique de la théorie de l'index de couleur basée sur l'hypothèse de la validité des fonctions σ pour représenter la sensibilité. A part la simplification du calcul, qui doit être sensible, cette méthode possède l'avantage théorique d'une signification précise des constantes qui y figurent; elle permet une étude analytique préliminaire des problèmes et d'opérer des corrections par différentiation.

Observatoire de Genève.